

一种全局最小化的图像分割方法

李伟斌^{*①} 高 二^① 宋松和^{①②}

^①(国防科学技术大学理学院 长沙 410073)

^②(国防科学技术大学高性能计算国家重点实验室 长沙 410073)

摘 要: 曲线活动模型是图像分割中应用广泛且成功的一类模型,但由于能量泛函的非凸构造,使得其分割结果往往陷入局部解的困境。为了克服这一点,该文在已有的曲线活动模型之一——背景去除模型之上,从 Heaviside 函数的近似入手,提出了凸的能量泛函,并对其最小化,得到了相应全局最小解求解方程。实验表明,该方法分割结果准确,分割速度快,具有一定的抗噪性,且对初始曲线的位置选取无特殊要求。

关键词: 图像处理; 图像分割; 凸问题; 全局最小解

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)04-0791-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00759

A Global Minimization Method for Image Segmentation

Li Wei-bin^① Gao Er^① Song Song-he^{①②}

^①(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

^②(State Key Laboratory of High Performance Computing, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Active contour models are successfully and widely used in image segmentation. However, they always get local minima which make wrong segmentation results. In this paper, based on previous work named background removed model, a convex energy which is obtained by approximating the Heaviside function in the previous nonconvex energy is proposed. By minimizing it, the evolution equation is given. Experimental results show that the proposed method is accurate, fast and antinoise. Moreover, it is not sensitive to the location of the initial curve.

Key words: Image processing; Image segmentation; Convex optimization; Global minimization

1 引言

图像分割在图像处理和图像分析之间起着桥梁作用,它是图像处理中一项重要内容,也是一个难点问题。图像分割已被广泛应用于遥感和医学图像处理、目标追踪、文档图像处理、指纹识别等方面。近几十年来,图像分割应用越来越广,同时图像分割方法更是层出不穷,它们大都取得了很好的分割效果。

由于偏微分方程(PDE)方法和变分方法理论的成熟性,变分图像分割模型^[1-7]的研究已经成为近年来图像分割方法研究的热点。基于 PDE 和变分方法的图像分割模型有着不错的分割效果,但是它们基本都面临着陷入局部极小值的问题。产生这个问题的原因是大多数变分模型是关于非凸优化问题的求解,而且求解过程是受梯度驱动的,解会过多依赖于初始曲线的位置。

近年来,结合凸优化知识的全局分割方法^[8-12]

被提出并得到了发展。本文是文献[13]的一个延续,主要是应用凸优化的知识,从文献[13]中背景去除模型能量函数中重要的 Heaviside 函数的近似入手,提出全局最小解的求解方法,该方法仍然可以看作是一种水平集方法。多个数值实验说明了全局最优的图像分割方法的可行性和优越性。

2 背景去除模型

Chan-Vese(C-V)模型^[2]是基于水平集方法的图像分割经典模型之一,它以及后续的基于区域灰度信息的模型都是考虑曲线内外的灰度信息,可谓是立足找到使得内外区域灰度分别同一的曲线。

背景去除模型也是基于区域灰度信息的模型,它的基本出发点是分割出所给图像的背景区域,即分割出灰度相同(相近)前提下面积尽可能大的外部区域。由此可以看出背景去除模型不再像以前的大部分基于区域灰度信息的模型一样,把曲线内外区域保真度项作为构造能量函数的必须项,而是从外部的面积项和外部的保真度项入手,试图找到更有效的变分分割模型。背景去除模型的出发点可以表述为如下的优化问题:

2012-06-15 收到, 2012-12-31 改回

国家自然科学基金(91130013, 10971226, 11001270)资助课题

*通信作者: 李伟斌 liweibin@nudt.edu.cn

$$\left. \begin{aligned} \min_c F(C) &= -S(\Omega_1(C)) \\ \text{s.t.} \quad \int_{\Omega_1} |I - c|^2 dx dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 I 是图像灰度矩阵, C 是演化曲线, $\Omega_1(C)$ 和 $S(\Omega_1(C))$ 分别表示的是演化曲线的外部区域及其面积, c 表示的是演化曲线外部区域的灰度平均值。

结合 Lagrange 乘子法, 得到式(2)的能量函数:

$$L = F(C) + \mu \int_{\Omega_1} |I - c|^2 dx dy \quad (2)$$

其中 $\mu > 0$ 是 Lagrange 乘子。

现实中大多数图像都是含有噪声的图像, 如果用式(2)能量函数最小化过程对其进行分割, 那么最终得到的曲线将不光滑, 甚至得到错误的结果。为了保证演化曲线在演化的任意时刻都保持足够光滑, 给式(2)加上长度正则化项, 得到背景去除模型最终的能量函数如下:

$$\begin{aligned} E(C, c) &= L + \nu \cdot \ell(C) = -S(\Omega_1(C)) \\ &+ \mu \int_{\Omega_1} |I - c|^2 dx dy + \nu \cdot \ell(C) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\nu \geq 0$, $\ell(C)$ 是演化曲线 C 的长度。对于无噪声图像, 演化曲线不会受到噪声干扰, 因此为了减少计算量, 可取 $\nu = 0$ 。这里需要指出的是, 曲线长度项可以使得演化曲线更光滑, 但是并不能主导曲线演化的大方向, 因此对于无噪声图像, 也可取 $\nu > 0$ 。另外, 参数 μ 和 ν 的选取没有有效的办法, 只能在实验中人为地试验选取, 这也是几乎全部带参图像处理方法的通病。我们将在第4节实验部分讨论参数 μ 和 ν 的选取对图像分割结果的影响。

结合水平集方法, 式(3)可以转化为

$$\begin{aligned} E(\phi, c) &= -\int H(-\phi) dx dy + \mu \int (I - c)^2 H(-\phi) dx dy \\ &+ \nu \int |\nabla H(\phi)| dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

其中 ϕ 是水平集函数^[14], 其具有内正外负(或内负外正)的性质,

$$\phi(x, y) = \begin{cases} d_1, & (x, y) \in \Omega_2(C) \\ 0, & (x, y) \in C \\ -d_2, & (x, y) \in \Omega_1(C) \end{cases} \quad (d_1, d_2 > 0)$$

其中 $\Omega_2(C)$ 表示的是演化曲线的内部区域。 H 是 Heaviside 函数, 表达式如下:

$$H(d) = \begin{cases} 1, & d \geq 0 \\ 0, & d < 0 \end{cases}$$

对式(4)关于 c 求导, 可以得到曲线外部区域的灰度平均值 c 的表达式, 即

$$c = \frac{\int I \cdot H(-\phi) dx dy}{\int H(-\phi) dx dy} \quad (5)$$

视 c 为常数, 对式(4)关于 ϕ 求导, 可以得到其

相应的 Euler-Lagrange 方程, 再应用梯度下降流方法, 得到背景去除模型的水平集方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi) [-1 + \mu(I - c)^2 + \nu \cdot \kappa] \quad (6)$$

其中 $\delta(\phi) = H'(\phi)$ 是 Dirac 函数, $\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right)$ 。

由于 $\delta(\phi)$ 只在零点有非零值, 因此式(6)的演化速率较慢。为了加快演化速度, 用 1 代替 $\delta(\phi)$, 得到背景去除模型的最终水平集演化方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -1 + \mu(I - c)^2 + \nu \cdot \kappa \quad (7)$$

文献[13]中, 已经讨论了简单情况下 1 代替 $\delta(\phi)$ 的可行性。

3 全局最小化分割方法

在数值实验中, 用式(7)对水平集函数进行迭代更新, 能量函数取得了较快收敛速度, 曲线也很快稳定在目标的轮廓上。但是式(4)是关于 ϕ 的非凸函数, 这样就会导致局部极小值的产生, 而且式(6)到式(7)的转化, 并没有严格意义上的理论保证。本节将从 Heaviside 函数的近似入手, 找到与式(4)对应的凸的能量函数, 然后结合凸优化的相关知识, 导出本文方法求解全局最小解的演化方程。

3.1 凸优化问题的提出

在实际计算中, 式(4)中的 Heaviside 函数是不连续的, 因此一般用正则化的 Heaviside 函数近似它。但是由于近似函数与原函数的差别, 使得在实验中, 如果迭代循环无限次进行, 水平集函数就会一直变化, 即: $|\phi| \rightarrow \infty, (t \rightarrow \infty)$ ^[11]。

为了防止水平集函数无休止地发展, 我们将其限制在一定的闭区间上。由于水平集函数的 0 水平集表征的是演化曲线的位置, 因此我们在此取一个关于零点对称的闭区间, 不妨取 $[-1, 1]$ 。那么就得到如下的带限制条件的最小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{-1 \leq \phi \leq 1} E_1(\phi, c) &= -\int H(-\phi) dx dy \\ &+ \mu \int (I - c)^2 H(-\phi) dx dy \\ &+ \nu \int |\nabla H(\phi)| dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

可以看出式(8)中仍然没有应用正则化的 Heaviside 函数, 那么就无法进行迭代计算。本文用如下简单的线性函数近似它: $H_1(p) = \frac{1+p}{2}$, $p \in [-1, 1]$ 。则

式(8)的最小化问题转化为

$$\begin{aligned} \min_{-1 \leq \phi \leq 1} E_2(\phi, c) &= \int \frac{\phi - 1}{2} dx dy \\ &- \mu \int (I - c)^2 \frac{\phi - 1}{2} dx dy \\ &+ \nu \int \left| \nabla \left(\frac{\phi + 1}{2} \right) \right| dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)是一个关于函数 ϕ 的凸优化问题，存在全局解。通过以下的定理可以证明这种近似的合理性，而且能说明式(9)的最优解可以导出原背景去除模型式(3)的全局最小解。

定理 1 对于确定的常数 c ，假设 ϕ_0 是式(9)的一个最优解。那么对于几乎所有的 $\tau \in [-1, 1]$ ， $C = \{(x, y) | \phi_0(x, y) = \tau\}$ 是式(3)的全局最优解。

证明 令

$$u = (\phi + 1)/2 \tag{10}$$

那么式(9)中的能量函数转化为

$$\begin{aligned} E_3(u, c) &= \int (u - 1) dx dy - \mu \int (I - c)^2 (u - 1) dx dy \\ &\quad + \nu \int |\nabla u| dx dy = \int u dx dy \\ &\quad - \mu \int (I - c)^2 u dx dy + \nu \int |\nabla u| dx dy + U \end{aligned}$$

其中 $U = -\int 1 dx dy + \mu \int (I - c)^2 dx dy$ 可以看作是 与变量 u 无关的常量。

由式(10)可以得到 $u \in [0, 1]$ ，且 $C = \{(x, y) | u_0(x, y) = \tau', \tau' \in [0, 1]\}$ ，其中 $u_0 = (\phi_0 + 1)/2$ 。

这样该问题就转化为与文献[11]定理 2 类似的问题，其余证明过程与之相似。证毕

式(9)是限制在 $[-1, 1]$ 区间上的优化问题，可以通过在其补区间 $[-1, 1]^c (\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$ 上添加非线性惩罚项，使得函数 ϕ 在区间 $[-1, 1]^c$ 上的取值趋近于 -1 或 1 ，从而去掉式(9)的限制条件。本文加入的惩罚函数为

$$f(\phi) = \max\{0, |\phi| - 1\}$$

那么，式(9)可以转化为以下的凸优化问题：

$$\begin{aligned} \min \tilde{E}(\phi, c) &= \int \frac{\phi - 1}{2} dx dy - \mu \int (I - c)^2 \frac{\phi - 1}{2} dx dy \\ &\quad + \nu \int \left| \nabla \left(\frac{\phi + 1}{2} \right) \right| dx dy + \alpha \int f(\phi) dx dy \tag{11} \end{aligned}$$

式(11)便是本文方法最终的凸优化问题，求解它便能得到背景去除模型的全局解。

3.2 演化方程的推导

式(11)中最后一项是显式惩罚项，作用是把函数 ϕ 约束在 $[-1, 1]$ 上。但是 $f(\phi)$ 是分段连续不可导函数，因此用以下正则化的惩罚函数近似它。

$$f_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 0, & |\phi| \in [0, 1 - \varepsilon] \\ \frac{(|\phi| - 1 + \varepsilon)^2}{4\varepsilon}, & |\phi| \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon] \\ |\phi| - 1, & |\phi| \in [1 + \varepsilon, +\infty] \end{cases}$$

一般取 $\varepsilon = 0.1$ ， $f(\phi)$ 与 $f_\varepsilon(\phi)$ 的图像如图 1 所示。

应用正则化的惩罚函数 $f_\varepsilon(u)$ ，对式(11)关于 ϕ

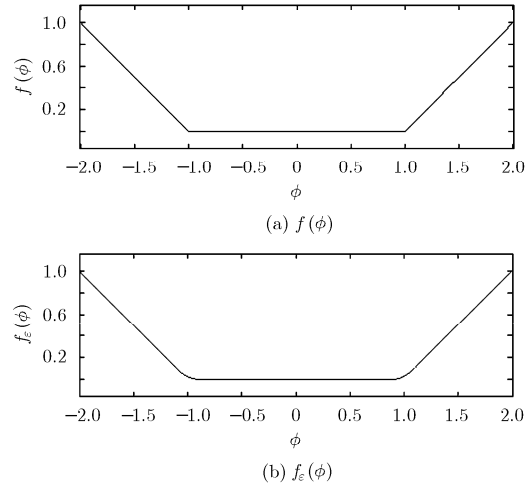


图 1 惩罚函数 $f(\phi)$ 及其正则化项函数 $f_\varepsilon(\phi)$ 示意图

求导，再应用梯度下降流方法，便得到与式(11)相对应的演化方程：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -1 + \mu(I - c)^2 + \nu \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - 2\alpha f'_\varepsilon(\phi) \tag{12}$$

由定理 1 知，对于几乎所有的 $\tau \in [-1, 1]$ ，曲线 $C = \{(x, y) | \phi(x, y) = \tau\}$ 可分割出待分割图像的目标。在实验中，为了更快更准确地得到分割结果，并且为了与水平集函数定义中内正外负的性质相对应，本文取 $\tau = 0$ ，那么曲线外部 ($\phi < 0$) 灰度平均值可以表示为

$$c = \frac{\int_{\phi < 0} I dx dy}{\int_{\phi < 0} 1 dx dy} \tag{13}$$

由于本文方法主要是求解凸优化问题，所以对初始曲线的选取没有太多要求。下面是其主要步骤：

- (1) 给定初始曲线。曲线内部 ϕ 取 1，外部取 -1 ；
- (2) 计算外部灰度平均值。应用式(13)计算；
- (3) 更新演化曲线位置。用式(12)更新 ϕ ，取

$C = \{(x, y) | \phi(x, y) = 0\}$ ；

- (4) 终止判断。判断 ϕ 是否收敛，若收敛，迭代结束；否则回到步骤(2)。

4 数值实验

这一节我们对本文方法与文献[11]的方法进行了对比实验。另外，还讨论了参数 μ 和 ν 对分割结果的影响。所有实验，均取 $\Delta t = 0.01$ ，且对初始曲线的位置没有特殊要求。

图 2 是文献[11]和本文方法的分割结果对比。两幅图像均来自 Weizmann 图像库¹⁾。为了对比公平性，两个实验中两种方法均选用相同的初始曲线。图 2(a)为初始曲线，图 2(b)为文献[11]的分割结果，

¹⁾ Segmentation Evaluation Database: http://www.wisdom.weizmann.ac.il/vision/Seg_Evaluation_DB/dl.html

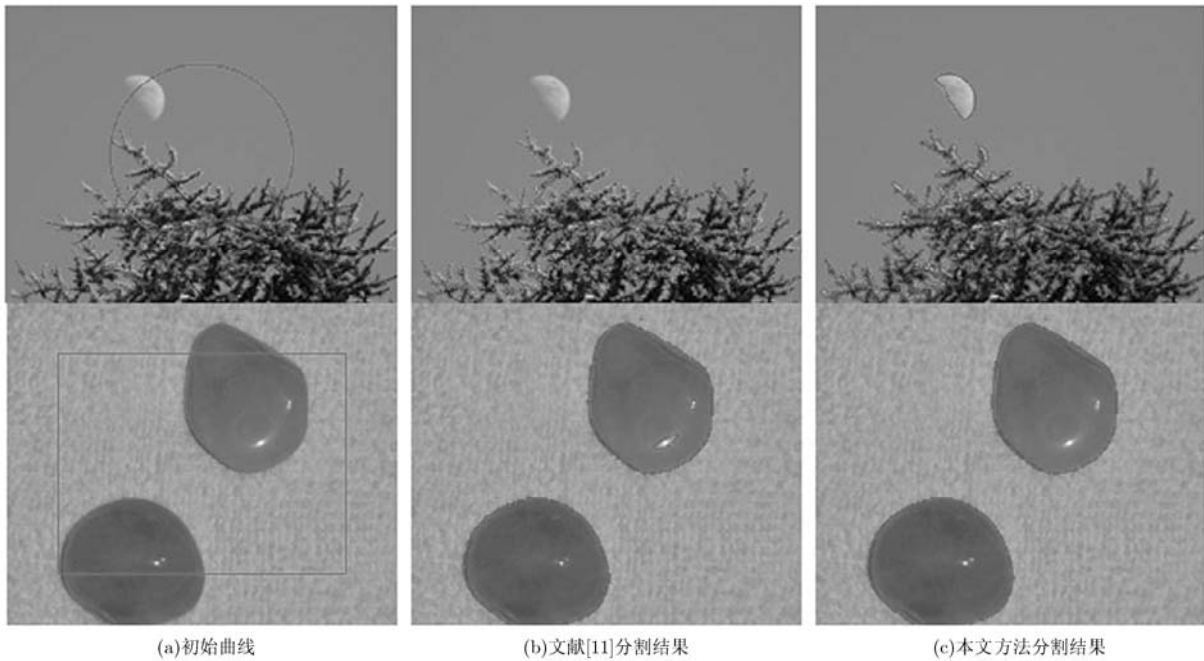


图 2 夜景和石头图像的分割结果对比

图 2(c)为本文方法分割结果。夜景图大体上由 3 个灰度不同的部分组成, 分别是月亮、天空和树, 从文献[11]的分割结果可以看出, 其没有正确分割出月亮和部分树梢, 而本文方法给出的分割结果更为准确。石头图由两部分组成, 石头和背景, 但是石头内部又存在反光的小块。文献[11]未能将石头整体分割出来, 而是将反光区域视为了背景的一部分。造成以上这两种结果的原因是: 文献[11]方法的重点是找到灰度差别较大的两个区域, 忽略了其他区域的存在性和目标的完整性, 比如忽略了月亮, 把石头的反光区域视为与其灰度较相近的背景部分。本文方法的出发点是找到灰度相同(相近)条件下面积尽可能大的背景区域, 图 2 中两幅图像的背景相对都比较单一, 这正符合本文方法的特点, 分割结果验证了本文方法构造的特点, 也体现了其优越性。为了量化比较分割结果, 表 1 给出了两种方法的分割精度(SA), 错误分割像素点数(NMC)以及本文参数。从表 1 中也可以看出本文方法具有更好的分割效果。

在图 2 石头图像分割中, 背景没有多余曲线存在, 且反光部分没有被视为背景的重要原因是曲线长度正则项的存在。在图 3 中, 我们试验了曲线长度正则项权重 ν 的取值对图像分割结果的影响。第 1 行至第 3 行分别是本文方法对无噪声人工合成图像、加了 $N(0, 25)$ 高斯白噪声后图像和加了 $N(0, 35)$ 高斯白噪声后图像的分割结果。图 3(a)至图 3(d)分别是 ν 取 0, 1.0, 1.5 和 3.0 的分割结果。从图中可以

看出, 对于完全无噪声图像, 长度正则项不会对分割结果产生太大影响, 只会使得边缘发生变化。而对于噪声图像, ν 取 0 或者过小都不会得到正确的分割结果。同时对于噪声大的图像, ν 的取值应较大。但是从图 3(d)可以看出, 如果参数 ν 取值过大, 就会使得曲线在尖角处收缩, 最终得到不完整的分割结果。

在问题式(1)中, 保真度项是约束条件, 因此它的不同权重将有可能带来不同的分割结果。图 4 中给出了不同保真度权重 μ 下的分割结果以及函数 ϕ 的示意图。从左至右参数 μ 分别为 $200/255^2$, $50/255^2$ 和 $20/255^2$ 。从第 1 行可以看出 μ 越小时, 保真度项的作用将会越小, 外部面积项的作用就会相应地越大。也就是说, 当 μ 越小时, 分割的重点将越会偏向于找到外部面积尽可能大的区域。这点也可以从第 2 行中函数 ϕ 的示意图得到验证, 当 μ 越来越小时, 演化曲线外部区域($\{(x, y) | \phi(x, y) < 0\}$)的面积越来越大。同时 ϕ 的示意图也验证了惩罚函数的作用, 即在无约束条件下将函数 ϕ 限制在 $[-1, 1]$ 上。从图 4(c)可以看出, 本文方法虽然正确分割出了飞机部分, 但是背景的灰度并不相同。这样的结果并不与本文方法矛盾, 主要是因为当 μ 取 $20/255^2$ 时, 保真度项的作用减小, 面积主宰了曲线的演化。其实从式(12)入手也可以找到产生这种结果的原因, 因为曲线外部区域的灰度平均值更接近于“黑”, 因此使得整副图像中, 偏“白”的飞机部分的 $(I - c)^2$ 值最大, 在参数 $\mu = 20/255^2$, $\nu = 0.5$, $\alpha = 50$ 共同

作用下，式(12)的右端只在飞机部分取值为正，其余部分取值为负。故经过数次迭代后，函数 ϕ 只在

飞机部分取值为正，这点也可以从图 4(c)中函数 ϕ 的示意图得到验证。

表 1 图 2 分割结果的定量对比

图像	文献[11]方法		本文方法				
	SA(%)	NMC	SA(%)	NMC	$\mu (\times 255^{-2})$	ν	α
夜景(300 × 225)	83.93	11042	91.44	5878	300	0.3	15
石头(300 × 248)	99.26	553	99.32	509	70	1.0	25

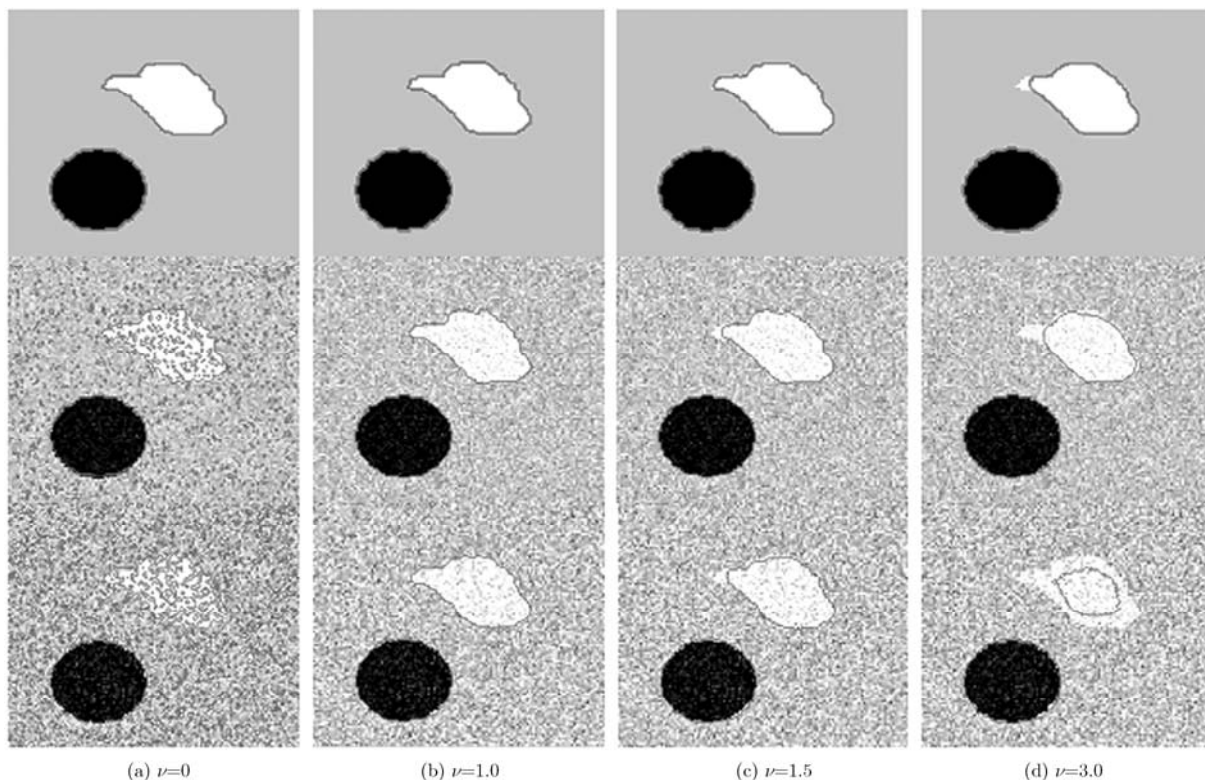


图 3 不同长度惩罚项权重 ν 对应的分割结果($\mu = 33 / 255^2, \alpha = 45$)

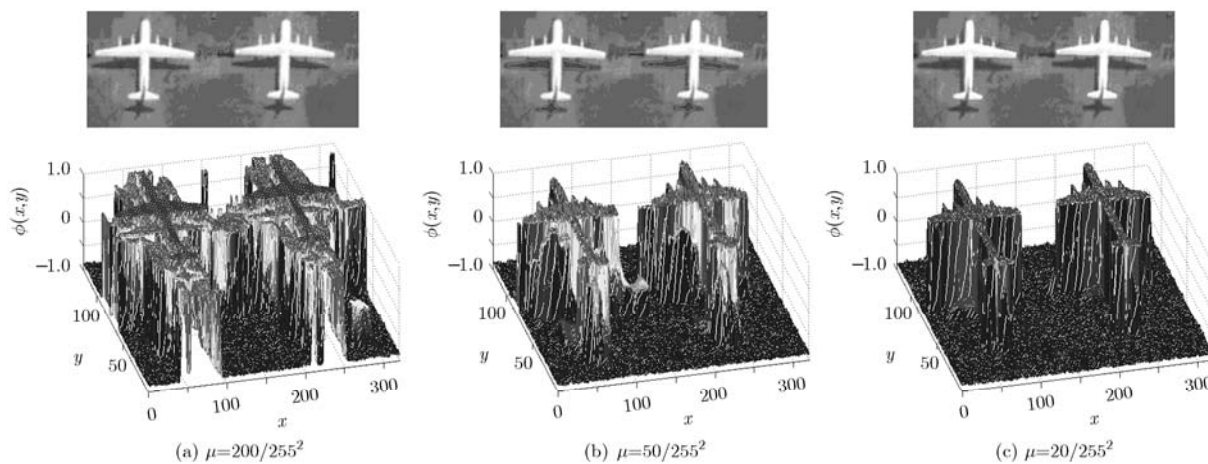


图 4 不同保真度项权重 μ 对应的分割结果($\nu = 0.5, \alpha = 50$)

5 结束语

大多数图像分割模型研究的是非凸的优化问题,并不存在全局解。基于前期的工作,本文从 Heaviside 函数的近似入手,提出了一种新的凸的能量函数。通过对其最小化,最终得到全局最小解,且从定理证明了这个全局最小解可以导出背景去除模型的最小解。数值实验表明,本文方法能快速准确分割人工合成图像和自然图像,具有一定的抗噪性。同时,该方法对初始曲线的位置无特殊要求。虽然本文分割方法和传统方法一样需要依靠经验选取参数,但是在本文的数值实验部分,本文详细讨论了参数对分割结果的影响,给出了选取参数的大致方向,这在一定程度上缓解了参数选取麻烦的问题。下一步研究的工作包括图像分割模型的参数自适应选取。

参 考 文 献

- [1] Vese L A and Chan T F. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford-Shah model[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2002, 50(3): 271–293.
 - [2] Chan T F and Vese L A. Active contours without edges[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(2): 266–277.
 - [3] 刘建磊, 冯大政. 一种基于二维拉格朗日连续水平集的图像分割方法[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(7): 1712–1716.
Liu Jian-lei and Feng Da-zheng. An image segmentation approach based on two-dimension Lagrange continuous level set[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(7): 1712–1716.
 - [4] Tao Wen-bing and Tai Xue-cheng. Multiple piecewise constant with geodesic active contours (MPC-GAC) framework for interactive image segmentation using graph cut optimization[J]. *Image and Vision Computing*, 2011, 29(8): 499–508.
 - [5] 田云, 周明全, 段福庆, 等. 一种鲁棒的非均匀灰度图像分割算法[J]. *电子与信息学报*, 2011, 33(6): 1401–1406.
Tian Yun, Zhou Ming-quan, Duan Fu-qing *et al.* A robust segmentation algorithm for images with intensity inhomogeneity[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(6): 1401–1406.
 - [6] Chung G and Vese L A. Image segmentation using a multilayer level set approach[J]. *Computing and Visualization in Science*, 2009, 12(6): 267–285.
 - [7] Jeon M, Alexander M, Pedrycz W, *et al.* Unsupervised hierarchical image segmentation with level set and additive operator splitting[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2005, 26(10): 1461–1469.
 - [8] Yang Yun-yun and Wu Bo-ying. Split Bregman method for minimization of improved active contour model combining local and global information dynamically[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, 389(1): 351–366.
 - [9] Yang Yun-yun and Wu Bo-ying. Convex image segmentation model based on local and global intensity fitting energy and split Bregman method[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, DOI: 10.1155/2012/692589.
 - [10] Gu Ying, Wang Li-lian, and Tai Xue-cheng. A direct approach toward global minimization for multiphase labeling and segmentation problems[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, 21(5): 2399–2411.
 - [11] Chan T, Esedoglu S, and Nikolova M. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, 66(5): 1632–1648.
 - [12] Bresson X, Esedoglu S, Vandergheynst P, *et al.* Fast global minimization of the active contour/snake models[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007, 28(2): 151–167.
 - [13] Li Wei-bin, Song Song-he, and Qian Xu. Active contours with selective local or global segmentation property for multiobject image[J]. *Optical Engineering*, 2011, 50(6): 067009.
 - [14] Osher S and Fedkiw R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces* [M]. New York: Springer Verlag, 2002: 4–22.
- 李伟斌: 男, 1985年生, 博士生, 研究方向为图像分割、变分方法和 PDE 方法。
高 二: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为 PDE 方法、再生核和变分方法。
宋松和: 男, 1965年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为 PDE 方法、图像处理 and 辛算法。