

## 混沌模拟信息转换——基于多射法的稀疏信号重构

席峰\* 陈胜垚 刘中  
(南京理工大学电子工程系 南京 210094)

**摘要:** 混沌压缩采样是应用混沌系统实现非线性测量的压缩采样理论。该文研究模拟信号的混沌压缩采样-混沌模拟信息转换。该转换通过稀疏信号激励混沌系统, 低速采样系统输出实现; 信号重构则以混沌系统参数估计理论为基础, 通过稀疏正则化的非线性最小二乘问题进行求解。该文将多射法(MS)与迭代再加权非线性最小二乘算法(IRNLS)结合, 给出混沌模拟信息转换的 MS-IRNLS 信号重构算法。文中以 Lorenz 系统为例, 仿真验证了 MS-IRNLS 算法的重构性能, 结果表明方法的有效性。

**关键词:** 混沌压缩感知; 模拟信息转换; 多射法; 稀疏; 非线性最小二乘

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)03-0608-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00905

## Chaotic Analog-to-information Conversion: Sparse Signal Reconstruction with Multiple Shooting Method

Xi Feng Chen Sheng-yao Liu Zhong

(Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** Chaotic Compressive Sensing (CS) is a nonlinear compressive sensing theory which utilizes the randomness-like characteristic of chaos systems to measure sparse signals. This paper focuses on the chaotic compressive sensing for the acquisition and reconstruction of analog signals, *i.e.*, Chaotic Analog-to-Information (ChaA2I) converter. ChaA2I generates the low-rate samples by sampling the output of chaotic system excited by the sparse signals, and implements the signal reconstruction by solving the sparsity-regularized nonlinear least squares problem. With the view on chaotic parameter estimation, a highly-efficient reconstruction algorithm (MS-IRNLS) is developed by combing the Multiple Shooting (MS) method with the Iteratively Reweighted Nonlinear Least-Squares (IRNLS) algorithm. With the Lorenz system as an example, the paper conducts extensive simulations for the reconstruction performance of MS-IRNLS algorithm. The simulations demonstrate the effectiveness of the proposed ChaA2I.

**Key words:** Chaotic Compressive Sensing (CS); Analog-to-Information converter; Multiple Shooting (MS) method; Sparsity; Nonlinear Least Squares (NLS)

### 1 引言

压缩采样(Compressing Sampling, CS), 又称压缩感知(Compressing Sensing), 是由 Donoho<sup>[1]</sup>和 Candès 等人<sup>[2]</sup>从信号稀疏分解和逼近理论发展而来的信号低速率采样理论, 其核心思想是对信号同时进行压缩处理和采样。当信号是稀疏信号时, 信号压缩测量通过随机线性投影, 将信号从高维信号空间映射到低维观测空间; 当随机线性投影满足约束等距性(RIP)条件<sup>[3]</sup>时, 稀疏信号可以精确重构。压缩感知理论最初是针对离散信号而提出的, 在此基

础上, 人们又提出了模拟信号的压缩采样, 即模拟信息转换 (Analog-to-Information conversion, A2I)<sup>[4,5]</sup>。与传统的模数转换 (Analog-to-Digital Conversion, ADC)不同, 模信转换以信息率为准则实现稀疏信号的次奈奎斯特(Sub-Nyquist)采样, 突破了信号带宽对采样率的限制。模信转换在通信、雷达等领域都具有广泛的应用价值<sup>[5,6]</sup>。

根据压缩采样理论, 模信转换的关键是设计有效的“随机化”测量, 以将信号从高维信号空间随机映射到低维采样空间。目前比较典型的“随机化”方法包括随机滤波<sup>[7]</sup>、随机解调<sup>[4]</sup>、随机采样<sup>[8]</sup>等。其中, 随机解调法已成为随机调制预积分、分段压缩采样、Xampling 等模信转换的基本模块(详见文献[9])。业已发展的模信转换都需要提供具有足够“随机化”的随机滤波器或随机扩频信号, 这类系

2012-07-16 收到, 2012-11-22 改回

国家自然科学基金(60971090, 61101193)和江苏省博士后基金(1101080C)资助课题

\*通信作者: 席峰 xifeng.njust@gmail.com

统不仅在实现上增加了硬件负担,而且在异地重构中还需要保证随机线性投影的可复制性。

文献[10]首次提出混沌压缩采样理论(Chaotic CS, ChaCS)。混沌压缩采样,把稀疏信号作为混沌系统的激励信号,充分利用混沌系统产生的“随机性”输出,采用低速采样系统输出实现压缩采样。与基于随机线性投影的压缩采样系统相比,ChaCS系统不仅实现结构简单,同时混沌系统对稀疏信号的混沌化过程还增加了压缩测量数据的保密性;在信号异地重构中,“随机化”映射可重复产生。ChaCS信号重构则应用混沌脉冲同步理论和混沌参数估计技术实现。

本文将 ChaCS 系统推广到模拟信号的压缩采样,研究基于混沌系统的模信转换原理及信号重构方法。为应用混沌“类随机”行为设计有效的“随机化”方法,本文提出混沌模信转换系统结构,我们把它称为 ChaA2I 系统。在此结构中,混沌系统受被采样稀疏信号激励,产生“类随机”的混沌系统状态;对混沌状态进行观测和低速采样则可获得关于被采样信号的非线性压缩采样。这样,被采样信号的压缩采样可表示为非自治混沌系统输出的低速采样。因此,稀疏信号重构就是从低速采样中实现非自治混沌系统的参数估计问题,即稀疏信号基底表示矢量的估计。不同于文献[10],可以不要构造基于混沌脉冲同步实现稀疏信号估计的驱动-响应系统,简化了系统设计。

自治/非自治混沌系统参数估计是微分动力系统的一个重要研究问题,在过去的几十年里,人们提出了多种不同的参数估计方法,如初始值法、多射法、配置法、导数近似法等(详见文献[11])。就本文研究问题而论,考虑到激励信号的稀疏性,我们可通过求解稀疏正则化的非线性最小二乘问题获得。由于混沌系统的非线性行为,在求解非线性最小二乘问题进行参数估计时,不可避免地会出现局部最优点的情况。注意到,非线性微分系统参数估计方法中的多射(Multiple Shooting, MS)法<sup>[12]</sup>,通过采用简单的分段估计策略即可有效降低局部最优点对参数估计的影响。本文将多射法的分段估计策略与稀疏信号特征相结合,通过迭代加权的方式将稀疏正则化的非线性最小二乘问题转变为标准的非线性最小二乘问题进行求解,可有效地提高稀疏信号估计性能。我们称此算法为多射迭代再加权非线性最小二乘算法(Multiple Shooting-Iteratively Reweighted Nonlinear Least Squares, MS-IRNLS)。在仿真实验中,我们以基于 Lorenz 系统的 ChaA2I 系统为例,对稀疏多频信号实施模信转换,并应用

MS-IRNLS 算法进行信号重构。仿真结果验证了 MS-IRNLS 算法的有效性。

## 2 信号模型与问题描述

假设被采样信号是有限长连续时间信号  $s(t)$  ( $t \in [0, T]$ ), 在基底  $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^N$  上可展开为

$$s(t) = \boldsymbol{\psi}(t) \boldsymbol{\alpha} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n(t), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

其中  $\boldsymbol{\psi}(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)]$  是基底矩阵,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T$  是信号的基表示矢量。当  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 = K \ll N$  时, 信号  $s(t)$  称为  $K$  稀疏的, 其中  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0$  表示矢量  $\boldsymbol{\alpha}$  中的非零元素的个数。信号的稀疏性与其表示基底有关。

本文以稀疏多频信号为例, 研究基于混沌系统的模信转换。考虑由式(2)所描述的多频信号:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{W/2} (\alpha_n \cos(2\pi n t) + \alpha_{W/2+n} \sin(2\pi n t)) \quad (2)$$

**定义**  $\boldsymbol{\psi}(t) = [\cos(2\pi t), \dots, \cos(W\pi t), \sin(2\pi t), \dots, \sin(W\pi t)]$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_W]^T$ , 则多频信号式(2)可由模型式(1)所描述。如果  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 = K \ll W$ , 则称信号  $s(t)$  是频域稀疏的。信号  $s(t)$  的带宽为  $W/2$ , 其 Nyquist 采样间隔  $T_{\text{nyq}} = 1/W$ 。对时长为  $T$  的信号  $s(t)$  进行采样, 需要至少获得  $N = \lceil TW \rceil$  个采样值。

根据压缩采样理论, 若设计一个随机映射  $\varphi(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  对稀疏信号  $s(t)$  进行随机化, 且以采样间隔  $T_s > T_{\text{nyq}}$  对随机化信号  $\varphi(s(t))$  进行采样, 则可获得关于  $s(t)$  的压缩测量。对时长为  $T$  的信号  $s(t)$ , 则可获得  $M = \lceil T/T_s \rceil < N$  个压缩采样值。

本文主要研究应用混沌系统设计随机映射  $\varphi(\cdot)$  及其重构方法。

## 3 基于混沌的模信转换

本节阐述本文提出的 ChaA2I 和信号重构原理。

### 3.1 ChaA2I 结构

ChaA2I 结构如图 1 所示。设混沌系统是一个  $d$  维连续时间混沌动力学系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad (3)$$

其中  $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_d]^T \in \mathbb{R}^d$ ,  $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) = [f_1(\boldsymbol{x}, t), f_2(\boldsymbol{x}, t), \dots, f_d(\boldsymbol{x}, t)]^T \in \mathbb{R}^d$  分别是系统式(3)的状态矢量及非线性矢量函数,  $\boldsymbol{x}_0$  是系统的初始状态。不失一般

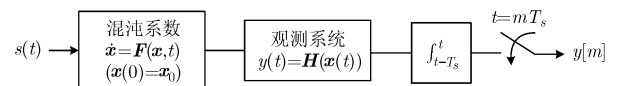


图 1 混沌模信转换结构

性, 假定稀疏信号  $s(t)$  加载在第 1 个状态变量上, 则混沌系统式(3)成为如式(4)的  $d$  维连续非自治混沌系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, t) + \mu\psi(t)\boldsymbol{\alpha} \\ f_2(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ f_d(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

其中  $\mu$  是耦合因子。耦合因子  $\mu$  具有两方面的作用: 一是调节信号幅度以保证系统工作在混沌状态; 二是调节混沌系统受信号控制的程度, 以获得较好的“随机化”测量。受信号  $s(t)$  激励, 混沌系统状态由信号  $s(t)$  的基底和基表示矢量  $\boldsymbol{\alpha}$  决定。

为获得包含信号  $s(t)$  信息的“随机化”测量, 我们对系统式(4)产生的混沌状态  $\mathbf{x}(t)$  进行观测和采样。观测函数  $\mathbf{H}(\cdot): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  将矢量的混沌状态  $\mathbf{x}(t)$  映射为标量的观测信号  $y(t)$ :

$$y(t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}(t)) \quad (5)$$

对  $y(t)$  进行低通滤波和低速采样即可获得关于  $s(t)$  的压缩采样。在实际中, 低通滤波和采样可由标准的 ADC 器件实现。为简化分析, 图 1 中使用积分器作为抗混叠低通滤波器, 所获得的离散时间采样序列  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$  可描述为

$$y_m = \int_{(m-1)T_s}^{mT_s} y(t) dt, \quad m = 1, \dots, M \quad (6)$$

式(6)中  $T_s$  为采样间隔,  $M = \lceil T/T_s \rceil$ 。若采样间隔  $T_s > T_{\text{nyq}}$ , 则  $\mathbf{y}$  可看作关于信号  $s(t)$  的压缩采样序列。

由于混沌系统被信号  $s(t)$  所激励, 在混沌系统的随机化作用下, 信号  $s(t)$  被随机映射到混沌状态。当采样间隔  $T_s$  在一定的阈值范围内, 信号  $s(t)$  信息包含在低速采样序列  $\mathbf{y}$ , 因此可以重构出信号  $s(t)$ 。

### 3.2 信号重构

根据压缩采样理论, 对稀疏信号, 可以通过求解带约束的  $l_0$ -范数最小化问题重构稀疏信号。对本文的问题, 该最小化问题可表示为

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\alpha}} \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \\ \text{s.t. } y_m = \mathbf{H}_m(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}), \quad m = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{(m-1)T_s}^{mT_s} \mathbf{H}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha})) dt \quad (8)$$

式(8)中  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha})$  表示初始状态为  $\mathbf{x}_0$ 、信号基表示矢量为  $\boldsymbol{\alpha}$  时系统式(4)在  $t$  时刻的状态。在线性测量压缩采样理论中, 式(7)是凸问题, 可采用贪婪算法<sup>[13]</sup>和基追踪算法<sup>[14]</sup>进行有效的求解。对本文提出的式(7), 一般是非凸问题, 难以直接采用这些方法

求解。

我们注意到, 混沌系统式(4)可看作是一个以  $\boldsymbol{\alpha}$  为参数激励的非自治混沌系统。因此, 可将稀疏信号  $s(t)$  的重构问题转变为对非自治混沌系统式(4)的参数  $\boldsymbol{\alpha}$  的估计问题。考虑参数  $\boldsymbol{\alpha}$  的稀疏性, 可定义如式(9)所示的参数估计的代价函数  $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha})$ :

$$\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}) = \|\mathbf{y} - \mathcal{H}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha})\|_2^2 + \lambda \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \quad (9)$$

其中

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}) = [\mathcal{H}_1(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}), \mathcal{H}_2(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}), \dots, \mathcal{H}_M(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha})]^T \quad (10)$$

代价函数  $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha})$  包含两部分, 前一部分评估拟合误差, 而后一部分则评估参数  $\boldsymbol{\alpha}$  的稀疏性, 其中  $\lambda$  是正则化因子。参数  $\boldsymbol{\alpha}$  的估计值可通过求解如下  $l_0$ -范数正则化的非线性最小二乘问题获得

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha}) \quad (11)$$

由于混沌系统的非线性行为特性, 代价函数  $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\alpha})$  可能包括多个局部最优点。因此, 需要设计有效的稀疏重构算法求解上述问题, 以减少局部最优点对参数估计的影响。

## 4 基于多射法的稀疏信号重构算法

本节给出我们提出的多射迭代再加权非线性最小二乘算法(MS-IRNLS)。多射法的基本思想是对参数估计的整个观测区间进行分段估计, 并增加对混沌系统状态连续性的约束, 以保证各分段观测的连续性。当采用分段估计策略时, 多射法一方面减小了参数估计中最小二乘拟合的非线性性, 另一方面增加了优化变量空间, 从而使得优化问题具有更大的灵活性与可控性以避免优化过程进入局部最优点。MS-IRNLS 算法将多射法应用于求解  $l_0$ -范数正则化的非线性最小二乘问题式(11), 并采用迭代再加权的方式将  $l_0$ -范数正则化的非线性最小二乘问题转化为标准的非线性最小二乘问题进行迭代求解。

定义  $T_m = [(m-1)T_s, mT_s]$  表示采样值  $y_m$  所对应的观测区间,  $m = 1, 2, \dots, M$ 。基于多射法的原理, 我们将观测时间间隔  $I = [0, T]$  分为  $L \leq M$  个子间隔  $I_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ), 使得每个子间隔至少包含一个观测区间  $T_m$ 。假设系统在每一个子间隔  $I_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) 内的初始值为  $\mathbf{x}_0^l$ , 系统状态为  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0^l, \boldsymbol{\alpha})$  ( $t \in I_l$ )。基于多射法的分段估计策略, 参数估计问题式(11)可等价表示为式(12)的形式:

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}_0^1, \dots, \mathbf{x}_0^L} \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{x}_0^1, \mathbf{x}_0^2, \dots, \mathbf{x}_0^L, \boldsymbol{\alpha}) \\ \text{s.t. } \mathbf{x}_0^l = \mathbf{x}(t_{l-1}^+; \mathbf{x}_0^{l-1}, \boldsymbol{\alpha}), \quad l = 2, \dots, L \\ \mathbf{x}_0^1 = \mathbf{x}_0 \end{array} \right\} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{x}_0^1, \mathbf{x}_0^2, \dots, \mathbf{x}_0^L, \boldsymbol{\alpha}) \\ = \sum_{l=1}^L \sum_{m: T_m \subset I_l} \left( y_m - \mathcal{H}_m(\mathbf{x}_0^l, \boldsymbol{\alpha}) \right)^2 + \lambda \|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \quad (13) \end{aligned}$$

上述优化问题中的等式约束是为了保证混沌系统状态的连续性, 即要求每一子间隔的初始状态须与上一子间隔的终止状态相等, 其中  $t_i^+ = \max\{t: t \in I_l\}$  表示子间隔  $I_l$  的终止时刻。式(12)中, 每一子间隔有独立的初始状态, 因此减少了混沌系统对估计误差的指数放大作用。同时, 连续性约束又保证了式(12)所获的参数估计与式(11)解的一致性。

我们可采用迭代的方式求解非线性参数估计问题式(13)。基本过程如下: 选择合适的初始搜索点  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{(0)}$  与  $\bar{\mathbf{x}}_{(0)}$  ( $l=2, \dots, M$ ), 将式(12)中的代价函数在初始点进行线性化, 对线性化子问题进行求解, 并对初始搜索点进行迭代更新。注意到由于  $l_0$  范数的不可导性, 在迭代过程中可采用迭代再加权<sup>[15,16]</sup>的方式用加权  $l_2$  范数代替  $l_0$  范数进行求解。不同于传统的迭代再加权方式, 我们在 MS-IRNLS 算法中采用两层迭代再加权过程以提高参数估计性能。

MS-IRNLS 算法将  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0$  近似为式(14)的形式:

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \approx \bar{\mathbf{W}} \left\| \mathbf{W}^{1/2} \boldsymbol{\alpha} \right\|_2^2 \quad (14)$$

其中  $\bar{\mathbf{W}} = \text{diag}[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_N]$  称为先验加权矩阵, 由  $\boldsymbol{\alpha}$  的先验估计值  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  决定, 且  $\bar{\omega}_i = (|\bar{\alpha}_i| + \varepsilon)^{-1}$  ( $1 \leq i \leq N$ );  $\mathbf{W} = \text{diag}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]$  称为后验加权矩阵, 由  $\boldsymbol{\alpha}$  在第  $j$  次迭代后的估计值  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}$  决定, 且  $\omega_i = ((\bar{\alpha}_i^{(j)})^2 + \varepsilon)^{-1/2}$ 。在 MS-IRNLS 算法的两层迭代再加权过程中, 内层迭代固定先验加权矩阵  $\bar{\mathbf{W}}$ , 迭代更新参数估计值  $\boldsymbol{\alpha}$  与后验加权矩阵  $\mathbf{W}$ ; 而外层迭代则以内层迭代的收敛值更新  $\boldsymbol{\alpha}$  的先验估计值  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  及先验加权矩阵  $\bar{\mathbf{W}}$ 。MS-IRNLS 算法流程如表 1 所示。

在算法流程中,  $J$  是算法的最大迭代次数,  $\text{err}$  是收敛精度。注意到子问题式(15)是一个等式约束的线性最小二乘问题, 可方便地对其求解。

应当注意由于混沌系统的非线性特性, 即使采用多射法仍不能完全避免局部最优点的影响。MS-IRNLS 算法中起始搜索点的选择对参数估计有重要的影响。然而, 如果我们能获得关于参数  $\boldsymbol{\alpha}$  的先验估计信息, 则可通过设置先验加权矩阵的权值  $\bar{\mathbf{W}}$  提高参数估计的准确性。此外, 我们也可通过选择不同的起始搜索点多次运行算法以获得最优的参数估计值。

## 5 仿真实验

本节以基于 Lorenz 系统的 ChaA2I 系统为例, 对稀疏多频信号实施模信转换, 并应用 MS-IRNLS 算法进行重构。假设待采样信号  $s(t)$  是由式(2)所描

表 1 MS-IRNLS 算法

步骤 1 设置初始搜索点  $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_N]^T$  和  $\bar{\mathbf{x}}_0 = [(\bar{\mathbf{x}}_0^1)^T, (\bar{\mathbf{x}}_0^2)^T, \dots, (\bar{\mathbf{x}}_0^N)^T]^T$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_0^1 = \bar{\mathbf{x}}_0$ , 及算法参数  $J, \varepsilon$  和  $\text{err}$ 。

步骤 2 计算先验加权矩阵  $\bar{\mathbf{W}} = \text{diag}[\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_N]$ , 其中  $\bar{\omega}_i = (|\bar{\alpha}_i| + \varepsilon)^{-1}$ ; 令  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(0)} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_0^{(0)} = \bar{\mathbf{x}}_0$ ,  $j = 0$ 。

步骤 3 计算后验加权矩阵  $\mathbf{W}^{(j)} = \text{diag}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]$ , 其中  $\omega_i = ((\bar{\alpha}_i^{(j)})^2 + \varepsilon)^{-1/2}$ ; 在点  $\boldsymbol{\theta}^{(j)} = [(\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)})^T, (\bar{\mathbf{x}}_0^{(j)})^T]^T$  处对问题式(12)的目标函数与等式约束进行线性化, 求解如下子问题:

$$\left. \begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}^{(j)}} \sum_{l=1}^L \sum_{m: T_m \in I_l} \left\| \begin{aligned} & y_m - \mathcal{H}_m(\bar{\mathbf{x}}_0^{(j)}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}) \\ & - \frac{\partial \mathcal{H}_m(\bar{\mathbf{x}}_0^{(j)}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)})}{\partial \boldsymbol{\theta}^{(j)}} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(j)} \\ & + \lambda \left\| (\bar{\mathbf{W}} \mathbf{W}^{(j)})^{1/2} (\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)} + \Delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}) \right\|_2 \end{aligned} \right\|_2^2 \\ \text{s.t. } \mathbf{x}(t_i^+; \bar{\mathbf{x}}_0^{(j)}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}) + \frac{\partial \mathbf{x}(t_i^+; \bar{\mathbf{x}}_0^{(j)}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)})}{\partial \boldsymbol{\theta}^{(j)}} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(j)} \\ = \bar{\mathbf{x}}_0^{l+1(j)} + \Delta \bar{\mathbf{x}}_0^{l+1(j)}, \quad l = 1, 2, \dots, L-1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

步骤 4 更新参数估计值  $\boldsymbol{\theta}^{(j+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(j)} + \Delta \boldsymbol{\theta}^{(j)}$ 。

步骤 5 当  $j = J$  或  $\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j+1)} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}\|_2 / \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}\|_2 \leq \text{err}$  时, 转步骤 6; 否则  $j = j + 1$  转步骤 3。

步骤 6 当  $\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j+1)} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}\|_2 / \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|_2 \leq \text{err}$  时, 转步骤 7; 否则  $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j+1)}$ , 转步骤 2。

步骤 7 输出  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{out}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{(j+1)}$ 。

述的带宽为 50 Hz 的稀疏多频信号, 信号 Nyquist 采样率  $f_{\text{nyq}} = 100$  Hz。假设激励信号加在 Lorenz 系统的  $x_1$  维状态上, 则由  $s(t)$  激励的 Lorenz 系统可描述如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \tau(a(x_2(t) - x_1(t))) + \mu s(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \tau(bx_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= \tau(x_1(t)x_2(t) - cx_3(t)) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中  $a, b, c$  为系统参数, 当  $a = 10, b = 28, c = 2.66$  时系统运行在混沌状态。 $\tau$  是时间尺度因子, 用于控制 Lorenz 系统随时间变化的快慢程度, 即信号  $x_1, x_2$  和  $x_3$  的带宽<sup>1)</sup>。混沌信号的带宽直接反映混沌系统的随机化程度。由于  $s(t)$  与混沌状态  $x_1, x_2$  和  $x_3$  耦合, 我们定义  $x_1, x_2$  和  $x_3$  的最大带宽作为 Lorenz 系统带宽, 以此反映 Lorenz 系统的随机化程度。图 2 中给出无激励时 Lorenz 系统状态  $x_1, x_2$  和  $x_3$  的带宽随时间尺度  $\tau$  变化的曲线, 其中  $x_2$  的带宽最大。为对激励信号进行充分的随机化作用, 要

<sup>1)</sup>根据文献[17], 本文定义混沌信号带宽为集中其 99% 能量的频谱宽度。

求混沌系统带宽大于信号带宽。根据图 2, 我们在仿真实验中选择  $\tau = 15$ , 此时 Lorenz 系统带宽约为 51 Hz。为重构信号  $s(t)$ , 我们需估计  $s(t)$  的 Fourier 基表示矢量  $\alpha \in \mathbb{R}^{100}$ 。在仿真实验中, 对 Lorenz 系统的  $x_1$  维状态进行观测和采样, 固定  $\mu = 20$ , 信号基表示矢量的非零位置随机均匀产生, 其非零值服从取值为  $\pm 1$  的伯努利分布或高斯分布  $\mathcal{N}(0,1)$ 。

为衡量重构性能, 定义  $\|\hat{\alpha}_{\text{out}} - \alpha_0\|_2 / \|\alpha_0\|_2$  为重构相对误差, 其中  $\alpha_0$  是基表示矢量的真实值,  $\hat{\alpha}_{\text{out}}$  是算法输出的估计值。仿真实验中, 设稀疏重构问题式(11)的正则化因子  $\lambda = 0.01$ 。MS-IRNLS 算法中子间隔分段数  $L = 20$ , 收敛精度  $\text{err} = 0.01$ 。我们在仿真实验中分别研究了以下两种情况的重构性能:

(1)  $\alpha$  的先验信息已知情形: 此种情况用于评估重构算法的局部估计性能。假设我们获得关于  $\alpha$  的先验估计值  $\bar{\alpha}$ , MS-IRNLS 算法以先验估计值  $\bar{\alpha}$  为起始搜索点, 并根据  $\bar{\alpha}$  值设置先验加权矩阵  $\bar{W}$ 。在仿真实验中, 先验估计值  $\bar{\alpha}$  由均值为  $\alpha_0$ , 方差为  $(0.05\|\alpha_0\|_2)^2 I_N$  的高斯分布产生。此时先验相对误差  $\|\bar{\alpha} - \alpha_0\|_2 / \|\alpha_0\|_2$  的平均值为 0.5。

(2)  $\alpha$  的先验信息未知情形: 此种情况用于评估 MS-IRNLS 算法的全局估计性能。此时, MS-IRNLS 算法随机选取初始搜索点  $\bar{\alpha}$ , 且设置先验加权矩阵  $\bar{W} = I_N$ 。为减少初始值选取对重构性能的影响, 我们在仿真实验中对每一给定的  $\alpha$  值随机选取 20 个初始搜索点分别运行 MS-IRNLS 算法, 重构性能则由最小相对估计误差来衡量。

图 3 中给出  $\alpha$  先验信息已知时, MS-IRNLS 算法的重构误差与稀疏度  $K$  的变化关系, 其中图 3(a) 和图 3(b) 中的  $\alpha$  分别服从伯努利分布和高斯分布。仿真结果由  $1 \times 10^2$  次独立实验给出。由于混沌的非线性行为特性, MS-IRNLS 算法无法保证对每一次随机选取的初始搜索点都能成功收敛。图 3 中只对算法成功收敛的结果进行计算。在仿真实验中, MS-IRNLS 算法成功收敛的概率约为 80%~90%。

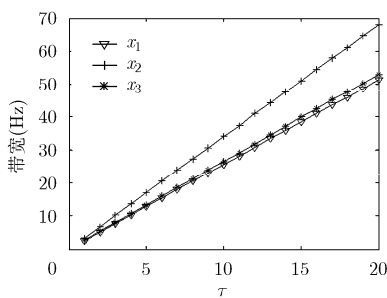
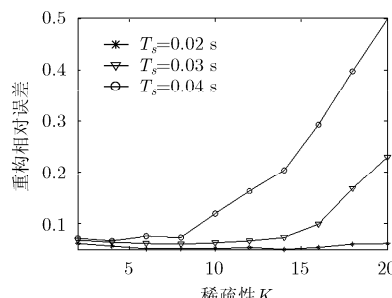


图 2 Lorenz 系统状态  $x_1$ ,  $x_2$  和  $x_3$  带宽与时间尺度  $\tau$  的关系

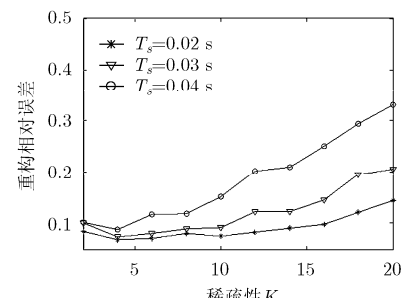
根据图 3, 当稀疏度  $K < 8$  时, 采样间隔分别为  $T_s = 0.02$  s,  $0.03$  s 和  $0.04$  s 时的重构相对误差仅为  $0.05 \sim 0.1$ 。事实上, 我们在仿真实验中发现, 当重构相对误差低于 0.1 时, MS-IRNLS 算法可准确估计基表示矢量  $\alpha$  的非零位置。此时的估计误差主要来源于采用稀疏正则化而引起的曲线拟合性能的下降。比较不同采样间隔时的重构误差, 当采样间隔为  $T_s = 0.02$  s 时, 即使对较高的稀疏度  $K$ , MS-IRNLS 算法也能获得较高的重构精度。随着采样率的降低, MS-IRNLS 算法的重构性能也降低。比较伯努利分布(图 3(a))和高斯分布(图 3(b))时的重构性能, 我们发现当稀疏度  $K$  较低时, 伯努利分布的重构性能较好, 而当稀疏度  $K$  较高时, 则高斯分布的重构性能较好。这是因为伯努利分布时,  $\alpha$  的非零位置有相同的幅值, 只要其非零位置被准确估计, 即可获得较高的估计精度; 反之, 若非零位置无法准确估计, 则其估计性能会明显降低。

图 4 中则给出  $\alpha$  先验信息未知时, MS-IRNLS 算法的重构误差与稀疏度  $K$  的变化关系, 其中图 4(a) 和图 4(b) 中的  $\alpha$  分别服从伯努利分布和高斯分布。与图 3 的结果相比, 图 4 中的重构性能随稀疏度  $K$  有近似相同的变化趋势。当稀疏度  $K < 8$  时, MS-IRNLS 算法在采样间隔为  $T_s = 0.02$  s 和  $T_s = 0.03$  s 时仍有较好的重构性能(约为 0.1)。而当采样间隔为  $T_s = 0.04$  s 时, 则要求  $K < 4$  时才能获得较高的重构精度。仿真结果表明, 当信号稀疏度  $K$  较低时, MS-IRNLS 算法仍能获得较好的全局估计性能。

上述实验结果表明, 本文所提出的 ChaA2I 系统可有效地实现模拟信号的压缩采样。在 ChaA2I 系统中, 混沌系统确实起到了“随机化”的作用, 使得我们能够从低速采样序列重构原信号。而本文所提出的 MS-IRNLS 算法则可有效地从混沌采样序列中重构稀疏信号。根据仿真实验的结果, 由于受正则化因子的折中作用, MS-IRNLS 算法即使在准确估计出基表示系统的非零位置时仍有约为 0.1 的相对估计误差。然而一旦非零位置被准确估计, 我

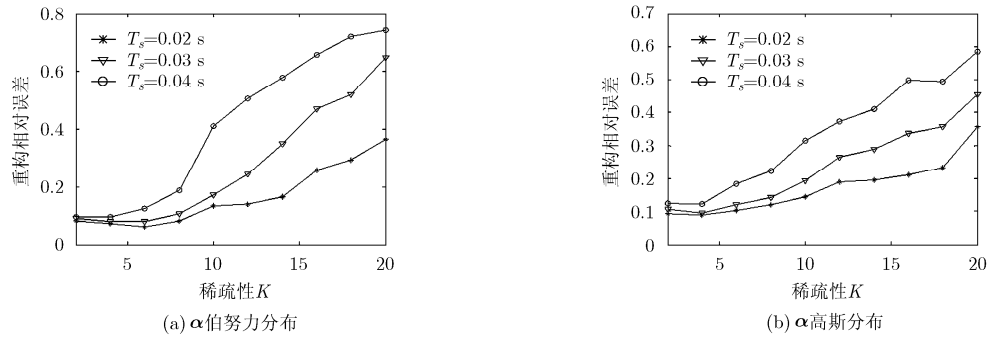


(a)  $\alpha$  伯努利分布



(b)  $\alpha$  高斯分布

图 3  $\alpha$  先验信息已知时 MS-IRNLS 算法的重构性能

图4  $\alpha$  先验信息未知时 MS-IRNLS 算法的重构性能

们即可将待估计的参数空间由  $N$  维降为  $K$  维, 从而可通过求解  $K$  维参数的非线性最小二乘估计提高信号重构精度。

## 6 结束语

本文研究基于混沌系统的模拟信号压缩采样——ChaA2I, 阐述了 ChaA2I 原理, 给出一个结合信号稀疏特性的信号重构算法, 计算机仿真实验表明本文提出算法的有效性。与其它 A2I 系统相比, ChaA2I 结构简单, 实现方便, 但是信号重构算法相对复杂; 而种类繁多的混沌系统为设计符合应用需要的 ChaA2I 提供了方便。将混沌系统的“类随机性”用于随机化稀疏信号以实现压缩采样是一个新的研究领域, 本文和文献[10]形成了基于混沌压缩采样的基本架构, 为混沌应用开辟了一个新的领域, 丰富混沌信息动力学理论体系。

## 参考文献

- [1] Donoho D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306.
- [2] Candès E, Romberg J, and Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509.
- [3] Candès E and Tao T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203–4215.
- [4] Kirolos S, Laska J N, Wakin M B, et al. Analog-to-Information conversion via random demodulation[C]. Proceedings of the IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop, Dallas, Oct. 2006: 71–74.
- [5] Mishali M and Eldar Y C. Wideband spectrum sensing at sub-Nyquist rates[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, 28(4): 102–135.
- [6] Xi F, Chen S Y, and Liu Z. Quadrature compressive sampling for radar echo signals[C]. Proceedings of 2011 International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP), China, Nanjing, 2011: 1–5.
- [7] Tropp J A, Wakin M B, Duarte M F, et al. Random filters for compressive sampling and reconstruction[C]. International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Toulouse, France, May 2006: III-872–III-875.
- [8] Laska J N, Kirolos S, Massoud Y, et al. Random sampling for analog-to-information conversion of wideband signals[C]. Proceedings of the IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop, Richardson, TX, Oct. 2006: 119–122.
- [9] Becker S R. Practical compressed sensing: modern data acquisition and signal processing[D]. [Ph.D. dissertation], California Institute of Technology, 2011.
- [10] Liu Z, Chen S Y, and Xi F. A compressed sensing framework of frequency-sparse signals through chaotic systems[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, 22(6): 1250151.1–1250151.9.
- [11] Ramsay J O, Hooker G, Campbell D, et al. Parameter estimation for differential equations: a generalized smoothing approach[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 2007, 69 (5): 741–796.
- [12] Peifer M and Timmer J. Parameter estimation in ordinary differential equations for biochemical processes using the method of multiple shooting[J]. *IET Systems Biology*, 2007, 1(2): 78–88.
- [13] Varadarajan B, Khudanpur S, and Tran T D. Stepwise optimal subspace pursuit for improving sparse recovery [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(1): 27–30.
- [14] Lu W and Vaswani N. Regularized modified BPDN for noisy sparse reconstruction with partial erroneous support and signal value knowledge[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(1): 182–196.
- [15] Daubechies I, DeVore R, Fornasier M, et al. Iteratively reweighted least squares minimization for sparse recovery [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2010, 63(1): 1–38.
- [16] Candès E J, Wakin M B, and Boyd S. Enhancing sparsity by reweighted  $l_1$  minimization[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5): 877–905.
- [17] Willsey M S, Cuomo K M, and Oppenheim A V. Quasi-orthogonal wideband radar waveforms based on chaotic systems[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47(3): 1974–1984.

席峰: 男, 1980年生, 博士, 研究方向为混沌动力学、雷达信号处理。

陈胜焘: 男, 1985年生, 博士生, 研究方向为压缩采样、混沌同步和参数估计。

刘中: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为混沌与信息动力学、现代信号处理、传感器网络等。