

基于凸优化的 Khatri-Rao 子空间宽带 DOA 估计

潘捷* 周建江

(南京航空航天大学电子信息工程学院 南京 210016)

摘要: 该文基于凸优化工具,提出一种新的 Khatri-Rao 子空间宽带到达角(DOA)估计方法。首先,利用 Khatri-Rao 子空间的概念,构造各频点的虚拟阵列导向矢量。再利用凸优化方法针对虚拟阵列导向矢量构造聚焦矩阵,从而利用虚拟阵列所增加的维数,在尽量减少聚焦对噪声影响的同时,获得良好的聚焦效果。仿真结果表明,相对于已有的 Khatri-Rao 子空间宽带 DOA 估计方法 FKR-RSS,该方法具有更好的估计精度和目标分辨力。对于信号源数大于阵元数的情形,该文方法优势更加明显。

关键词: 阵列信号处理; 波达方向估计; 宽带源; Khatri-Rao 子空间

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)01-0080-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00742

Khatri-Rao Subspace Wideband DOA Estimation Based on Convex Optimization

Pan Jie Zhou Jian-jiang

(College of Electronic Information and Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A convex optimization based Khatri-Rao subspace wideband Direction-Of-Arrive (DOA) estimation algorithm is proposed in this paper. First of all, the steering vectors of the virtual array are formulated with the Khatri-Rao subspace. And then these steering vectors of the virtual array are used to compute the wideband focusing matrix with convex optimization. Thanks to the increased dimensions of the virtual array, the proposed focusing matrix can minimize the distortion of the noise caused by the focusing procedure and maintain the good focusing performance as well. Simulations show that the proposed method performs better than the conventional Khatri-Rao subspace wideband DOA estimation algorithm: Focusing Khatri-Rao subspace-Rotational Signal Subspace (FKR-RSS) and when the number of sources is more than the number of sensors, the proposed method has more obvious superiority especially.

Key words: Array signal processing; Direction-Of-Arrive (DOA) estimation; Wideband source; Khatri-Rao subspace

1 引言

宽带信号源的波达方向估计是阵列信号处理中的重要问题,在雷达、声呐以及无线通信领域都有着广泛的应用。很多学者对此进行了大量的研究。

文献[1]提出的非相干信号子空间方法(Incoherent Signal-subspace Method, ISM)实现简单,但是分辨力差,低信噪比环境下性能不佳。为了解决上述问题,文献[2]提出了相干信号子空间方法(Coherent Signal-subspace Method, CSM),将不同频率上的阵列自相关矩阵聚焦到某个参考频率

上,从而采用传统的窄带方法实现宽带DOA估计,获得了良好的性能。在此基础上,文献[3]提出了一种介于相干与非相干处理之间的投影子空间正交性测试(Test of Orthogonality of Projected Subspace, TOPS)算法,该方法无需预估角,但其空间谱可能会出现伪峰。文献[4]提出一种鲁棒的自聚焦宽带DOA估计方法,通过迭代在避免角度预估的同时获得了良好的性能,但其计算量较大。文献[5]利用阵列自相关矩阵的奇异值分解计算聚焦矩阵,提出一种自聚焦的宽带DOA估计方法,但其性能不如传统的CSM类方法。文献[6]基于阵列接收数据合并提出了一种自聚焦宽带DOA估计方法。文献[7]提出了一种基于混合可逆跳转马尔可夫链蒙特卡罗方法(hybrid Reversible Jump Markov Chain Monte

2012-06-13 收到, 2012-09-27 改回

中航工业合作创新产学研基金(CXY2010NH15)和江苏高校优势学科建设工程基金资助课题

*通信作者: 潘捷 panjie1982@nuaa.edu.cn

Carlo, RJMCMC)的宽带信号DOA估计算法。

但是,上述方法均要求接收信号源数小于阵元数目。最近,文献[8]利用阵列自相关矩阵矢量化,提出了 Khatri-Rao 子空间概念,针对准平稳(Quasi-Stationary)窄带信号,讨论了信源数大于阵元数情况下的 DOA 估计问题。文献[9]基于 Khatri-Rao 子空间方法提出了一种准平稳窄带信号下的2维 DOA 估计方法。文献[10-12]则利用一些特殊的阵列结构,将 Khatri-Rao 子空间方法扩展到窄带平稳信号源的情形。

在此基础上,文献[13]将 Khatri-Rao 子空间概念应用于宽带 DOA 估计,提出了基于旋转信号子空间的 Khatri-Rao 子空间聚焦(Focusing Khatri-Rao subsapce-Rotational Signal Subspace, FKR-RSS)方法,与传统的 CSM 类方法相比提高了性能,而且能够处理信号源数大于阵元数情况下的 DOA 估计问题。但是该方法在信号源数大于阵元数时,存在性能下降的情况。

针对上述问题,本文提出了一种基于凸优化的 Khatri-Rao 子空间宽带 DOA 估计方法。首先,基于 Khatri-Rao 子空间概念,构造各频点的虚拟阵列导向矢量。再针对虚拟阵列导向矢量利用凸优化的方法构造聚焦矩阵,从而充分利用虚拟阵列所增加的维数,在尽量减少聚焦对噪声影响的同时,获得了良好的聚焦效果。仿真结果表明,相对于已有的 Khatri-Rao 子空间宽带 DOA 估计方法 FKR-RSS,该方法具有更好的估计精度和目标分辨力。对于信号源数大于阵元数的情形,本文方法也更具优势。

2 信号模型

考虑由 N 个阵元组成的均匀线阵,阵元间距为 d , P 个远场独立平稳宽带信号源入射到天线阵,频率范围为 $[f_L, f_H]$,中心频率 $f_0 = (f_L + f_H)/2$ 。各目标到达角为 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P]$,则第 n 个阵元的接收数据可表示为

$$x_n(t) = \sum_{p=1}^P s_p(t - \tau_{np}) + \hat{n}_n(t), \quad 0 \leq t \leq L, \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

其中 $\{s_p(t)\}_{p=1}^P$ 为各宽带目标辐射信号, $\{\hat{n}_n(t)\}_{n=1}^N$ 为各阵元加性噪声。 L 为观测时间区间, $\{\tau_{np}\}$ 为第 p 个信号源对第 n 个阵元的传播时延。

将观测时间区间内的 $U = KJ$ 个采样点均匀划分成 K 个子段,采样频率为 f_s ,对每个子段作 J 点的离散傅里叶变换,则第 j 个频点的阵列接收数据为

$$\mathbf{X}(f_j) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, f_j)\mathbf{s}(f_j) + \mathbf{n}(f_j), \quad j = 1, \dots, J \quad (2)$$

其中 $f_j = (j/J)f_s$,且 $\mathbf{X}(f_j) \in \mathbb{C}^{N \times K}$, $\mathbf{s}(f_j) \in \mathbb{C}^{P \times K}$, $\mathbf{n}(f_j) \in \mathbb{C}^{N \times K}$, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, f_j) \in \mathbb{C}^{N \times P}$ 分别为在频率 f_j 上的阵列接收数据、目标原始信号、阵列加性噪声和阵列导向矩阵, $\mathbb{C}^{a \times b}$ 表示 $a \times b$ 维的复数空间。其中 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, f_j) = [\mathbf{a}(\theta_1, f_j), \mathbf{a}(\theta_2, f_j), \dots, \mathbf{a}(\theta_P, f_j)]$,

$$\mathbf{a}(\theta, f_j) = [1, e^{-j2\pi f_j d \sin \theta / c}, \dots, e^{-j2\pi(N-1)f_j d \sin \theta / c}]^T \quad (3)$$

为频率 f_j 上的阵列导向矢量, $(\bullet)^T$ 为矩阵的转置。

为简化问题,假设各阵元噪声为独立同分布的零均值平稳高斯白噪声,故噪声矢量 $\mathbf{n}(f_j)$ ($j = 1, \dots, J$) 的自相关矩阵均为 $\sigma^2 \mathbf{I}$,其中 \mathbf{I} 为单位阵。由于入射的 P 个宽带信号源相互独立,故各频点的目标原始信号自相关矩阵 $\mathbf{R}_s(f_j) = E\{\mathbf{s}(f_j)\mathbf{s}^H(f_j)\}$ 为满秩对角阵,即 $\mathbf{R}_s(f_j) = \text{diag}(\mathbf{d}_j) = \text{diag}([d_{j1}, d_{j2}, \dots, d_{jP}])$,其中 $(\bullet)^H$ 表示矩阵的共轭转置。

故阵列接收数据的自相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(f_j) &= E\{\mathbf{X}(f_j)\mathbf{X}^H(f_j)\} \\ &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, f_j)\mathbf{R}_s(f_j)\mathbf{A}^H(\boldsymbol{\theta}, f_j) + \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4)$$

根据文献[8]提出的 Khatri-Rao 子空间概念,可将式(4)矢量化:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_j &= \text{vec}[\mathbf{R}(f_j)] = [\mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}, f_j) \odot \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, f_j)]\mathbf{d}_j \\ &\quad + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I}) = \tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}, f_j)\mathbf{d}_j + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I}) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}, f_j) = \mathbf{A}^*(\boldsymbol{\theta}, f_j) \odot \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, f_j)$ 为 Khatri-Rao 子空间虚拟阵列导向矢量, \odot 表示矩阵的 Khatri-Rao 积, $(\bullet)^*$ 表示矩阵的共轭, $\text{vec}(\bullet)$ 为矢量化运算符,即若 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_P]$,则 $\text{vec}(\mathbf{A}) = [\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_P^T]^T$ 。

结合式(3),则 Khatri-Rao 子空间虚拟阵列的导向矢量 $\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}, f_j)$ 可以写成^[8]:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}, f_j) = \mathbf{G}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times (N-1)} & \mathbf{I}_N & & \\ \mathbf{0}_{N \times (N-2)} & \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_{N \times 1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{0}_{N \times 1} & \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_{N \times (N-2)} & \\ & \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_{N \times (N-1)} & \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N^2 \times (2N-1)} \quad (7)$$

\mathbf{I}_N 为 $N \times N$ 的单位阵, $\mathbf{0}_{N \times (N-1)}$ 为 $N \times (N-1)$ 维元素均为 0 的矩阵。 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) = [\mathbf{b}(\theta_1, f_j), \mathbf{b}(\theta_2, f_j), \dots, \mathbf{b}(\theta_P, f_j)] \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times P}$,其中

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\theta, f_j) &= [e^{j2\pi(N-1)f_j d \sin \theta / c}, \dots, e^{j2\pi f_j d \sin \theta / c}, 1, \\ &\quad e^{-j2\pi f_j d \sin \theta / c}, \dots, e^{-j2\pi(N-1)f_j d \sin \theta / c}]^T \end{aligned} \quad (8)$$

类似地,有

$$\text{vec}(\mathbf{I}) = \mathbf{G}\mathbf{e} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, 1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \end{bmatrix}^T$ 。注意到, $\mathbf{W} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} =$

$\text{diag}(1, 2, \dots, N-1, N, N-1, \dots, 2, 1)$, 令 $\bar{\mathbf{r}}_j = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{r}}_j$, 则

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_j &= \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}^T (\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}, f_j) \mathbf{d}_j + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I})) \\ &= \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) \mathbf{d}_j + \sigma^2 \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G}^T \text{vec}(\mathbf{I}) \\ &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) \mathbf{d}_j + \sigma^2 \mathbf{e} \end{aligned} \quad (10)$$

3 Khatri-Rao 子空间宽带聚焦

考虑第2节所述的信号模型, 将式(10)与式(2)比较, 则 $\bar{\mathbf{r}}_j$ 可以被看成一个虚拟阵列的“接收信号”。该虚拟阵列的导向矢量 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j)$ 为具有 $2N-1$ 阵元的均匀线阵, 故其虚拟孔径的维数为 $2N-1$, 大于阵列初始物理维数 N 。

因此, 与 FKR-RSS 方法中针对物理阵列导向矢量 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, f_j)$, 基于旋转信号子空间^[14]的宽带聚焦方法不同, 本文从式(10)所述的各频点虚拟阵列“接收信号” $\bar{\mathbf{r}}_j$ 出发, 针对虚拟阵列导向矢量 $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j)$ 构造宽带聚焦矩阵, 目的在于利用虚拟阵列所增加的维数, 减少聚焦误差, 从而有助于获得更好的算法性能。

构造聚焦矩阵 $\mathbf{T}_j \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times (2N-1)}$, 则对于频率 f_j 聚焦过程可表示为

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{T}_j \bar{\mathbf{r}}_j = \mathbf{T}_j \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) \mathbf{d}_j + \sigma^2 \mathbf{T}_j \mathbf{e} \quad (11)$$

其中 $\mathbf{T}_j = [\mathbf{t}_{1j}^H, \mathbf{t}_{2j}^H, \dots, \mathbf{t}_{(2N-1)j}^H]^H$, $\mathbf{t}_{ij} \in \mathbb{C}^{1 \times (2N-1)}$ 表示聚焦矩阵 \mathbf{T}_j 的第 i 行。令 $\tilde{\mathbf{t}}_{ij} = [\mathbf{t}_{ij}(1), \dots, \mathbf{t}_{ij}(N-1), \mathbf{t}_{ij}(N+1), \dots, \mathbf{t}_{ij}(2N-1)]$, 即 $\tilde{\mathbf{t}}_{ij}$ 为 \mathbf{t}_{ij} 去除第 N 个元素后形成的向量, 其中 $\mathbf{t}_{ij}(N-1)$ 表示向量 \mathbf{t}_{ij} 的第 $N-1$ 个元素。可以通过以下方法构造聚焦矩阵 \mathbf{T}_j 。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_j} \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \mathbf{T}_j \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_0) \right\|_F \leq \sqrt{P} \varepsilon \\ & \mathbf{T}_j \mathbf{e} \equiv \mathbf{e} \\ & \|\tilde{\mathbf{t}}_{ij}\|_2 \leq \delta, \quad i=1, 2, \dots, 2N-1 \end{aligned} \quad (12)$$

其中, 式(12)中的等式约束 $\mathbf{T}_j \mathbf{e} \equiv \mathbf{e}$ 是为了保证聚焦前后噪声矩阵保持不变。由于 $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \overbrace{0, \dots, 0}^{N-1}, \overbrace{1, 0, \dots, 0}^{N-1} \end{bmatrix}^T$,

因此要满足等式约束 $\mathbf{T}_j \mathbf{e} \equiv \mathbf{e}$, 就是要求 \mathbf{T}_j 的第 N 列等于 \mathbf{e} , 即等式约束 $\mathbf{T}_j \mathbf{e} \equiv \mathbf{e}$ 可以等价于

$$\mathbf{t}_{ij}(N) \equiv \mathbf{e}(i), \quad i=1, 2, \dots, 2N-1 \quad (13)$$

令理想情况下聚焦后的噪声矩阵 $\mathbf{g} = \mathbf{T}_j \mathbf{e} \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times 1}$, 结合式(13), 则

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(i) - \mathbf{e}(i)\|_2 &= \|\mathbf{t}_{ij} \mathbf{e} - \mathbf{e}(i)\|_2 = \|\mathbf{e}(i) + \tilde{\mathbf{t}}_{ij} \tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{e}(i)\|_2 \\ &= \|\tilde{\mathbf{t}}_{ij} \tilde{\mathbf{e}}\|_2 \leq \|\tilde{\mathbf{t}}_{ij}\|_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|_2 \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}(1), \dots, \mathbf{e}(N-1), \mathbf{e}(N+1), \dots, \mathbf{e}(2N-1)]$, $\|\cdot\|_2$ 表示向量的 2 范数。考虑到实际应用中有有限快拍

数的影响, 理想情况下噪声矩阵 \mathbf{e} 中的零元素在其估计值中一般不为零, 即 $\tilde{\mathbf{e}}$ 的估计值一般不为零向量。因此结合(14)可见, 为了尽可能减少聚焦过程对噪声的影响, 需要约束 $\tilde{\mathbf{t}}_{ij}$ 的范数, 如式(12)中的约束 $\|\tilde{\mathbf{t}}_{ij}\|_2 \leq \delta$ 所示。

故式(12)的优化问题可以写成

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{T}_j} \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \mathbf{T}_j \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_0) \right\|_F \leq \sqrt{P} \varepsilon \\ & \mathbf{t}_{ij}(N) \equiv \mathbf{e}(i), \quad i=1, 2, \dots, 2N-1 \\ & \|\tilde{\mathbf{t}}_{ij}\|_2 \leq \delta, \quad i=1, 2, \dots, 2N-1 \end{aligned} \quad (15)$$

考虑式(8), 则对于任意的频率 $f_j (j=0, 1, \dots, J)$, 有 $[\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j)]_N = \mathbf{1}_P$, 其中 $[\cdot]_m$ 表示矩阵的第 m 行, $\mathbf{1}_P = [1, \dots, 1] \in \mathbb{C}^{1 \times P}$ 。故从最小化聚焦误差 $\|\mathbf{T}_j \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_0)\|_F$ 考虑, 即要求 $\mathbf{t}_{Nj} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) = \mathbf{1}_P$ 。由于 $\mathbf{t}_{Nj}(N) = \mathbf{e}(N) = 1$, 所以 $\tilde{\mathbf{t}}_{Nj}$ 为零向量即满足要求。因此, 式(15)对 \mathbf{T}_j 的求解即转化为对 $\tilde{\mathbf{T}}_j = [\tilde{\mathbf{t}}_{1j}^H, \tilde{\mathbf{t}}_{2j}^H, \dots, \tilde{\mathbf{t}}_{(N-1)j}^H, \tilde{\mathbf{t}}_{(N+1)j}^H, \dots, \tilde{\mathbf{t}}_{(2N-1)j}^H]^H \in \mathbb{C}^{(2N-2) \times (2N-2)}$ 的求解。

$$\begin{aligned} \text{令 } \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}, f_j) &= [\tilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}_1, f_j), \tilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}_2, f_j), \dots, \tilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}_P, f_j)], \text{ 其中} \\ \tilde{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}, f_j) &= [e^{j2\pi(N-1)f_j d \sin \theta / c}, \dots, e^{j2\pi f_j d \sin \theta / c}, \\ & \quad e^{-j2\pi f_j d \sin \theta / c}, \dots, e^{-j2\pi(N-1)f_j d \sin \theta / c}]^T \end{aligned} \quad (16)$$

则式(15)中的优化问题可以等价于

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{T}}_j} \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \tilde{\mathbf{T}}_j \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}, f_j) - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}, f_0) \right\|_F \leq \sqrt{P} \varepsilon \\ & \|\tilde{\mathbf{t}}_{ij}\|_2 \leq \delta, \quad i=1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1 \end{aligned} \quad (17)$$

进一步地, 可以将式(17)的优化问题近似为

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{T}}_j} \quad & \|\tilde{\mathbf{T}}_j\|_F \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \tilde{\mathbf{T}}_j \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}, f_j) - \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}, f_0) \right\|_F \leq \sqrt{P} \varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)为一个凸优化问题, 采用 CVX 软件包即可求解^[15]。

则式(11)可以重写为

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{T}_j \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_j) \mathbf{d}_j + \sigma^2 \mathbf{T}_j \mathbf{e} \approx \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_0) \mathbf{d}_j + \sigma^2 \mathbf{e} \quad (19)$$

4 Khatri-Rao 子空间宽带 DOA 估计

将式(10)所示的各频点数据矢量并列于同一矩阵中, 令 $\bar{\mathbf{R}} = [\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2, \dots, \bar{\mathbf{r}}_J] \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times J}$, 则

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Y} + \sigma^2 \mathbf{e} \mathbf{1}_J^T \quad (20)$$

其中 $\mathbf{Y} = [\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_1) \mathbf{d}_1, \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_2) \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, f_J) \mathbf{d}_J] \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times J}$, $\mathbf{1}_J = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{C}^{J \times 1}$, 考虑上节所述的宽带聚焦矩阵 \mathbf{T}_j , 对虚拟阵列各频点的数据进行聚焦, 即令

$$\tilde{\mathbf{R}} = [\mathbf{T}_1 \bar{\mathbf{r}}_1, \mathbf{T}_2 \bar{\mathbf{r}}_2, \dots, \mathbf{T}_J \bar{\mathbf{r}}_J] \quad (21)$$

将式(19)代入式(21), 可得

$$\tilde{\mathbf{R}} \approx \mathbf{B}(\theta, f_0)\boldsymbol{\Psi} + \sigma^2 \mathbf{e}\mathbf{e}^T \quad (22)$$

其中 $\boldsymbol{\Psi} = [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_J]$, $\mathbf{1}_J = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{C}^{J \times 1}$ 。注意到噪声矩阵 $\mathbf{E} = \sigma^2 \mathbf{e}\mathbf{e}^T$ 各列是相同的。故可以用正交投影矩阵 $\mathbf{P}_{\mathbf{1}_J}^\perp = \mathbf{I}_J - (1/J)\mathbf{1}_J\mathbf{1}_J^T$ 将噪声消除, 则

$$\mathbf{R}^\perp = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{P}_{\mathbf{1}_J}^\perp = \mathbf{B}(\theta, f_0)\boldsymbol{\Psi}\mathbf{P}_{\mathbf{1}_J}^\perp + \sigma^2 \mathbf{e}\mathbf{e}^T \mathbf{P}_{\mathbf{1}_J}^\perp = \mathbf{B}(\theta, f_0)\boldsymbol{\Psi}^\perp \quad (23)$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}^\perp = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{P}_{\mathbf{1}_J}^\perp$ 。文献[13]指出, 由于大多数宽带信号的功率谱是不平坦的, 故当频点数 J 较大时, $\boldsymbol{\Psi}^\perp$ 行满秩。因此, 对 \mathbf{R}^\perp 作奇异值分解, 令 $\mathbf{U}_n \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times (2N-1-P)}$ 为矩阵 \mathbf{R}^\perp 作奇异值分解的 $2N-1-P$ 个最小奇异值所对应的左奇异矩阵, 则空间谱为

$$S(\theta) = \frac{1}{\mathbf{b}^H(\theta, f_0)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{b}(\theta, f_0)} \quad (24)$$

式(24)空间谱的谱峰即为各目标的到达角。

综上所述, 将本文算法流程简述如下:

(1) 从阵列接收数据出发以离散傅里叶变换计算式(2)中的频域数据 $\mathbf{X}(f_j)$ ($j = 1, \dots, J$), 并以式(4)求得 $\mathbf{R}(f_j) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ($j = 1, \dots, J$)。

(2) 以式(10)将各频点自相关矩阵 $\mathbf{R}(f_j)$ 矢量化并求得 $\bar{\mathbf{r}}_j$, 再以式(18)计算聚焦矩阵 \mathbf{T}_j , 并由式(23)计算 $\mathbf{R}^\perp \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times J}$ 完成宽带聚焦。

(3) 对 \mathbf{R}^\perp 作奇异值分解求得 \mathbf{U}_n , 从而由式(24), 用 MUSIC 算法求得各目标到达角。

对本文方法的算法复杂度分析可以分聚焦矩阵构造与 DOA 估计两个部分讨论。其中聚焦矩阵构造计算量主要在求解式(18)的凸优化问题, 根据文献[12]的论述, 式(18)优化问题的算法复杂度为 $O[(2N-2)^3]$ 。DOA 估计步骤的计算量则主要在 \mathbf{R}^\perp 的奇异值分解, 算法复杂度为 $O[(2N-1)^3]$ 。而传统的 RSS^[14]方法无论聚焦矩阵构造还是 DOA 估计步骤算法复杂度均为 $O(N^3)$ 。可见, 与传统的 RSS 方法相比, 本文方法算法复杂度稍大, 但仍与其处于同一数量级, 特别是当阵元数较少时, 计算量的增加是有限的。

5 实验仿真

为了验证本文方法的有效性, 对几种宽带 DOA 估计算法的估计性能作了仿真实验研究。仿真 1 比较了本文方法, FKR-RSS^[13]和 RSS^[14]3 种算法在不同信噪比下的估计精度, 仿真 2 比较了本文方法, FKR-RSS 和 RSS 的分辨力, 仿真 3, 仿真 4 则讨论了目标个数大于阵元数的情形对本文方法与 FKR-RSS 的影响。

仿真 1 考虑 7 个全向阵元组成的均匀线阵, 阵元间距 $d = 0.5\lambda_0$ ($\lambda_0 = c/f_0$)。两个独立远场宽带信号源入射, 入射方位角分别为 $\theta_1 = -8^\circ, \theta_2 = 13^\circ$, 中心频率 $f_0 = 150$ MHz, 最高和最低频率分别为 $f_H = 200$ MHz, $f_L = 100$ MHz, 采样频率 $f_s = 500$ MHz。阵列输出信号 DFT 点数 $J = 64$, 每个频点的快拍数 $K = 50$, 重复实验 200 次, ε 取 10^{-3} , 定义信噪比

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{p=1}^P E \left\{ |s_p(t)|^2 \right\}}{\sum_{n=1}^N E \left\{ |\hat{n}_n(t)|^2 \right\}} \quad (25)$$

比较本文方法, FKR-RSS 和 RSS 在不同信噪比下的 DOA 均方根误差, 如图 1 所示。

可见, 本文方法估计精度优于 FKR-RSS 以及 RSS 方法。

仿真 2 考虑两个独立宽带信号源入射方位角为 $\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = 5^\circ + \delta$, 阵列结构及信号其他参数同仿真 1, 信噪比为 5 dB。令两目标的估计值分别为 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$, 如果 $|\hat{\theta}_1 - \theta_1|$ 和 $|\hat{\theta}_2 - \theta_2|$ 均小于 $|\theta_1 - \theta_2|/2$, 则认为该次估计成功分辨两目标。比较本文方法, FKR-RSS 和 RSS 在不同角度间隔 δ 下的目标分辨概率, 如图 2 所示。

可见, 本文方法分辨力优于 FKR-RSS 与 RSS 方法。

仿真 3 考虑 8 个与阵列处于同一平面的独立远场宽带信号源入射, 入射方位角 $\boldsymbol{\theta} = [-29^\circ, -19^\circ, -9^\circ, 1^\circ, 11^\circ, 21^\circ, 31^\circ, 41^\circ]$, 阵列设置与信号参数同仿真 1, 信噪比 5 dB。此时, 目标数大于阵元数目, 传统的 RSS 方法已无法正常工作。比较本文方法与 FKR-RSS 的空间谱, 如图 3 所示。

图中垂直虚线表示各目标真实到达角的位置。可见, 当目标数大于阵元数时, 本文方法谱峰更加清晰, 位置更加准确。

仿真 4 阵列结构与入射信号参数同仿真 3。定义 DOA 平均均方根误差 $\text{ARMSE} =$

$$\sqrt{E \left\{ \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P |\hat{\theta}_p - \theta_p|^2 \right\}},$$

重复实验 200 次, 比较本文方法与 FKR-RSS 在不同信噪比下的 DOA 平均均方根误差, 如图 4 所示。

可见, 当目标数大于阵元数目时, 本文方法估计性能优于 FKR-RSS。

6 结论

本文提出一种基于凸优化的 Khatri-Rao 子空间宽带 DOA 估计方法。与已有的 Khatri-Rao 子空

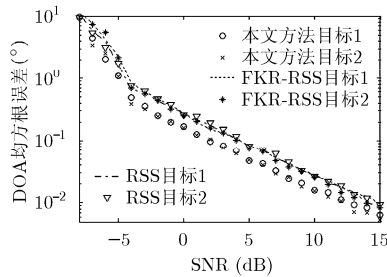


图1 双目标随信噪比变化的 DOA 估计均方根误差

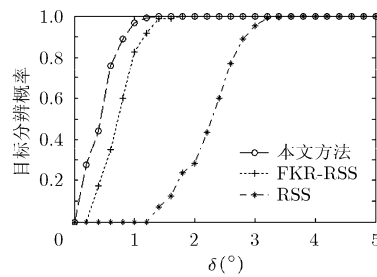


图2 随目标角度间隔变化的分辨概率

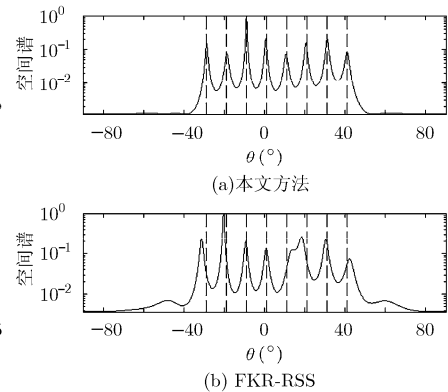


图3 两种算法的空间谱

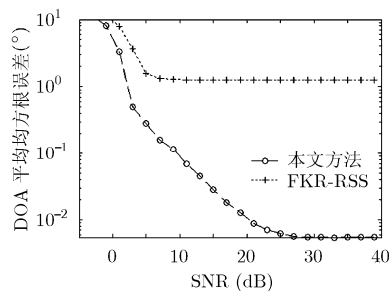


图4 不同信噪比下 DOA 的平均均方根误差

间宽带 DOA 估计方法 FKR-RSS 相比,在信号源数较少时,本文方法具有更好的估计精度和更高的目标分辨力。在信号源大于阵元个数的情况下,本文方法仍具有良好的估计性能,相对于 FKR-RSS 算法优势更加明显。而传统的 RSS 方法相比,本文方法通过增加有限的计算量,在估计精度,目标分辨力以及多目标处理能力方面获得了较为明显的性能优势。因此比较适用于阵元数目较少却需要处理较多信号源的应用场合。

参考文献

- [1] Wax M, Shan Tie-jun, and Kailath T. Spatio-temporal spectral analysis by eigenstructure methods[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1984, 32(4): 817-827.
- [2] Wang H and Kaveh M. Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wide-band sources[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1985, 33(4): 823-831.
- [3] Yoon Yeo-sun, Kaplan L, and McClellan J H. TOPS: new DOA estimator for wideband signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(6): 1977-1989.
- [4] Sellone F. Robust auto-focusing wideband DOA estimation[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(1): 17-37.
- [5] Pal P and Vaidyanathan P P. A novel autofocusing approach for estimating directions-of-arrival of wideband signals[C]. The 43th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, 2009: 1663-1667.
- [6] 刘春静, 刘枫, 张曙. 基于阵列接收数据合并的宽带 DOA 算

法[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(7): 1380-1383.

- [7] Liu Chun-jing, Liu Feng, and Zhang Shu. Wideband DOA algorithm based on combining of received array snapshots [J]. *System Engineering and Electronics*, 2010, 32(7): 1380-1383. 金美娜, 赵拥军, 盖江伟. 一种基于混合 RJMCMC 方法的宽带信号 DOA 估计方法[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(2): 504-508.
- [8] Jin Mei-na, Zhao Yong-jun, and Gai Jiang-wei. DOA estimation of wideband signals based on hybrid RJMCMC method[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(2): 504-508.
- [9] Ma Wing-Kin, Hsieh Tsung-Han, and Chi Chong-Yung. DOA Estimation of quasi-stationary signals with less sensors than sources and unknown spatial noise covariance: a Khatri-Rao subspace approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(4): 2168-2180.
- [10] Palanisamy P and Kishore C. 2-D DOA estimation of quasi-stationary signals based on Khatri-Rao subspace approach[C]. International Conference on Recent Trends in Information Technology (ICRTIT 2011), Chennai, 2011: 798-803.
- [11] Pal P and Vaidyanathan P P. Two dimensional nested arrays on lattices[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP2011), Prague, 2011: 2548-2551.
- [12] Pal P and Vaidyanathan P P. Nested arrays: a novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167-4181.
- [13] Rubsamam M and Gershman A B. Sparse array design for azimuthal direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(12): 5957-5969.
- [14] Feng D, Bao M, Ye Z, et al. A novel wideband DOA estimator based on Khatri-Rao subspace approach[J]. *Signal Processing*, 2011, 91(10): 2415-2419.
- [15] Hung H and Kaveh M. Focussing matrices for coherent signal-subspace processing[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1988, 36(8): 1272-1281.
- [16] Grant M and Boyd S. CVX: matlab software for disciplined convex programming, version 1.21[OL]. <http://cvxr.com/cvx/>, 2011.

潘捷: 男, 1982年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理。

周建江: 男, 1962年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为信号处理、目标特征的提取与控制。