

## 基于非局部双边随机投影低秩逼近图像去噪算法

罗亮<sup>①</sup> 冯象初<sup>①</sup> 张选德<sup>①②</sup> 李小平<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(西安电子科技大学理学院 西安 710071)

<sup>②</sup>(宁夏大学数学计算机学院 银川 750021)

**摘要:** 该文提出一种基于非局部双边随机投影的低秩逼近图像去噪新方法。首先,对每个图像块通过非局部搜索寻找相似匹配块簇,然后对相似匹配块簇进行双边随机投影,用投影后的低秩结构恢复原图像。实验结果表明,所提方法比奇异值分解方法有较低的计算复杂度,比单边随机投影方法有较小的重构误差。特别是和3维块匹配方法相比,所提方法能保持相近的信噪比和较好的视觉质量。

**关键词:** 图像去噪; 非局部方法; 随机投影; 低秩逼近; 奇异值分解

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)01-0099-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00819

## An Image Denoising Method Based on Non-local Two-side Random Projection and Low Rank Approximation

Luo Liang<sup>①</sup> Feng Xiang-chu<sup>①</sup> Zhang Xuan-de<sup>①②</sup> Li Xiao-ping<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Science, Xidian university, Xi'an 710071, China)

<sup>②</sup>(School of Mathematics and Computer, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

**Abstract:** A novel image denoising method is proposed by using non-local approximation of low-rank based on random projection. The cluster of similar patch for each pixel point is found by using methods of non-local searching, and then compute low-rank approximation of matrix corresponding to the cluster of similar patches using two-side random projection. Finally, the image noise is suppressed by using the Low rank structure. Results show that the proposed method have the low computation cost. Comparing with one-side random projection method, the proposed algorithm ensure lower reconstruction error, and comparing with the Block Method of 3-Dimension (BM3D) method, proposed method have appealing visual quality of images.

**Key words:** Image denoising; Non-local method; Random projection; Approximation of low rank matrix; Singular Value Decomposition (SVD)

### 1 引言

噪声是影响图像质量和视觉效果主要的原因之一。噪声把原图像中许多重要的细节信息掩盖,严重干扰了对图像所做的一些后续的高级处理,如图像恢复<sup>[1,2]</sup>、图像配准<sup>[3]</sup>、图像分割<sup>[4]</sup>等。已有的图像去噪方法可分为局部与非局部方法两大类<sup>[5]</sup>:局部方法主要是通过带噪图像局部邻域的光滑逼近来压制噪声,如中值滤波<sup>[6]</sup>、高斯滤波<sup>[7]</sup>、维纳滤波<sup>[8]</sup>等。在噪声强度比较大的情况下,局部方法难以对原图像做出较准确的估计,很难达到理想的去噪效果。传统的非局部方法<sup>[9]</sup>认为图像包含自相似的结构,因此,在适当的相似性度量下,利用图像块在全图范围内冗余信息可以有效地去除噪声。在文献

[10]提出了非局部平均(Non-Local Means, NLM)去噪算法,通过对这些自相似结构块做加权平均来估计参考块的中心点,从而降低噪声(零均值的高斯白噪声),尽管NLM取得了很好的去噪效果,但对原图像的结构信息保护仍不够。文献[11]根据图像块之间的相似性提出了3维块匹配(Block Method of 3-Dimension, BM3D)算法。该方法不仅有较高的信噪比,而且视觉效果也很好,但是时间复杂度相对较高。

对于自然图像,每个相似块具有相似的数据结构。若将相似匹配块簇中每个图像块转化为列向量组成新的观测数据矩阵,则该矩阵可由低秩矩阵来逼近。进一步,可以利用低秩矩阵来恢复原图像,达到降噪的目的。这类方法称为低秩逼近方法(Low-Rank Method, LRM)。解决数据矩阵低秩逼近问题一般采用的方法是对数据矩阵作奇异值分解(SVD)。虽然奇异值分解能够达到最小的重构误差,但是对高维数据却具有相对高的计算代价。为此,

2012-06-27 收到, 2012-09-27 改回

国家自然科学基金(61271294, 60872138, 61105011, 11101292, 61001156)资助课题

\*通信作者: 罗亮 luoliang775@163.com

文献[12,13]提出了一种基于高斯随机下采样的单边随机投影算法来替代SVD分解。文献[12]中的实验表明这种随机投影算法比SVD方法更鲁棒,比一般的随机方法对随机性不敏感,得到的数据更稳定更精确。

本文在文献[12]的基础上,提出一种基于双边下采样傅里叶变换投影的低秩逼近图像去噪算法。该算法改变高斯随机下采样投影,采用下采样随机傅里叶变换投影<sup>[14]</sup>,达到对原数据更高的重构精度。本文创新点如下:(1)对相似图像块簇进行双边随机投影低秩逼近,降低了对原数据的重构误差。(2)采用图像块簇的估计方法改变传统的点估计方法,即用投影后的低秩结构数据替代整个相似匹配块簇。实验结果表明,所提算法能有效地逼近奇异值分解的最小重构误差,降低计算复杂度。与 NLM 方法相比,在去除噪声的同时较好地保留了原图像的结构信息;与单边随机投影低秩逼近方法相比,保证了较低的重构误差;和 BM3D 方法相比,所提方法能保持较好的视觉质量。

## 2 相似图像块簇低秩逼近方法

### 2.1 奇异值分解的低秩逼近方法

假设含噪的相似匹配块簇矩阵为  $\mathbf{A}_n = \mathbf{A} + \mathbf{N}$ , 其中  $\mathbf{A}$  为原图像对应的相似匹配块簇矩阵,  $\mathbf{N}$  为噪声矩阵。由奇异值分解理论知存在矩阵  $\mathbf{U}$  和矩阵  $\mathbf{V}$ , 使得  $\mathbf{A}_n = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$  为矩阵  $\mathbf{A}_n$  的奇异值,  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ 。Frobenius 范数意义下矩阵最佳逼近定理表明可通过奇异值阈值的方法得到最佳低秩逼近。例如,保留前  $k$  个大的奇异值,将其它奇异值置为 0,再利用奇异值分解的逆过程得到矩阵  $\hat{\mathbf{A}}_n$ , 那么矩阵  $\hat{\mathbf{A}}_n$  是  $\mathbf{A}_n$  的最佳秩  $k$  逼近矩阵。对图像相似匹配块簇而言  $\hat{\mathbf{A}}_n$  相对于  $\mathbf{A}_n$ , 其噪声已被大大减少。根据以上原理,对  $p$  点的相似匹配块簇的低秩逼近可通过如下的奇异值分解方法得到

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{A}_n(p)) \approx \mathbf{U}_p \mathbf{S}_\mu[\mathbf{\Sigma}] \mathbf{V}_p^T \quad (1)$$

其中  $\mathbf{A}_n(p)$  指的是基于相似度评价函数下搜索到的  $p$  点相似邻域块簇所组成的数据矩阵,  $\mathbf{U}_p, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}_p$  分别是  $\mathbf{A}_n(p)$  奇异值分解的左特征矩阵、特征值矩阵、右特征矩阵,  $\mathbf{S}_\mu[\mathbf{\Sigma}]$  为特征值矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  在阈值  $\mu$  下的矩阵,  $\mu$  为阈值。

尽管奇异值分解的低秩逼近能达到对原数据的最小的重构误差,但是对于高维数据这一方法计算和存储复杂度高,为克服这一缺点,可利用随机投影低秩逼近方法来近似和加速奇异值分解低秩逼近方法。

### 2.2 高斯随机投影的低秩逼近方法

首先产生一个服从标准高斯分布的投影矩阵(或称为采样矩阵)  $\mathbf{\Omega} \in R^{n \times k}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  中的每一个元素都是由均值为 0, 方差为 1 的独立同分布的高斯随机变量生成。然后利用矩阵  $\mathbf{\Omega}$  对相似匹配块簇  $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$  进行投影变换,用变换后的数据矩阵重构原相似匹配块簇。表 1 给出了高斯随机投影的低秩逼近方法<sup>[12]</sup>。

表 1 高斯随机投影的低秩逼近方法

#### 算法 1

输入相似匹配块簇  $\mathbf{A}$ , 正整数  $k$

(1)产生  $n \times k$  高斯随机投影阵  $\mathbf{\Omega}$ ;

(2)从矩阵  $\mathbf{A}$  中构造矩阵  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{\Omega}$ ;

(3)正交化矩阵  $\mathbf{Y}$ , 得到正交矩阵  $\mathbf{Q}$ ;

输出相似匹配块簇  $\mathbf{A}$  低秩逼近矩阵  $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \mathbf{A}$

### 2.3 下采样随机傅里叶变换投影低秩逼近方法

算法 1 中,采用了高斯随机采样,本文对算法进行改进采用一种结构化的下采样随机傅里叶变换。下采样随机傅里叶变换投影矩阵  $\mathbf{\Omega}_1 \in R^{n \times l}$  定义如下:

$$\mathbf{\Omega}_1 = \sqrt{n/l} \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{R} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{D}$  是  $n$  阶对角阵,其元素是均匀分布在复单位圆中的独立随机变量,  $\mathbf{F}$  是  $n$  阶单位离散傅里叶变换矩阵,其元素取值为  $f_{pq} = n^{-1/2} e^{-2\pi i(p-1)(q-1/n)}$ ,  $\mathbf{R}$  是服从正态分布的  $n \times l$  随机矩阵。

理想的投影矩阵应该在满足不相关的前提下具有某种数据特征结构<sup>[15]</sup>。采用高斯随机采样方法,保证了大概率意义下保证采样数据的不相关,但没有保持原数据的特征(稀疏、低秩、几何等)结构,重建原数据过程复杂。下采样的傅里叶变换方法,当信号在时域或频域上稀疏时能保证不相关,同时采样后的数据保持了原数据部分特征结构,算法可快速实现,减小了计算误差。进一步从滤波的角度来说当用随机高斯时等价于对  $\mathbf{A}$  在空域组合后下采样。当用傅里叶阵时等价于在频域组合后下采样,因此是频域滤波的一种形式。从信息损失的观点来看,后者损失小于前者。从去噪的观点来看,频域滤波也比空域组合要好。下一节将给出具体的误差分析。

基于下采样随机傅里叶变换投影的低秩逼近方法如表 2 所示。

### 2.4 高斯随机投影与下采样随机傅里叶变换投影重构误差分析

我们知道,从已知的观测数据矩阵中,用奇异

表 2 基于下采样随机傅里叶变换投影的低秩逼近方法

<p><b>算法 2</b></p> <p>输入相似匹配块簇 <math>A \in R^{m \times n}</math>，正整数 <math>l</math></p> <p>(1) 产生 <math>n \times n</math> 对角阵 <math>D</math>，<math>n \times n</math> 单位离散傅里叶变换矩阵 <math>F</math>，<math>n \times l</math> 正态随机矩阵 <math>R</math> 随机矩阵构造式(2)定义的下采样随机傅里叶变换投影矩阵 <math>\Omega_1</math>；</p> <p>(2) 从矩阵 <math>A</math> 中构造矩阵 <math>Y = A\Omega_1</math>；</p> <p>(3) 正交化矩阵 <math>Y</math>，得到正交矩阵 <math>Q</math>；</p> <p>输出相似匹配块簇 <math>A</math> 低秩逼近矩阵 <math>B = QQ^*A</math></p>
--

值分解低秩逼近方法来重构一个具有秩为  $k$  的原数据矩阵时，能够达到最小的重构误差。假设原数据矩阵为  $A \in R^{m \times n}$ ，用奇异值分解方法得到的  $A$  的重构数据矩阵为  $B$ ，则重构误差可表示为

$$\min_{\text{rank}(B) \leq k} \|A - B\| = \sigma_{k+1} \quad (3)$$

其中  $\sigma_{k+1}$  表示  $A$  的第  $k+1$  个特征值。

式(3)表明用秩为  $k$  的数据矩阵  $B$  来逼近原数据矩阵  $A$  时，得到的最小重构误差为  $\sigma_{k+1}$ 。为比较下采样的随机傅里叶变换采样与高斯随机采样的差别，首先产生一个  $n \times (k+p)$  高斯随机矩阵  $\Omega_1$  和一个  $n \times l$  下采样随机傅里叶变换矩阵  $\Omega_2$ ，其中  $l = (k + \lg(n))\lg(k)$  [11]，然后从观测数据中构造样本矩阵  $Y_1 = A\Omega_1, Y_2 = A\Omega_2$ ，对  $Y_1, Y_2$  进行正交化处理后得到正交阵  $Q_1, Q_2$ ，于是得到两种随机投影重构误差的近似期望 [11]

$$E\|(I - Q_1Q_1^*)A\|_F \leq \left[1 + \frac{4\sqrt{k+p}}{p-1}\sqrt{n}\right]\sigma_{k+1} \quad (4)$$

其中  $p$  为一个松弛系数。

$$E\|(I - Q_2Q_2^*)A\|_F \leq \left[1 + \sqrt{3n/l}\right]\sigma_{k+1} \quad (5)$$

式(4)和式(5)表明两种投影方法的上界都和  $\sigma_{k+1}$  同阶，但  $\sigma_{k+1}$  前的系数不同。为便于进一步比较两种投影逼近最小重构误差的精度，我们取  $p = l - k = (k + \lg(n))\lg(k) - k$  即  $k + p = l$ 。可以看出式(4)，式(5)右端  $\sigma_{k+1}$  的系数为一个关于数据规模  $n, k$  的函数，分别为

$$f_1(n, k) = 1 + \frac{4\sqrt{k+p}}{p-1}\sqrt{n} \quad (6)$$

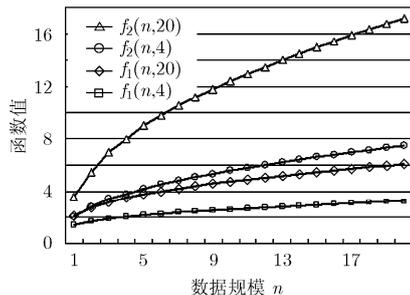


图 1  $f_1(n, k), f_2(n, k)$  函数值对比

$$f_2(n, k) = 1 + \sqrt{3n/l} \quad (7)$$

其中  $l = (k + \lg(n))\lg(k)$ 。由于

$$\frac{\left[\frac{4\sqrt{k+p}}{p-1}\right]\sqrt{n}}{\sqrt{3n/l}} = \frac{4\sqrt{k+p}\sqrt{n}}{\sqrt{3n/l}(p-1)} = \frac{4l}{\sqrt{3}(l-k-1)} > 1$$

所以  $f_1(n, k) > f_2(n, k)$ 。

图 1 给出了高斯随机采样与下采样随机傅里叶变换采样在  $k = 4, 20$  时，不同  $n, f_1(n, k)$  和  $f_2(n, k)$  的函数值。在取其它不同  $k$  的情况与图 1 相同。从图可以明显看出在投影阵维数相同的情况下， $f_1(n, k)$  的函数值比  $f_2(n, k)$  的函数值大，这说明下采样随机傅里叶变换比应用高斯随机采样更能精确逼近最小重构误差。

### 3 图像去噪算法与算法分析

#### 3.1 双边随机投影算法

算法 1 与算法 2 所列随机投影低秩逼近算法都是通过产生右投影阵来近似原相似匹配块簇，但是这种随机投影下对原数据的重构误差相对较大(见图 2)。为进一步逼近最小重构误差，本文提出一种将左投影与右投影结合对观测数据进行双边投影重构原数据的随机算法，称为相似匹配块簇的双边随机投影低秩逼近方法(表 3)。由实验数据(图 2)显示，采用双边随机投影后的观测数据来重构原数据能够达到比单边随机投影较小的重构误差。图 2 是观测图像“house”，“barbara”在不同噪声水平下对使用单边投影与双边投影后重构误差。对其它测试图像进行实验情形与图 2 相同。

表 3 相似匹配块簇的双边随机投影低秩逼近方法

<p><b>算法 3</b></p> <p>输入相似匹配块簇 <math>A \in R^{m \times n}</math>，正整数 <math>l</math></p> <p>(1) 分别产生 <math>n \times l, m \times l</math> 下采样傅里叶随机矩阵 <math>\Omega^1, \Omega^2</math>；</p> <p>(2) 从相似匹配块簇矩阵中构造矩阵 <math>Y_1 = A\Omega^1, Y_2 = A^*\Omega^2</math>；</p> <p>(3) 正交化矩阵 <math>Y_1, Y_2</math> 得到正交矩阵 <math>Q_1, Q_2</math>；</p> <p>输出相似匹配块簇 <math>A</math> 低秩逼近矩阵 <math>B = Q_1Q_1^*AQ_2Q_2^*</math></p>
--

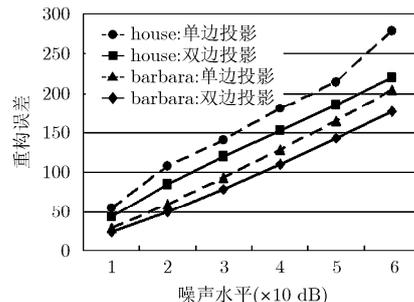


图 2 单边投影与双边投影重构误差对比

### 3.2 图像去噪算法

本文算法采用基于像素值的相似度评价函数  $\psi$  在搜索区域内搜索相似匹配块, 其中

$$\psi(s_k, s_0) = \prod_j \exp(F^{\rho_{s_k}}(j) - F^{\rho_{s_0}}(j))^2 \quad (8)$$

其中  $s_0$  表示被估计像素点,  $s_k$  表示  $s_0$  点相似匹配块的中心点,  $F^{\rho_{s_k}}(j), F^{\rho_{s_0}}(j)$  分别表示  $s_k, s_0$  的邻域块  $\rho_{s_k}, \rho_{s_0}$  中第  $j$  个像素点的像素值。

结合算法 2 和算法 3 给出非局部双边随机投影低秩逼近的图像去噪算法如表 4 所示。

表 4 非局部双边随机投影低秩逼近的图像去噪算法

算法 4
输入: 观测图像 $F$ , 总的迭代次数 $C$ , 初始估计图像 $\hat{F} = 0$ , 图像块重叠次数矩阵 $\mathbf{Num} = \mathbf{0}$ 投影阵维数 $k$ ; 整个算法迭代 $C$ 次, 若迭代次数小于 $C$ 次转到(1), 否则转到(4)。
(1) 搜索像素点 $p$ 的相似块, 形成点 $p$ 的相似匹配块簇矩阵 $A(p)$ 。
(2) 对矩阵 $A(p)$ 实行双边随机投影低秩逼近:
(2.1) 根据式(2)产生随机投影阵 $\Omega^1, \Omega^2$ ;
(2.2) 计算 $A_1 = A(p)\Omega^1, A_2 = A^*(p)\Omega^2$ ;
(2.3) 正交化 $A_1, A_2$ 得正交投影阵 $Q_1, Q_2$ ;
(2.4) $A(p) = U\Sigma V^T \approx Q_1 Q_1^* A(p) Q_2 Q_2^*$ ; 其中 $U, V$ 分别表示 $A(p)$ 的左奇异矩阵和右奇异矩阵, $\Sigma$ 表示 $A(p)$ 的奇异值矩阵。
(3) 用随机投影重构的数据矩阵 $Q_1 Q_1^* A(p) Q_2 Q_2^*$ 替代(1)中观测图像像素点 $p$ 相似匹配块簇 $A(p)$ 若观测图像中每个像素点 $p$ 处理完毕, 转到(4), 否则转到(1)。
(4) $\hat{F} = \hat{F} + \sum_p Q_1 Q_1^* A(p) Q_2 Q_2^*$ , $\mathbf{Num} = \mathbf{Num} + \sum_p \mathbf{Num}(p) + 1$ 。
(5) 输出: 去噪图像 $\tilde{F} = \frac{1}{\mathbf{Num}} \hat{F}$ 。

假设观测图像包括  $N$  个像素点, 每个像素点搜索到  $\alpha$  个大小为  $n \times n$  的相似匹配块, 本文算法涉及的随机投影阵的维数设为  $k$ , 整个算法迭代次数为  $C$ , 那么通过奇异值分解低秩逼近算法总的计算时间复杂度为  $O(CN\alpha^2 n^3)$ , 非局部双边随机投影低秩逼近算法总的计算复杂度为  $O(CN\alpha k^3)$ 。明显可以看出, 本文低秩逼近算法的计算复杂度低于奇异值分解低秩逼近方法计算复杂度。

$k$  的选择实际上确定了正则化的强度, 当  $k$  小时, 正则化强度大, 结果更光滑, 但离数据的误差也增大。本文对  $k$  的估计采用学习的方法(图 3)分别选取不同大小、不同类型的图像作为训练样本, 选择能够使得归一化均方误差(NMSE)最小的投影阵维数  $k'$  作为投影阵维数  $k$  的估计值。最后将  $k$  应用于标准测试图来分析本文算法去噪性能。根据文献[16]对视频图像处理表明, 当左右投影阵维数相等时, 即  $k_1 = k_2$  时, 能够达到该投影下的最小重构误

差。因此从误差角度令  $k = k_1 = k_2$ 。图 3 分别给出了训练图像在各种噪声水平下选取不同  $k$ , 应用本文算法去噪后的归一化均方误差。可以看出对于尺寸为  $512 \times 512$  图像, 选取  $k = 17$  时能够达到最佳的去噪效果, 对于尺寸为  $256 \times 256$  图像选取  $k = 16$  时能够达到最佳的去噪效果。在后面的实验中,  $512 \times 512$  测试图像我们取  $k = 17$ ,  $256 \times 256$  测试图像取  $k = 16$ 。

## 4 实验结果

本文算法实际去噪性能验证将分别在标准测图“barbara”, “lena”, “house”, “cameraman”上进行, 其中图像“barbara”, “lena”的大小为  $512 \times 512$ , “house”, “cameraman”的大小为  $256 \times 256$ 。实验主要包括本文算法采用单边随机投影和双边随机投影的图像重构误差对比; 采用高斯随机采样和下采样随机傅里叶变换后图像重构误差对比。点估计方法(NLM 方法)、图像块簇估计方法、BM3D 方法分别进行图像去噪数值实验结果对比。

本文对不同的测试图在不同噪声水平下使用上述采用高斯随机采样和下采样随机傅里叶变换的低秩逼近算法, 图 3 是不同尺寸训练图像在各种噪声水平下选取不同  $k$ , 应用本文算法去噪后的 NMSE。图 4 分别是测试图像“cameraman”, “house”被均值为 0, 噪声标准差为 30 的高斯白噪声污染后本文算法采用两种采样变换去噪后所得恢复图的 NMSE 对比结果。“○”代表高斯随机采样变换不同秩  $k$  下的 NMSE, “\*”表示随机傅里叶下采样变换不同秩  $k$  下的 NMSE。实验数据表明使用下采样随机傅里叶变换后所得到的重构图像更接近原图像。

表 5 给出了 BM3D 方法, NLM 方法(点估计方法), 与本文算法(块簇估计方法)对测试图在各种噪声水平下去噪后的峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)值和结构相似指数(Structural Similarity Index Metric, SSIM)值, 括号中的数值表示 SSIM 值。从具体数据来看, 相比于点估计的图像去噪方法(NLM), 本文方法(块簇估计方法)优势明显, 本文方法去噪图像的 PSNR 值和 SSIM 值都高于 NLM 方法。相比于 BM3D 方法, 除了图像“cameraman”外, 其它图像数值实验结果都与目前最好的去噪算法 BM3D<sup>[11,17]</sup>的数值持平或稍高。

图 5 进一步给出了使用 BM3D 方法, NLM 方法和本文算法对不同噪声水平下的带噪图像, “house”, “barbara”的去噪结果。图 6 给出了图像“lena”被噪声标准差为 20 的高斯白噪声污染后 BM3D 算法与本文算法去噪后的所提取的边缘效果图。从中可以看出, 相比于 NLM 方法, 本文算法

在去除图像噪声的同时较好地保持了原图的结构信息，很大程度上保留了原图像的细节信息。在视觉效果方面，本文所提算法要比 BM3D 算法有一定的优势，具体体现在对细节信息如边缘、结构等信息的保护，保持原有图像的光滑度，视觉效果。

图 7 给出了测试图像被噪声标准差为 30 的高斯白噪声污染后 BM3D 算法与本文算法去噪后的局部放大效果。从图可以反映出本文算法在保持原有图像光滑度，视觉效果方面的优势。与 BM3D 算法相比，本文算法去噪图像较好反映原有图像的结构信息，尤其是在强噪声污染的情况下。

### 5 结束语

本文提出了一种随机机制下的去噪算法，可有效的从被加性高斯噪声污染的退化图像中较好地恢复原图像。算法对相似匹配块簇进行双边随机投影，用投影后的低秩结构恢复原图像，最终达到去噪的目的。数值试验表明所提方法计算复杂度低，保证了较低的重构误差。和 NLM 方法相比，本文所提方法去噪充分，图像结构信息保持较好。和 BM3D 相比，所提方法能保持较好的视觉质量。

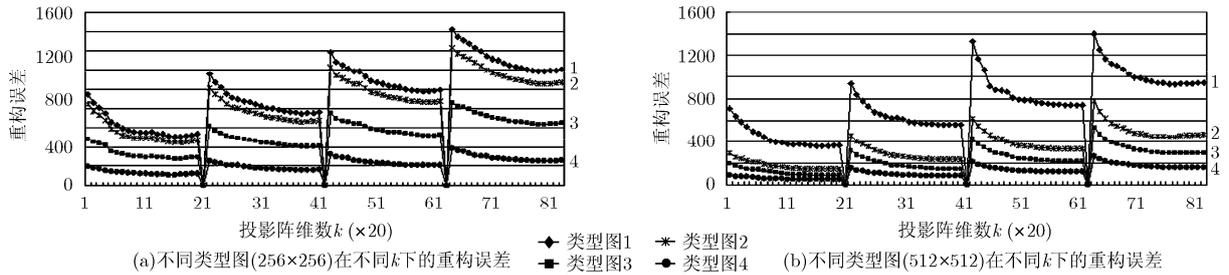


图 3 投影维数  $k$  与 NMSE 关系

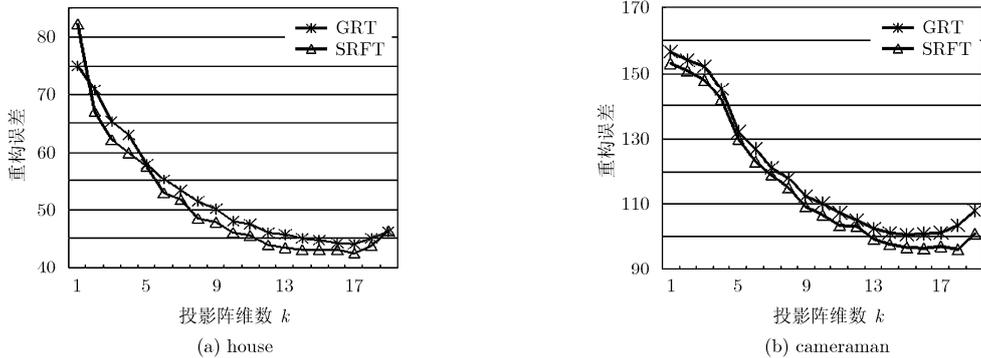


图 4 两种投影下的重构误差对比

表 5 峰值信噪比(结构相似指数)

噪声标准差		20	30	40	50
Cameraman 256 × 256	BM3D	30.48(0.88)	28.64(0.84)	27.18(0.79)	26.12(0.78)
	NLM	29.82(0.83)	27.84(0.74)	25.71(0.67)	24.39(0.61)
	本文算法	30.10(0.86)	28.34(0.82)	27.05(0.78)	26.03(0.75)
house 256 × 256	BM3D	33.77(0.87)	32.09(0.85)	30.65(0.82)	29.69(0.81)
	NLM	32.00(0.82)	29.37(0.75)	27.44(0.68)	25.99(0.62)
	本文算法	33.75( <b>0.87</b> )	32.07( <b>0.85</b> )	<b>30.76(0.83)</b>	<b>29.73(0.82)</b>
lena 512 × 512	BM3D	33.05(0.88)	31.26(0.84)	29.86(0.81)	29.05(0.80)
	NLM	29.13(0.79)	27.30(0.75)	26.18(0.72)	25.89(0.67)
	本文算法	32.89( <b>0.88</b> )	31.12( <b>0.84</b> )	<b>29.85(0.81)</b>	<b>28.85(0.80)</b>
barbara 512 × 512	BM3D	31.78(0.91)	29.81(0.86)	27.99(0.82)	27.23(0.79)
	NLM	29.23(0.84)	26.75(0.77)	25.10(0.70)	23.96(0.65)
	本文算法	<b>31.84(0.91)</b>	<b>29.81(0.87)</b>	<b>28.30(0.83)</b>	27.10( <b>0.79</b> )

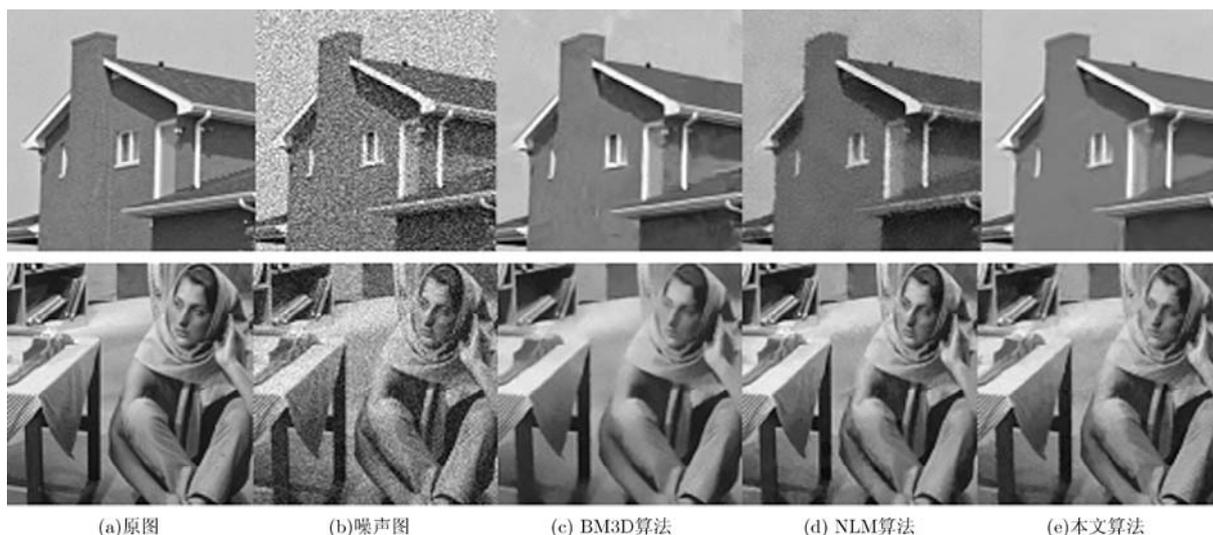


图 5 测试图在噪声标准差为 30,50 下各种方法去噪后的效果图

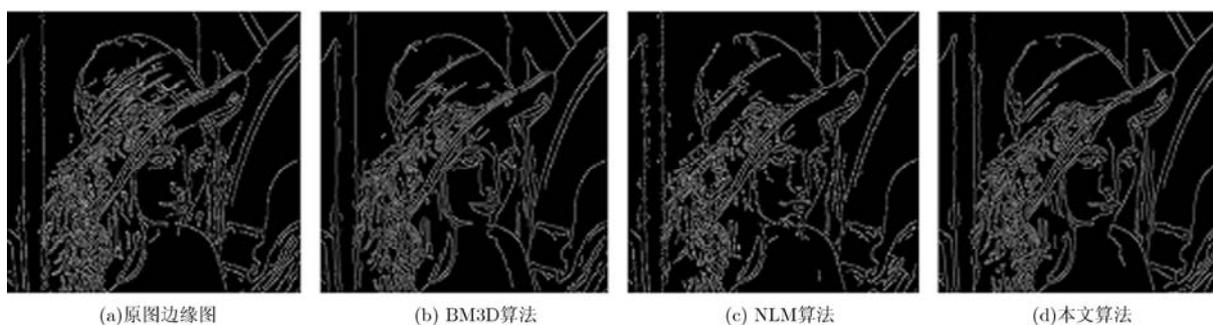


图 6 各种方法去噪后所提取的边缘效果图

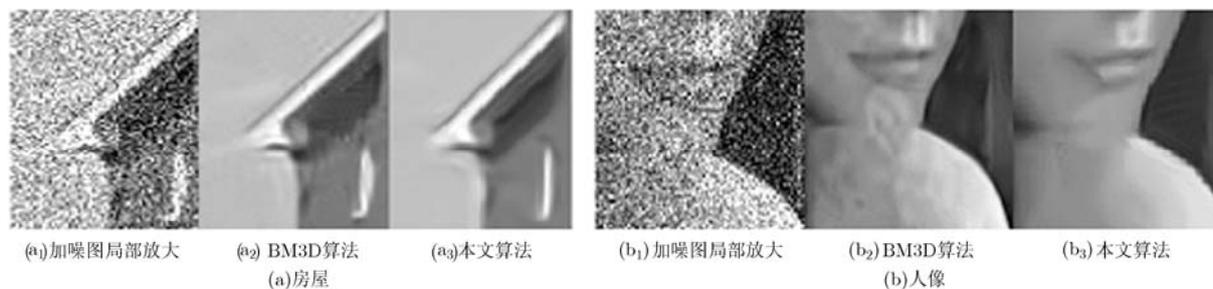


图 7 BM3D 算法与本文算法去噪后的局部放大效果图

## 参考文献

- [1] 张伟斌, 冯象初, 王卫卫. 图像恢复的小波域加速 Landweber 迭代阈值方法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(2): 342-346.  
Zhang Wei-bin, Feng Xiang-chu, and Wang Wei-wei. Accelerated Landweber iterative thresholding algorithm in wavelet domain for image restoration[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(2): 342-346.
- [2] 许建楼, 冯象初, 郝岩. 改进的 TV-Stokes 图像修复模型及其算法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34 (5): 1142-1147.  
Xu Jian-lou, Feng Xiang-chu, and Hao Yan. Improved TV-Stokes model and algorithm for image inpainting[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 34(5): 1142-1147.
- [3] 韩雨, 王卫卫, 冯象初. 基于迭代重加权的非刚性图像配准[J]. 自动化学报, 2011, 37(9): 1059-1066.  
Han Yu, Wang Wei-wei, and Feng Xiang-chu. Iteratively reweighted method based nonrigid image registration[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(9): 1059-1066.
- [4] 田云, 周明全, 段福庆, 等. 一种鲁棒的非均匀灰度图像分割算法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(6): 1401-1406.  
Tian Yun, Zhou Ming-quan, Duan Fu-qing, et al. A robust

- segmentation algorithm for images with intensity inhomogeneity[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(6): 1401–1406.
- [5] Vladimir Katkovnik, Alessandro Foi, Karen Egiazarian, *et al.* From local kernel to nonlocal multiple-model image denoising[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2010, 86(1): 1–32.
- [6] Benstein R. Adaptive nonlinear filters for simultaneous removal of different kinds of noise in images[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1987, 34(11): 1275–1291.
- [7] Lindenbaum M, Fischer M, and Bruckstein A. On gabor's contribution to image enhancement[J]. *Pattern Recognition*, 1994, 27(1): 1–8.
- [8] Wiener N. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*[M]. New York: Wiley, 1949: 81–120.
- [9] Alexei A Efros, and Thomas K Leung. Texture synthesis by non parametric sampling[C]. In Proceedings of International Conference on Computer Vision, Kerkyra, Corfu, Greece, 1999, 2: 1033–1038.
- [10] Buades A, Coll B, and Morel J M. Nonlocal image and movie denoising[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2008, 76(2): 123–139.
- [11] Dabov K, Foi A, Katkovnik V, *et al.* Image denoising by sparse 3D transform-domain collaborative ltering[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(8): 2080–2095.
- [12] Halko N, Martinsson P, and Tropp J. Finding structure with randomness: probabilistic algorithms for constructing approximate matrix decompositions[J]. *SIAM Review*, 2011, 53(2): 217–288.
- [13] Zhou T and Tao D. Godec: randomized low-rank & sparse matrix decomposition in noisy case[C]. In Proceedings of International Conference on Machine Learning, Bellevue, Washington, USA, 2011: 33–40.
- [14] Woolfe F, Liberty E, Rokhlin V, *et al.* A fast randomized algorithm for the approximation of matrices[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 25(3): 335–366.
- [15] Rauhut H. Compressive sensing, structured random matrices and recovery of functions in high dimensions[R]. In Oberwolfach Reports, 2010, 7: 1990–1993.
- [16] Liu Jun, Chen Songcan, Zhou Zhihua, *et al.* Generalized low rank approximations of matrices revisited[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(4): 621–632.
- [17] Manjon J V, Coupe P, Buades A, *et al.* New methods for MRI denoising based on sparseness and self-similarity[J]. *Medical Image Analysis*, 2012, 16(1): 18–27.
- 罗 亮： 男，1982 年生，博士，研究方向为变分方法、偏微分方程、低秩表示在图像处理中的应用。
- 冯象初： 男，1962 年生，教授，博士生导师，研究方向为多尺度几何分析、变分方法和偏微分方程在图像处理中的应用。
- 张选德： 男，1979 年生，博士，研究方向为变分方法、偏微分方程、低秩表示在图像处理中的应用。