

## 端接任意负载传输线的分步 CN-FDTD 分析方法

王 为\* 周东明 刘培国 覃宇建  
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘 要:** 为了高效精确地求解端接任意负载的传输线结构电磁瞬态响应, 该文提出了一种基于分裂时间步技术的 Crank-Nicolson (CN)-FDTD 方法, 通过理论分析证明了该方法具有无条件稳定特性。与混合单端口等效模型相结合, 有效地将传输线系统分解为分布参数子系统与集总电路子系统, 采用改进节点分析法(Modified Nodal Analysis, MNA)能够快速求解复杂终端电路网络。与以往瞬态分析方法相比, 该方法时间步长的选取不受稳定条件的限制, 且通过采用精细子时间步技术极大地削减了因大时间步长引入的色散误差。利用该方法计算双导体传输系统的电磁暂态响应, 计算结果表明该算法具有很好的稳定性, 在保证数值精度的基础上有效地提高了计算效率。

**关键词:** 传输线; 电磁瞬态分析; 非线性电路; 无条件稳定 FDTD; 分裂时间步; 改进节点分析

中图分类号: TN811

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)01-0209-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00658

## Transient Analysis of Transmission Line with Arbitrary Loads Based on the Split-step Crank-Nicolson-FDTD Method

Wang Wei Zhou Dong-ming Liu Pei-guo Qin Yu-jian

(School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A novel Crank-Nicolson (CN)-FDTD method based on the split-step scheme is proposed in this paper, so as to calculate the electromagnetic transients in transmission line with complex circuit terminals accurately and efficiently. An analytical proof of unconditional stability of the method is provided. Combined with the hybrid one-port equivalent model, the transmission system is decomposed into lumped and distributed portions independently. It can solve the time response of the complex circuit networks by utilizing the Modified Nodal Analysis (MNA) method. Unlike the former methods, the maximum time step size is not limited by the restriction of Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) stability constraint. In addition, the dispersion errors can be reduced by the precision sub-time-step scheme. The method is utilized to the transient analysis of the single transmission line. The results show that the proposed method provides higher efficiency and good stability under the same precision level.

**Key words:** Transmission line; Electromagnetic transient analysis; Nonlinear circuit; Unconditional stable FDTD; Split-time-step; Modified Nodal Analysis (MNA)

### 1 引言

传输线作为一种信号连接线, 常用于高速互联系统中。而随着微电子集成工艺技术的提高, 互联线结构的几何特征尺寸也越来越小甚至达到微米量级, 此时研究传输线的瞬态响应, 还需要考虑模拟问题的细微结构, 因而所取空间步长必须足够小。然而采用传统 FDTD 方法求解时, 受到 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 稳定性条件限制, 为了保证解的稳定, 时间步长也须相应地取得很小, 这将使计算的总时间量急剧增加, 甚至不可实现<sup>[1]</sup>。为了拓宽这种稳定性限制, 文献[2]中介绍了一种交替

方向隐式差分方法(ADI-FDTD), 虽然该方法具有无条件稳定特性, 但是在处理含有瞬变脉冲激励源或者含有非线性器件的传输线结构时, 大时间步长会引发强烈的数值振荡。文献[3,4]提出了一种基于精细时间积分的传输线瞬态分析方法, 其最大优点是采取半离散模型, 即在空间上离散, 在时间上积分, 能够消除稳定性限制, 达到满意的数值精度, 但是这种方法需要进行复杂的矩阵运算, 占用了大量的计算机内存, 同时由于该方法在处理传输线端口电路时, 需要进行数值积分, 当互联线终端接有复杂非线性电路时, 该方法是很难实现的。

CN-FDTD 方法是一种基于 Crank-Nicolson 方案的无条件稳定有限差分方法<sup>[5,6]</sup>。采用  $n$  时刻和  $n+1$  时刻的场量平均值近似替代中间时刻  $n+1/2$

2012-05-24 收到, 2012-10-17 改回

国家安全重大基础研究项目(613138)资助课题

\*通信作者: 王为 wangwei19841126@yahoo.com.cn

的场量值,得到隐式差分格式,其精度要远大于ADI-FDTD算法,但其时间步长受数值色散误差要求控制,因而一定程度上制约了计算效能。本文在此基础上,提出了一种分步1维CN-FDTD方法用于传输线瞬态分析,为了克服数值色散的影响,借助了精细积分方法中子时间步思想<sup>[7]</sup>,通过将一个大时间步分裂成多个子时间步来消减色散误差,有效地提高了数值精度。同时,为了解决端接复杂电路的传输线问题,与混合单端口等效模型相结合,对集总电路采用改进节点分析法实现快速求解。本文给出的数值仿真实例表明,该方法与传统方法精度一致,但计算效率大大提高。

## 2 基于分裂时间步技术的CN-FDTD方法

为了简便,考虑一单导体传输系统,在无外场激励的情况下,传输线满足式(1),式(2)电报方程:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + L \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + RI(x,t) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} + C \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + GU(x,t) = 0 \quad (2)$$

式中 $U(x,t)$ , $I(x,t)$ 分别为互联线上 $x$ 处在 $t$ 时刻的电压电流; $R,L,C,G$ 分别为单位长电阻、电感、电容以及电导参数。为了表述方便,联立式(1)和式(2),并写成如下矩阵形式:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{X} \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\frac{G(x)}{C(x)} & -\frac{1}{C(x)} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{1}{L(x)} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{R(x)}{L(x)} \end{bmatrix}$$

根据偏微分方程理论,式(3)的一般解为

$$\mathbf{X}(t) = \exp(\mathbf{M}t)\mathbf{X}(0) \quad (4)$$

将激励源作用时间 $t$ 分成时间步长为 $\Delta t$ 的若干时间间隔,则第 $n$ 时刻 $t^n = n\Delta t$ ( $n = 0,1,2,\dots$ ),而 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ 。于是由式(4)可以得到逐步递推的计算公式。

$$\mathbf{X}^{n+1} = \exp(\mathbf{M}\Delta t)\mathbf{X}^n \quad (5)$$

其中传递矩阵为一个包含时间的指数矩阵。由式(5)可知,只要求得该指数矩阵,在已知初始条件的情况下,可以方便地迭代计算出线上各点各个时刻的电压电流值。为了求解指数矩阵,借助于精细子时间步思想,并利用指数加法定理<sup>[7]</sup>,得到

$$\exp(\mathbf{M}\Delta t) = \left( \exp\left(\frac{\mathbf{M}\Delta t}{N}\right) \right)^N \quad (6)$$

式中 $N$ 表示一个大时间步长 $\Delta t$ 中,精细子时间步的数目。可以通过合适的选取 $N$ 值,来降低算法的数

值色散误差。

将式(6)代入式(5),并对其中的指数矩阵采用二阶Padé逼近,得到

$$\mathbf{X}^{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{II} + \frac{\mathbf{M}\Delta t}{2N} \\ \mathbf{II} - \frac{\mathbf{M}\Delta t}{2N} \end{pmatrix}^N \mathbf{X}^n \quad (7)$$

其中 $\mathbf{II}$ 为单位矩阵。值得注意的是,当 $N = 1$ 时,对式(7)进行数学变换得到

$$\frac{\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^n}{\Delta t} = \mathbf{M} \frac{\mathbf{X}^{n+1} + \mathbf{X}^n}{2} \quad (8)$$

可以看出式(8)即为传统的Crank-Nicolson(CN)差分格式,由于它是一种完全稳定的隐式算法,因而当时间步长取得较大时,会产生很大的色散误差。而当 $N > 1$ 时,式(7)中的有理函数将无限逼近于高阶Padé近似精度,例如当 $N = 2$ 时,指数矩阵可以写成

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{M}\Delta t) &= \frac{\mathbf{II} + \frac{\mathbf{M}\Delta t}{2} + \frac{(\mathbf{M}\Delta t)^2}{16}}{\mathbf{II} - \frac{\mathbf{M}\Delta t}{2} + \frac{(\mathbf{M}\Delta t)^2}{16}} \\ &\propto \frac{\mathbf{II} + \frac{\mathbf{M}\Delta t}{2} + \frac{(\mathbf{M}\Delta t)^2}{12}}{\mathbf{II} - \frac{\mathbf{M}\Delta t}{2} + \frac{(\mathbf{M}\Delta t)^2}{12}} \end{aligned} \quad (9)$$

即相当于无限逼近于四阶Padé格式。当 $N$ 取值越大时,对应逼近的Padé阶数越高,因而能够有效减小因时间步长取值带来的数值色散误差。但是当 $N$ 取值远大于1时,直接求解会引入复杂的矩阵运算,因而本文采用分裂时间步方法<sup>[8,9]</sup>,来降低求解复杂度。将求解过程,分解成 $N$ 个子过程,并对每一个子过程 $n + (k-1)/N \rightarrow n + k/N$ ,( $k = 1,2,\dots,N$ ),采用CN差分策略,则式(7)可以写成

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{II} - \frac{\mathbf{M}\Delta t}{2N} \right) \mathbf{X}^{n+\frac{k}{N}} &= \left( \mathbf{II} + \frac{\mathbf{M}\Delta t}{2N} \right) \mathbf{X}^{n+\frac{k-1}{N}}, \\ k &= 1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (10)$$

将矩阵 $\mathbf{M}$ 及矢量 $\mathbf{X}$ 代入式(10),并在空间上采用二阶中心差分,得到关于第 $k$ 个子时间步的电压电流迭代更新方程:

$$\begin{aligned} -\beta_u U_{m-1}^{n+k/N} + (1+2\beta_u)U_m^{n+k/N} - \beta_u U_{m+1}^{n+k/N} \\ = \gamma_u U_{m-1}^{n+(k-1)/N} - \alpha_u (I_m^{n+(k-1)/N} - I_{m-1}^{n+(k-1)/N}) \\ + \beta_u (U_{m-1}^{n+(k-1)/N} - 2U_{m-1}^{n+(k-1)/N} + U_{m+1}^{n+(k-1)/N}), \\ m = 1,2,\dots,N_x - 1 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} I_m^{n+k/N} &= \gamma_I I_m^{n+(k-1)/N} - \alpha_I (U_{m+1}^{n+k/N} - U_m^{n+k/N}) \\ &\quad - \alpha_I (U_{m+1}^{n+(k-1)/N} - U_m^{n+(k-1)/N}), \\ m &= 0,1,\dots,N_x - 1 \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\alpha_u = \frac{4NL\Delta t}{(2NC + G\Delta t)(2NL + R\Delta t)\Delta x}$$

$$\beta_u = \frac{\Delta t^2}{(2NC + G\Delta t)(2NL + R\Delta t)\Delta x^2}$$

$$\alpha_I = \frac{\Delta t}{(2NL + R\Delta t)\Delta x}, \quad \gamma_u = \frac{2NC - G\Delta t}{2NC + G\Delta t}$$

$$\gamma_I = \frac{2NL - R\Delta t}{2NL + R\Delta t}$$

当  $k$  取值从 1 到  $N$  时, 式(11)和式(12)即为基于  $N$  步分裂的 CN-FDTD 算法。由于在计算传输线上各点电压时, 式(11)对应的系数矩阵为三对角矩阵, 因而可以采用快速数值算法(追赶法)进行求解。然后将电压计算结果代入式(12), 从而可以直接得到该时步的电流解。因此在一个子时间步内, 只需求解一个隐式方程和一个显式方程。为了分析本文方法在引入多个子时间步时, 数学计算量的变化规律, 表 1 给出了取不同子时间步对应的算术因子数。

表 1 基于 CN 差分  $N$  步分解 FDTD 算法的算术因子数比较

		2步	4步	$N$ 步
		CN-FDTD	CN-FDTD	CN-FDTD
显示方程	加/减	8	16	$4 \times N$
	乘/除	6	12	$3 \times N$
隐式方程	加/减	16	32	$8 \times N$
	乘/除	12	24	$6 \times N$
总数	加/减	24	48	$12 \times N$
	乘/除	18	36	$9 \times N$

由表 1 可以看出, 在一个完整的时间步长内算术因子数随着子时间步线性增加。然而, 取子时间步越多, 对应的计算结果具有更高的数值精度, 这种低数值色散特性, 使得计算中可以采取更大的网格离散, 迭代时间步总数大大减少。因此, 总的来说采用  $N$  步 CN-FDTD 方法仅占用较少的计算资源及计算时间。

### 3 边界条件

在上一节中, 采用迭代方程式(11)和式(12)来求解传输线问题时, 还需要考虑终端边界条件的影响。而基于传统的端口戴维宁等效电路求解, 会随着终端电路的复杂度提升而变得效率低下, 因此本文构建了一种基于电路置换定理的混合单端口等效模型, 将传输线与电路分解成两个子系统, 对电路子系统采用改进节点分析法(MNA)进行求解。

#### 3.1 改进节点分析法(MNA)

对于复杂电路, 采用改进节点分析法(Modified

Nodal Analysis, MNA)是非常有效的, 著名的 SPICE 程序就是建立在 MNA 法的基础上。其基本思想是在节点电压法上加以扩展, 将电路变量由节点电位扩展到包含电感支路电流和独立电压源的电流<sup>[10]</sup>, 因而能够适用于绝大多数电路。对一个由线性电阻以及独立电压源、电流源组成的电路, MNA 可以表示成

$$\mathbf{Y}\mathbf{V}_j = \mathbf{Z}_j \quad (13)$$

其中  $j \doteq j\Delta t$  时刻,  $\mathbf{Y}$  表示由线性电阻组成的系数矩阵,  $\mathbf{V}$  为节点电压、电压源电流组成的未知矢量矩阵,  $\mathbf{Z}$  表示由独立电压源电压、独立电流源电流构成的常数矩阵。矩阵维数等于非参考节点与电压源数之和。如果电路中存在非线性元件, 则式(13)变为如下形式:

$$\mathbf{Y}\mathbf{V}_j + \mathbf{Y}_j^{nl}(\mathbf{V}_j) = \mathbf{Z}_j + \mathbf{Z}_j^{nl}(\mathbf{V}_j) \quad (14)$$

其中  $\mathbf{Y}_j^{nl}$ ,  $\mathbf{Z}_j^{nl}$  分别对应式(14)左边项以及右边项的非线性效应。对于线性系统, 式(13)左边系数矩阵通常为对称稀疏矩阵可采用高斯-约旦法求解, 而对于非线性系统, 则需要采用牛顿-拉夫逊或拟牛顿法进行迭代求解。

#### 3.2 混合单端口等效模型

考虑一个传输线系统, 在线的近端, 由两个单端口网络 CKT 和 TL 连接组成(如图 1(a)), 其中 CKT 表示集总电路子系统, 而 TL 表示传输线分布参数子系统。若系统中各支路电压、电流均有唯一解, 且分别为  $u_s$  和  $i_s$ 。则根据电路置换定理, 首先, 子系统 CKT 可以用一个电压为  $u_1$  的受控电压源置换, 并与 TL 子系统相连, 定义流经该电压源的电流为  $i_1$ 。然后, 子系统 TL 可以通过一个电流为  $i_2$  的受控电流源置换, 并与 CKT 子系统相连, 定义加载在该电流源两端的电压为  $u_2$ 。对  $(n+k/N)\Delta t$  时刻, 采用 MNA 计算更新受控电压源  $u_1$ , 传递给 TL 子系统中的  $U_0^{n+k/N}$ , 利用 FDTD 方法实现线上各点电压电流的同步更新。同时, 采用 FDTD 计算得到的  $I_{1/2}^{n+k/N}$  传递给受控电流源  $i_2$ , 并代入到 MNA 电路方程, 实现 CKT 子系统中各个节点电压的更新。以此类推, 完成整个系统各个时刻的电压电流更新。需要注意的是, 考虑到 FDTD 方法对传输线采用间隔取点的方式进行离散, 因而在接口处, 需要引入一项等效电导来实现边界处的电压电流同步<sup>[11]</sup>, 即

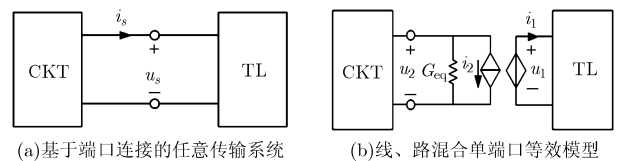


图 1 基于置换定理的传输线系统单端口网络等效示意

$$G_{\text{eq}} = \frac{N\Delta x}{2\Delta t}C + \frac{\Delta x}{2}G \quad (15)$$

其中  $C$ ,  $G$  分别表示传输线分布电容、电导。

通过上述方式, 我们构建了基于置换定理的混合单端口等效模型, 实现了基于 MNA 的电路分析方法与基于分步 CN-FDTD 算法的传输线求解器的有效搭接。详细的系统端口连接模型如图 1(b)。同理, 针对远端电路, 也可以建立相同的混合单端口模型, 只是对应的受控电流源电流方向为相反方向, 这也是为了保持电路对称性。

#### 4 数值稳定性及色散分析

为了分析本文方法的数值稳定性, 采用离散 Fourier 分析法<sup>[12]</sup>, 对每一个时间步  $n$ , 将空间节点上的瞬时电压  $U_x^n$ , 电流  $I_x^n$  通过 FFT 变换到空间谱域。定义沿着  $x$  轴向的波数为  $k_x$ , 则相应的空间谱域分量可以写成:

$$I_x^n = I_{x0} \exp(-j(k_x x - \omega n)) \quad (16)$$

$$U_x^n = U_{x0} \exp(-j(k_x x - \omega n)) \quad (17)$$

简单且不失一般性, 假设传输线为无损耗线, 即令  $R = 0, G = 0$ 。将式(16)和式(17)代入式(7), 可以得到

$$\mathbf{X}^{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{II} + \frac{\mathbf{M}'\Delta t}{2N} \\ \mathbf{II} - \frac{\mathbf{M}'\Delta t}{2N} \end{pmatrix}^N \cdot \mathbf{X}^n = \mathbf{A}\mathbf{X}^n \quad (18)$$

式中  $\mathbf{A}$  定义为增长矩阵, 其中  $\mathbf{M}'$  为包含空间波数、空间离散间隔以及单位长电容、电感参数的系数矩阵。根据矩阵理论, 可以将  $\mathbf{M}'$  分解成

$$\mathbf{M}' = \mathbf{Y}\text{diag}(\lambda_i)\mathbf{Y}, \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

其中  $\mathbf{Y}$  是  $\mathbf{M}'$  的特征向量而  $\lambda_i$  是  $\mathbf{M}'$  的特征值。借助 Maple 软件, 得到两个特征值:

$$\lambda_{1,2} = \pm j \frac{W_x}{\sqrt{LC}} \quad (20)$$

这里,  $W_x = \sin(0.5k_x \Delta x)/(0.5\Delta x)$ 。将式(19)代入式(18), 通过数学变换, 增长矩阵可以写成

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}\text{diag}(r_i)\mathbf{Y}^{-1}, \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

其中  $r_i$  为  $\mathbf{A}$  的特征值, 由矩阵理论得

$$r_i = \left( \frac{1 + \lambda_i \Delta t / (2N)}{1 - \lambda_i \Delta t / (2N)} \right)^N, \quad i = 1, 2 \quad (22)$$

将式(20)代入到式(22), 容易得到增长矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值为

$$r_{1,2} = \left( \xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2} \right)^N \quad (23)$$

其中  $\xi = a/b$ , 参数  $a$ ,  $b$  分别为  $a = 1 - \frac{\Delta t^2 W_x^2}{4N^2 LC}$ ,

$b = 1 + \frac{\Delta t^2 W_x^2}{4N^2 LC}$ 。显然,  $|r_{1,2}| = 1$ , 由式(18)可知, 增长矩阵  $\mathbf{A}$  模值恒为 1, 因此本文提出的分步 CN-FDTD 方法是完全稳定的。

为了进行数值色散分析<sup>[13]</sup>, 定义瞬时分量是一角频率为  $\omega$  的单色平面波, 即

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{X}e^{j\omega n \Delta t} \quad (24)$$

则式(18)在频域中满足:

$$\left( e^{j\omega \Delta t} \cdot \mathbf{II} - \mathbf{A} \right) \mathbf{X} = 0 \quad (25)$$

该方程组有非零解的条件是系数矩阵的行列式必须为零, 通过数学变换得到

$$\left( e^{j\omega \Delta t} - r_1 \right) \left( e^{j\omega \Delta t} - r_2 \right) = 0 \quad (26)$$

这里  $r_1, r_2$  是由式(23)给出的  $\mathbf{A}$  的特征值。求解式(26)得到该方法的数值色散关系为

$$tg^2 \left( \omega \frac{\Delta t}{N} \right) = \frac{1 - \xi^2}{\xi^2} \quad (27)$$

从式(27)中可以定量分析出时间步长对平面波相速的影响。定义波矢  $k$  沿线轴方向传播, 式(27)通过牛顿迭代法计算得到  $k$ , 用归一化相速度来表示数值离散带来的色散误差:

$$\text{err} = \frac{|\omega/c_0 - k_f|}{k_f} \times 100\% \quad (28)$$

其中  $c_0$  为自由空间光传播速度,  $k_f$  为牛顿迭代终值。定义 CFLN 为算法时间步长与满足 CFL 条件最大时间步长的比值。假设频率为 1 GHz 的平面波沿线传输, 定义波传播相速度为自由空间光速 ( $1/\sqrt{LC} = c_0$ ), 将传输线沿轴向等间隔离散, 取  $\Delta x = 6 \text{ mm}$ , 则根据式(28)可计算得到波在网格中传输的归一化相速误差。图 2 给出了在不同子时间步条件下, 归一化相速误差随 CFLN 的变化曲线。图中可以看出, 当  $N = 1$  时, 随着时间步长增加, 色散误差急剧增大, 这会给数值结果带来很大影响。而适当选取子时间步, 能够有效降低色散误差。图中 CFLN = 10, 子时间步取  $N = 4$  时, 与  $N = 1$  相比, 色散误差由最高 13.6% 降为不足 1%, 使数值精度得到明显的改善。

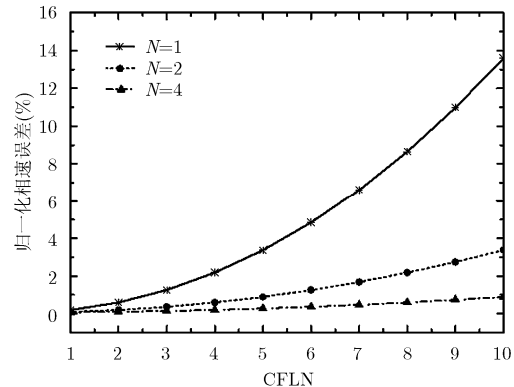


图2 不同子时间步下相速度误差对比图

### 5 数值算例

为了验证本文算法的优越性能，本节给出了几个数值算例，并与传统 FDTD 方法以及 PSPICE 仿真结果相比较，说明所提算法的高效性和准确性。此算法适用于多导线级联系统、非均匀线以及耦合多导体线，不失一般性，本节仿真中的传输线为双导体传输线系统。

**例 1** 考虑一个简单的传输线系统如图 3(a)，传输线长为 0.3 m，左端为  $t$ - $V$  梯形脉冲激励源，对应的上升/下降沿为 0.5 ns，脉宽为 0.5 ns。仿真中传输线在空间上取步长为 0.01 m，为了验证本文方法的准确性及高效率，采用传统 FDTD 方法以及本文方法分别进行计算，传输线终端电压响应结果如图 3(b)所示。

为了说明本文方法的优越性，我们选择大时间步长 0.5 ns，为传统 FDTD 所取步长 CFL 稳定条件限值的 10 倍。从图 3(b)中可以看到，由于本文算法稳定性好，同时有效地利用了子时间步技术，降低了因增大时间步长而引入的色散误差，因此计算结果与传统 FDTD 方法相比具有较好的一致性。两种方法采用的时间步以及所耗费的计算机内存及计算时间如表 2 所示。与传统 FDTD 相比，本文方法所耗费的内存略大，这主要是因为本文方法中 3 条带矩阵运算占用了一定的计算资源。然而，在相同计算平台(Intel 2.5 GHz 处理器)下，本文方法所耗费的 CPU 计算时间仅为 0.085 s 远小于传统 FDTD 方法的 0.353 s。因而与之相比，基于分裂时间步技术的 CN-FDTD 算法极大地提高了计算效率。

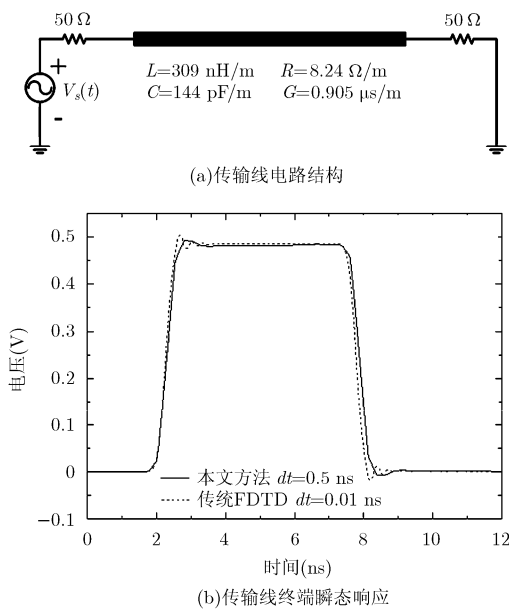


图 3 简单传输线系统瞬态分析

表 2 不同方法的仿真时长和所需内存

	$\Delta t$ (ns)	子时间步	总时间步	所需内存 (kb)	CPU 计算时间(s)
传统的 FDTD	0.05	\	240	2.080	0.353
本文方法	0.50	4	24	4.224	0.085

**例 2** 与 PITD 方法相比，本文方法能够方便处理终端含有复杂非线性电路的传输线问题。考虑一端接非线性负载的传输线<sup>[14]</sup>，相关电参数及电路结构如图 4(a)所示。左端激励源为一正弦电压源且满足  $V_s(t) = 10 \cos(2\pi ft)$ ，对应的激励源频率  $f = 1$  MHz。仿真时，将传输线等间隔离散为 20 段，并设置仿真最大时间为 20.78  $\mu$ s。

分析本文提出的方法所得的结果，与 PSPICE 仿真结果相比较。计算中 PSPICE 时间步长  $\Delta t$  为 0.752 ns，而本文提出的分裂时间步 CN-FDTD 方法，因  $\Delta t$  的选取不受稳定条件的限制，故分别取为 15.0 ns 和 75.2 ns 来计算。本文方法用 C#语言编程实现，而 PSPICE 借助 OrCAD 软件来实现。用不同方法计算的传输线终端时域响应如图 4(b)所示。为了能更加清晰显示各计算结果的差别，图中仅给出了前 5  $\mu$ s 的波形。考虑不同时间步长对计算结果精度的影响，将 PSPICE 仿真结果作为基准值，计

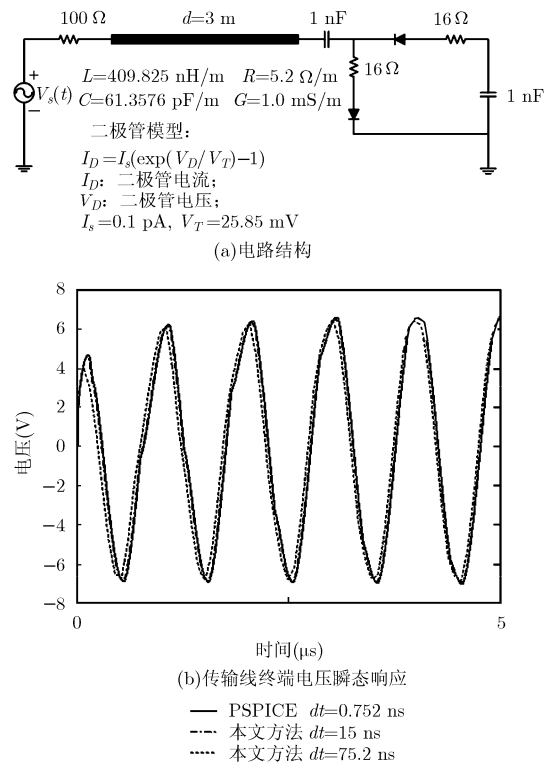


图 4 端接非线性负载的传输系统瞬态分析

算不同时间步长下负载终端电压最大值的相对误差和所耗费的计算内存及时间如表3所示。

表3 PSPICE与不同时间步长下本文方法的计算内存、相对误差和仿真时间

	$\Delta t$ (ns)	子时间步	总时间步	所需内存 (Mb)	相对误差 (%)	CPU 计算时间 (s)
PSPICE	0.752	\	27632	3.282	\	84.3
本文方法	15.0	140	1381	2.243	0.228	7.4
	75.2	680	265	2.309	1.507	7.0

由图3(b)和表3可以看出, 本文方法计算结果具有很好的数值稳定性, 并且与PSPICE仿真结果相比仍然保持合理的计算精度, 但是两者所耗费的内存和仿真时间并不相同。由于PSPICE是采用节点电压法求解传输线问题, 因而所需内存容量要大于本文方法。在计算效率方面, 本文方法采用大时间步长, 总的迭代时间步数远远小于PSPICE求解器, 其计算效率是软件仿真的近12倍。然而需要注意的是, 在本文方法中, 随着时间步长 $\Delta t$ 增大, 由于终端电路非线性效应, 以及受到色散误差影响, 计算结果相对误差也会随着增大。而为了减小这种数值色散的影响, 需要增加大量的子时间步, 这样一方面增加了计算机内存需求; 另一方面会降低计算效率。因此, 采用本文方法, 可以在保证计算精度的前提下适当地增大时间步长来提高计算效率。

## 6 结束语

本文提出采用精细时间步技术的CN-FDTD方法结合改进节点电压分析法, 计算端接任意复杂集总电路传输线中的电磁暂态过程, 并且以双导体传输线为例, 分析了其中的电压瞬态响应, 验证了本文方法的正确性。数值结果表明, 与传统FDTD以及PSPICE方法相比, 该方法计算时间步长不受稳定性条件限制, 具有更高的计算效率。

## 参考文献

- [1] 蒋乐乐. 高速集成电路互联的时域有限差分方法研究与性能优化[D]. [博士学位论文], 上海交通大学, 2008.  
Jiang Le-le. New study methodology of FDTD and performance optimization for interconnects in high speed integrated circuits [D]. [Ph.D. dissertation], Shanghai Jiao Tong University, 2008.
  - [2] 宋建辉, 袁峰, 丁振良, 等. 基于非条件稳定时域有限差分法的传输线瞬态分析[J]. 吉林大学学报, 2010, 40(5): 1438-1441.  
Song J H, Yuan F, Ding Z L, et al. Transient analysis of transmission lines based unconditional stable FDTD method [J]. *Journal of Jilin University*, 2010, 40(5): 1438-1441.
  - [3] Jia Lei and Guo J. Arbitrary-difference precise-integration method for the computation of electromagnetic transients in single-phase nonuniform transmission line[J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2008, 23(3): 1488-1494.
  - [4] Tang M and Mao J F. A precise time-step integration method for transient analysis of lossy nonuniform transmission lines [J]. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2008, 50(1): 166-174.
  - [5] Yang Y, Chen R S, Tang W C, et al. The unconditionally stable Crank-Nicolson FDTD method for three dimensional Maxwell's equations[J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2006, 48(8): 1619-1622.
  - [6] Yang Y, Chen R S, Wang D X, et al. Unconditionally stable Crank-Nicolson finite-difference time-domain method for simulation of three-dimensional microwave circuits[J]. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 2007, 1(4): 937-942.
  - [7] Bai Z M, Ma X K, and Sun G. A low-dispersion realization of precise integration time domain method using a fourth-order accurate finite difference scheme[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2011, 59(4): 1311-1320.
  - [8] Jongwoo L and Bengt F. A split step approach for the 3-D Maxwell's equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, 158(2): 485-505.
  - [9] Kong Y D and Chu Q X. High-order split-step unconditionally stable FDTD methods and numerical analysis[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2011, 59(9): 3280-3289.
  - [10] Reis T. Circuit synthesis of passive descriptor systems-a modified nodal approach[J]. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2010, 38(4): 44-68.
  - [11] Kordi B, LoVetri J, and Bridges G E. Finite-difference analysis of dispersive transmission lines within a circuit simulator[J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2006, 21(1): 234-242.
  - [12] Kusaf M and Oztoprak A Y. An unconditionally stable split-step FDTD method for low anisotropy[J]. *IEEE Microwave Wireless Component Letters*, 2008, 18(4): 224-226.
  - [13] Zhen F and Chen Z. Numerical dispersion analysis of the unconditionally stable 3-D ADI-FDTD method[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2001, 49(5): 1006-1009.
  - [14] Bagei H, Yilmaz A E, and Michielssen E. An FFT-accelerated time domain multiconductor transmission line simulator[J]. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2010, 52(1): 199-215.
- 王为: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为计算电磁学及电磁兼容。  
周东明: 男, 1976年生, 副教授, 博士, 从事计算电磁学及电磁兼容等研究。  
刘培国: 男, 1969年生, 教授, 博士生导师, 从事电磁兼容、电磁防护、生物电磁、目标与环境特性等研究。