

## 基于加权 WHT 的软判决序列快速估计算法

黄开枝 陈松\*

(国家数字交换系统工程技术研究中心 郑州 450002)

**摘要:** 利用 WHT(Walsh Hadamard Transform)进行 PN 序列估计,存在抗误码性能不足、受序列多项式抽头数限制等问题。针对这些问题,该文提出一种基于加权 WHT 的软判决序列快速估计算法。首先,对硬判决容错似然限、多项式抽头数制约因素进行理论分析。然后,将序列软信息引入到序列频次系数中提高估计性能;对 Walsh Hadamard 矩阵进行列加权处理,改变矩阵二元元素性质,降低多抽头对估计性能的影响。同时,进行序列控制状态选择,将多抽头多项式转化为少抽头多项式进行估计。仿真结果表明,该算法性能较 WHT 算法性能提高约 1.5 dB,基本不受估计多项式抽头和阶数限制。

**关键词:** 信号处理; PN 序列; 软信息; Walsh Hadamard 变换(WHT); 控制状态

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)01-0074-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00631

## A Soft Fast Estimation Method of PN Sequence Based on Weighting Walsh Hadamard Transform (WHT)

Huang Kai-zhi Chen Song

(National Digital Switching System Engineering Technological Research Center, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** The issue of poor error-tolerance and polynomial taps restriction of Walsh Hadamard Transform (WHT) estimation method is studied and a novel soft fast PN sequence estimation algorithm based on weighting Walsh Hadamard Transform is proposed in this paper. Firstly, the theory analysis about error-tolerance likelihood bound of sequence hard-decision and restrictive factor of estimation polynomial taps is performed. Based on this analysis, the sequence soft information are taken to sequence frequency-coefficient to improve estimation performance, and the Walsh Hadamard matrix is column-weighted to change its binary property, which can decrease the polynomial taps influence to estimation performance. Meanwhile, the sequence control state are chosen to decrease the estimation polynomial taps in the essence. The simulation results show that the proposed method is irrelevant with the order and tapped number of generator polynomial, and its performance is improved 1.5 dB than WHT.

**Key words:** Signal processing; PN sequence; Soft information; Walsh Hadamard Transform (WHT); Control state

### 1 引言

扩频信号具有抗干扰能力强、低截获、保密性能好等优点,被广泛地应用于军事和民用技术领域<sup>[1]</sup>。但是这些优点给扩频信号的非配合接收提出了严峻挑战,其中 PN 序列多项式估计是待解决的关键问题之一。在低信噪比条件下,可利用的接收序列有限,且接收序列误码率高,如何利用有限的含错序列,准确估计序列生成多项式具有重要意义<sup>[2]</sup>。

目前,国内外 PN 序列多项式估计主要包括 3 类:基于代数理论估计<sup>[3,4]</sup>,基于高阶统计估计<sup>[5]</sup>,以及基于序列变换域特征估计<sup>[6]</sup>。其中,基于 Walsh Hadamard 变换(Walsh Hadamard Transform, WHT)的方法与二元域含错方程求解具有内在关

系,可以实现序列多项式的快速估计<sup>[7]</sup>。现有文献集中研究 WHT 变换存储量过大、计算复杂度高等问题<sup>[8-10]</sup>,少量文献也对 WHT 变换应用于纠错译码领域进行了研究<sup>[11,12]</sup>,但是直接用其进行低信噪比条件下的高阶多项式估计,仍存在以下问题:(1)算法在二元域上进行,硬判决损失大量序列信息,导致其容错性能较差,不能适应于低信噪比环境;(2)估计性能受多项式抽头数影响较大,当多项式抽头数较多时,估计成功率急剧下降,目前只能适用于 3 抽头多项式。

针对上述问题,本文提出了一种基于加权 WHT 的软判决估计算法(SWWHT)。首先,对 WHT 算法的本质问题进行分析,包括硬判决方程错误率似然限,序列误码率、多项式抽头数与方程错误率之间的关系等。在此基础上,将序列软信息引入到序列频次系数中,从而使得正确概率大的序列向量对

2012-05-23收到,2012-10-22改回

国家自然科学基金(61171108)资助课题

\*通信作者:陈松 chensong003@sohu.com

应的解空间权值增大，提高算法容错性能。为解决抽头数制约的问题，对 Walsh Hadamard 矩阵进行修正，引入列加权系数，改变多抽头系数和少抽头系数在 Walsh 变换谱中的比重平衡，同时利用序列控制状态降低估计多项式的抽头数。仿真结果表明 SWWHT 算法估计性能较 WHT 算法提高约 1.5 dB，容错性能基本不受估计多项式抽头数影响。

## 2 WHT 算法问题分析

设系统发送端 PN 序列为  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ,  $a_i \in (1, -1)$ , 序列生成多项式为  $g(x) = c_l x^l + c_{l-1} x^{l-1} + \dots + c_1 x + 1$ , 其中  $\mathbf{c} = [c_l, c_{l-1}, \dots, c_1, 1]$  为多项式系数。传输信道为 AWGN 信道。接收端解调器输出软信息为  $r' = [r'_0, r'_1, \dots, r'_{n-1}]$ , 硬判决序列为  $r = [r_0, r_1, \dots, r_{n-1}]$ ,  $r_i \in (1, -1)$ 。多项式估计问题即根据  $r$  或  $r'$  求解多项式系数  $\mathbf{c}$ ,  $r$  与  $\mathbf{c}$  满足方程关系如下：

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_{l-1} & r_l \\ r_1 & r_2 & \dots & r_l & r_{l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_l & r_{l+1} & \dots & r_{2l-1} & r_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_l \\ c_{l-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_l \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中  $\delta$  为信道传输造成的误差向量。当  $r$  与  $a$  完全一致时， $\delta = 0$ ； $r$  中错误序列越多， $\delta$  中非 0 项个数越多，方程求解越困难。

WHT 算法的本质是快速求解上述含错方程，根据 Walsh 变换谱识别最优多项式系数，算法步骤为：首先，将  $r$  进行  $l+1$  长度分组，组成  $N$  个硬判决方程系数向量  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}$ 。根据系数向量统计  $l+1$  维向量空间内  $2^{l+1}$  种向量出现的次数(序列频次系数)  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{2^{l+1}-1}]$ 。硬判决频次表达式为

$$\eta_k = \sum_{i=0}^{N-1} f(\mathbf{r}_i, k), \quad k = 0, 1, \dots, 2^{l+1} - 1 \quad (2)$$

其中硬判决函数为

$$f(\mathbf{r}_i, k) = \begin{cases} 1, & (\mathbf{r}_i)_{\text{dec}} = k \\ 0, & (\mathbf{r}_i)_{\text{dec}} \neq k \end{cases} \quad (3)$$

即硬判决向量  $\mathbf{r}_i$  组成的十进制数与  $k$  相等时，向量空间中的第  $k$  个向量出现的频次为 1。

然后，构造 Hadamard 矩阵  $\mathbf{H}^{2^{l+1}} = [\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{2^{l+1}-1}]$  对  $\boldsymbol{\eta}$  进行 Walsh 变换，设变换谱系数为  $\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{2^{l+1}-1}]$ , 则

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{H}^{2^{l+1}} \quad (4)$$

由于  $\mathbf{H}^{2^{l+1}}$  中元素由 1, -1 组成，且遍历了所有解向量，因此 Walsh 变换谱与方程解的关系为： $\mathbf{z}$  中第  $i$  个元素  $z_i$  表示以二进制向量  $\mathbf{i}_{\text{bin}}$  为解向量时，式(1)

方程成立个数与不成立个数之差<sup>[7]</sup>。令  $z_q = \max(z_0, z_1, \dots, z_{2^{l+1}-1})$ ,  $\mathbf{q}_{\text{bin}}$  即 WHT 估计得到的多项式系数  $\mathbf{c}'$ 。

### 2.1 WHT 硬判决容错性能分析

由式(4)可知，WHT 算法成功率依赖于  $\boldsymbol{\eta}$  的正确性， $\boldsymbol{\eta}$  中正确解向量对应元素值越大，估计成功率越高。

对于解向量空间  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_{2^l-1}]$  中的任意解向量  $\mathbf{v}_i$ , 设满足  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i = 0$  的全部正确系数向量集合为  $U$ ,  $U \cdot \mathbf{v}_i = 0$  组成的正确方程集合大小为  $2^l$ 。经过信道传输后， $U$  中部分系数向量错误，设含错系数向量集合为  $U'$ 。在正确解向量  $\mathbf{v}_i$  条件下， $U' \cdot \mathbf{v}_i$  中方程成立与不成立个数之差为

$$\begin{aligned} & (P(U' \cdot \mathbf{v}^T = 0 | \mathbf{v} = \mathbf{v}_i) - P(U' \cdot \mathbf{v}^T = 1 | \mathbf{v} = \mathbf{v}_i)) \cdot 2^l \\ & = (1 - 2p_w) \cdot 2^l \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $p_w$  为  $2^l$  方程中错误方程的概率(方程错误率)。

在错误解向量  $\mathbf{v}_j \in V (j \neq i)$  条件下，由于 Hadamard 矩阵各列的 1, -1 均匀分布， $U'$  中正确向量与  $\mathbf{v}_j$  的乘积 1, -1 均匀分布， $U'$  中错误向量与  $\mathbf{v}_j$  的乘积 1 与 -1 个数不定。因此， $U' \cdot \mathbf{v}_j$  中方程成立与不成立个数之差为

$$\begin{aligned} & (P(U' \cdot \mathbf{v}^T = 0 | \mathbf{v} = \mathbf{v}_j) - P(U' \cdot \mathbf{v}^T = 1 | \mathbf{v} = \mathbf{v}_j)) \cdot 2^l \\ & = (0.5(1 - p_w) + \lambda \cdot p_w - 0.5(1 - p_w)) \cdot 2^l \\ & = \lambda \cdot p_w \cdot 2^l \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\lambda \in [-1, 1]$ 。根据式(5)和式(6)，含错方程  $U' \cdot \mathbf{v} = 0$  正确与不正确的对数似然比为

$$L(U') = \lg \frac{P(\mathbf{v} = \mathbf{v}_i | U')}{P(\mathbf{v} = \mathbf{v}_j, i \neq j | U')} = \lg \frac{1 - 2p_w}{\lambda \cdot p_w} \quad (7)$$

满足  $L(U') > 0$  条件下的方程错误率似然限为

$$p_w < 1/3 \quad (8)$$

即：当接收序列构成的硬判决方程错误率小于 1/3 时，WHT 估计成功率为 100%；错误率大于 1/3 时，WHT 估计成功率随硬判决方程错误率的提高而降低。

### 2.2 多项式抽头数制约因素分析

由 0, 1 二元性质，在方程系数向量  $\mathbf{r}_i$  中，抽头系数 1 对应的位置发生奇数个错误时，方程错误；发生偶数个错误时，方程仍为正确。因此，单个方程错误率  $p_s$  可表示为

$$p_s = \sum_{i=1,3,\dots}^m C_m^i p^i (1-p)^{m-i} \quad (9)$$

其中， $p$  为序列误码率， $m$  为抽头数。由式(9)可知， $p_s$  与  $p$ ,  $m$  呈单调递增关系。根据二项分布， $N$  个方程中含有  $p_w \cdot N$  个错误方程的概率为  $C_N^{p_w \cdot N} p_s^{p_w \cdot N} \cdot (1-p_s)^{(1-p_w) \cdot N}$ , 当  $N$  足够大时，服从均值为  $p_s \cdot N$ ,

方差为  $p_s \cdot (1 - p_s) \cdot N$  的正态分布。因此, 在显著水平  $\alpha$  的条件下, 方程错误个数满足关系式:

$$P\left(\frac{p_w \cdot N - p_s N}{\sqrt{p_s(1-p_s)N}} \leq z_\alpha\right) = \alpha \quad (10)$$

即在显著水平  $\alpha$  的条件下, 方程错误率为

$$p_w \leq p_s + z_\alpha \cdot \sqrt{p_s(1-p_s)/N} \quad (11)$$

联立式(9), 式(11), 得到

$$p_w \leq \sum_{i=1,3,\dots}^m C_m^i p^i (1-p)^{m-i} + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1,3,\dots}^m C_m^i p^i (1-p)^{m-i} \left(1 - \sum_{i=1,3,\dots}^m C_m^i p^i (1-p)^{m-i}\right)}{N}} \quad (12)$$

图1给出了显著水平为0.9的条件下,  $p_w$  随  $p$ ,  $m$  变化的曲线。如图1所示, 当  $p_w$  为错误率似然限  $1/3$  时,  $m$  值越大, 序列误码率越小, 算法容错性能越差, 即 WHT 算法容错性能随抽头个数增大而急剧降低。

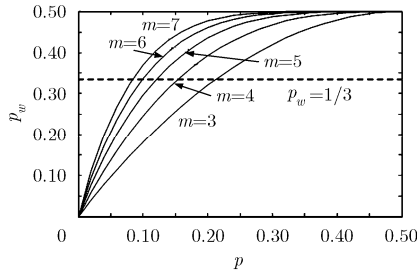


图1 不同抽头数对方程错误率影响曲线

综上所述, WHT 算法受序列硬判决和多项式抽头数影响较大, 在低信噪比条件下估计高阶、多抽头多项式性能较差。因此, 本文在 WHT 算法基础上, 提出 SWWHT 估计算法。首先采用软判决实现 WHT 估计, 使得正确判定序列向量的权重增大, 错误判定序列向量的权重减小, 从而达到提高估计性能。然后对 Walsh Hadamard 矩阵进行加权修正, 弥补多抽头多项式的估计损失, 同时根据序列控制状态, 减少估计多项式抽头数, 有效解决多抽头制约的问题。

### 3 SWWHT 估计算法

#### 3.1 软判决频次系数

根据式(2), 式(3), 当接收序列  $r$  均为硬判决 0, 1 序列时, 判决函数  $f(r_i, k)$  中只有 0, 1 取值,  $\eta$  不能反映判定概率的大小, 错误序列向量和正确序列向量在 Walsh Hadamard 矩阵中正确解的权重一致, 从而造成估计性能的损失。因此, 采用软判决

提高算法性能。

序列软信息可表示为信道输出为  $r_i'$  条件下  $a_i$  的最大似然比(LLR):

$$L(r_i') = \lg \frac{P(a_i = 1 | r_i')}{P(a_i = -1 | r_i')} = L_c \cdot r_i' + L(a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (13)$$

其中  $L_c = 4A_i E_c / N_0$  代表信道的可靠值,  $A_i$  是信道衰落幅度,  $E_c / N_0$  代表单个码片的信噪比(SNR)。  $L(a_i)$  是随机变量  $a_i$  的 LLR。

$$L(a_i) = \lg \frac{P(a_i = 1)}{P(a_i = -1)} \quad (14)$$

定义序列向量软判决函数

$$f_{\text{soft}}(r', k) = \begin{cases} L(r'_0) * L(r'_1) \cdots * L(r'_{n-1}), & r_{i,\text{dec}} = k \\ 0, & r_{i,\text{dec}} \neq k \end{cases} \quad (15)$$

其中, 算子  $*$  定义为:  $a * b = \text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b) \cdot \min(|a|, |b|) + \lg \frac{1 + e^{-|a+b|}}{1 + e^{-|a-b|}}$ 。代入式(3)中得到序列向量软判决频次系数为

$$\eta'_k = \sum_{i=0}^{N-1} f_{\text{soft}}(r'_i, k), \quad k = 0, 1, \dots, 2^{l+1} - 1 \quad (16)$$

软判决的本质是将序列软信息引入到序列频次系数当中, 使得正确率较大的序列向量与正确率小的序列向量在频次系数中占的比重得以区分, 从而使得正确概率大的序列向量对应的解空间权重增大, 利于从谱系数中识别正确解, 提高多项式估计成功率。

#### 3.2 加权 Walsh Hadamard 矩阵

对于固定接收序列样本  $r$ ,  $\eta$  值一定,  $\mathbf{H}^{2^{l+1}}$  中对应的第  $i$  个列向量为  $\mathbf{h}_i$ 。当  $i \neq j$  时, 若满足关系式:

$$\eta \cdot \mathbf{h}_i > \eta \cdot \mathbf{h}_j \quad (17)$$

则认为二进制向量  $\mathbf{i}_{\text{bin}}$  较  $\mathbf{j}_{\text{bin}}$  更具优势。因此, 令正确解向量在  $\mathbf{H}^{2^{l+1}}$  矩阵中对应列向量为  $\mathbf{h}_i$ , 算法成功率  $P$  可表示为

$$P = P(\eta \cdot \mathbf{h}_i > \eta \cdot \mathbf{h}_j, i \neq j) \quad (18)$$

由于在不同多项式抽头系数条件下, 方程错误率不同, 根据式(12), 可以计算抽头系数  $\mathbf{i}_{\text{bin}}$  条件下方程错误率为  $p_{w,i}$ 。  $\mathbf{i}_{\text{bin}}$  中 1 的个数越多,  $p_{w,i}$  越大。根据式(5), 式(6),  $\eta \cdot \mathbf{h}_i = (1 - 2 \cdot p_{w,i}) \cdot N$ ,  $\eta \cdot \mathbf{h}_j = \lambda \cdot p_{w,i} \cdot N$ , 算法成功率可表示为

$$P = P(1 - 2 \cdot p_{w,i} > \lambda \cdot p_{w,i}) \quad (19)$$

显然,  $p_{w,i}$  越大,  $1 - 2 \cdot p_{w,i}$  越小, 算法成功率越小。因此, 对式(18)进行修正, 补偿  $p_{w,i}$  增大造成的估计成功率损失。这里, 式(19)左右引入乘性因

子  $\alpha$ ,  $\beta$ , 满足  $p_{w,i}$  时增大时  $\alpha$  减小  $\beta$  增大, 修正算法成功率为

$$\begin{aligned} P' &= P(\alpha(1-2 \cdot p_{w,i}) > \beta \cdot \lambda \cdot p_{w,i}) \\ &= P(\alpha \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{h}_i > \beta \cdot \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{h}_j) \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)中,  $\alpha$ ,  $\beta$  可作为  $\mathbf{H}$  矩阵中列向量的加权系数。设  $\mathbf{H}^{2^{j+1}}$  中任意列向量  $\vec{h}_k$  的加权系数为  $\alpha_k$ , 代入式(20)中得到

$$P' = P\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j} > \frac{\lambda \cdot p_{w,i}}{1-2 \cdot p_{w,i}}, i \neq j\right) \quad (21)$$

其中  $\alpha_i$  为正确解列向量  $\mathbf{h}_i$  对应的加权系数,  $\alpha_j$  为  $\mathbf{H}$  矩阵中其他列向量。加权 Hadamard 矩阵可表示为

$$\mathbf{H}_w^n = [\alpha_0 \mathbf{h}_0, \alpha_1 \mathbf{h}_1, \alpha_2 \mathbf{h}_2, \dots, \alpha_{n-1} \mathbf{h}_{n-1}] \quad (22)$$

对于式(21): 当  $\mathbf{i}_{\text{bin}}$  中 1 的个数较多时(多抽头多项式),  $\frac{\lambda \cdot p_{w,i}}{1-2 \cdot p_{w,i}}$  较大, 需要增大  $\alpha_i/\alpha_j$  从而提高成功率  $P'$ ; 当  $\mathbf{i}_{\text{bin}}$  中 1 的个数较少时(少抽头多项式),  $\frac{\lambda \cdot p_{w,i}}{1-2 \cdot p_{w,i}}$  较小,  $\alpha_i/\alpha_j$  可以减小, 但其取值应在  $\frac{\lambda \cdot p_{w,i}}{1-2 \cdot p_{w,i}}$  附近, 否则  $P'$  也会降低。因此, 对  $\mathbf{H}$  中

任意列向量  $\mathbf{h}_k$  进行加权时, 加权系数  $\alpha_k$  应随  $\mathbf{k}_{\text{bin}}$  中 1 的个数增大而增大, 但不能无限增大。

理想情况下, 为保证少抽头数和多抽头数条件下算法估计正确率的一致性, 根据式(21),  $n$  阶 Walsh Hadamard 矩阵加权系数表达式如下所示:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ \rho_k / \rho_1, & k = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (23)$$

其中  $\alpha_1 = 1$ ,  $\rho_k = \sqrt{p_{w,k} / (1-2 \cdot p_{w,k})}$ 。

因此, 通过 Walsh Hadamard 矩阵进行加权修正, 改变多抽头系数和少抽头系数在变换谱中比重的平衡, 可以提升多抽头系数解向量在变换谱中的比重, 降低多抽头系数解向量在变换谱中的比重, 从而弥补多抽头系数产生较高方程错误率的估计损失。

### 3.3 序列控制状态选择

对 Walsh Hadamard 矩阵进行列加权, 虽然提高了多抽头系数多项式的估计性能, 但不能从根本上解决其多抽头系数造成方程高错误率的本质。当抽头数特别多时, 矩阵加权调整会降低少抽头多项式估计性能。针对抽头数特别多的情况, 需要从本质上降低估计多项式抽头数。

设  $\mathbf{S}_k = (a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1})$  是  $n$  阶多项式产生的第  $k$  时刻序列状态, 则第  $k+1$  时刻序列状态  $\mathbf{S}_{k+1} =$

$(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-1}) = \mathbf{S}_k \mathbf{T}$ , 其中  $\mathbf{T}$  为线性移位寄存器的状态转移矩阵, 表达式如式(24):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & c_n \\ 1 & 0 & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & c_1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

因此, 对于任意序列状态  $\mathbf{S}_i$  与  $\mathbf{S}_{i+j}$  ( $i, j$  为正整数)之间的关系为

$$\mathbf{S}_{i+j} = \mathbf{S}_i \mathbf{T}^j = [a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+n-1}] \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & c_n \\ 1 & 0 & 0 & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & c_1 \end{pmatrix}^j \quad (25)$$

令

$$[\mathbf{X}_{0+j}, \mathbf{X}_{1+j}, \dots, \mathbf{X}_{n-1+j}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & c_n \\ 1 & 0 & 0 & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & c_1 \end{pmatrix}^j \quad (26)$$

其中  $\mathbf{X}_{k+j} = [x_{k+j,0}, x_{k+j,1}, \dots, x_{k+j,n-1}]^T$ ,  $x_{k+j,i} \in \{0,1\}$ ,  $k \in \{0,1, \dots, n-1\}$ 。联立式(25), 式(26)得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_j &= (a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1+j}) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \\ &\quad \cdot [\mathbf{X}_{0+j}, \mathbf{X}_{1+j}, \dots, \mathbf{X}_{n-1+j}] \\ a_j &= (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot \mathbf{X}_j \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式(27)中,  $\mathbf{X}_j$  表示了初始序列状态  $\mathbf{S}_0$  和后续序列元素  $a_j$  之间的生成关系, 称之为控制状态。在 WHT 算法中, 依据控制状态  $\mathbf{X}_n$  进行估计。当  $\mathbf{X}_n$  中 1 的个数较多时, 估计性能较差。由于  $\mathbf{X}_j$  中的元素随  $j$  的变化组成伪随机序列<sup>[2]</sup>,  $\mathbf{X}_j$  中 1 的个数近似呈正态分布, 1 的个数特别少与特别多的概率均较小。因此, 当  $\mathbf{X}_n$  中 1 的个数较多时, 控制状态  $(\mathbf{X}_{n+1}, \mathbf{X}_{n+2}, \dots)$  中必然会出现 1 的个数比  $\mathbf{X}_n$  少的状态。

根据状态方程  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}^2$  得到  $\mathbf{X}_n$ ,  $\mathbf{X}_{n+1}$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_n &= [c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1]^T \\ \mathbf{X}_{n+1} &= [c_n \cdot c_1, c_n + c_{n-1} \cdot c_1, c_{n-1} + c_{n-2} \cdot c_1, \dots, \\ &\quad c_2 + c_1 \cdot c_1]^T \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

当  $c_1 = 0$  时,  $\mathbf{X}_{n+1} = [0, c_n, c_{n-1}, \dots, c_2]^T$ ,  $\mathbf{X}_n$  与  $\mathbf{X}_{n+1}$  中 1 的个数一致。

当  $c_1 = 1$  时,  $\mathbf{X}_{n+1} = [c_n, c_n + c_{n-1}, c_{n-1} + c_{n-2}, \dots, c_2 + c_1]^T$ ,  $\mathbf{X}_{n+1}$  是  $\mathbf{X}_n$  的一阶差分。不难证明, 当  $\mathbf{X}_n$  中 1 的个数大于  $(2/3)n$  时,  $\mathbf{X}_{n+1}$  中 1 的个数将小于  $\mathbf{X}_n$ 。

当多项式抽头数较多时,  $c_1 = 1$  的概率将明显高于  $c_1 = 0$  的概率。因此, 对于  $n$  阶多项式, 当抽

头数大于  $(2/3)n$  时, 可以使用控制状态  $\mathbf{X}_{n+1}$  进行多项式估计, 使得估计系数中 1 的个数减少, 然后根据  $\mathbf{X}_{n+1}$  反推出多项式系数  $[c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1]$ 。

### 3.4 算法步骤

综上所述, SWWHT 算法步骤如下:

步骤 1 按控制状态  $\mathbf{X}_n$  统计软判决频次系数。通过接收序列游程粗估计序列多项式级数为  $L$ , 通常  $L$  值大于实际多项式级数。将接收序列按顺序分成  $N - L - 1$  组, 根据式(16)统计软判决频次系数  $\eta$ 。

步骤 2 序列多项式预估计。利用  $\eta$  值进行 WHT 变换, 根据变换谱系数识别出最优估计解  $\hat{c}$ 。验证估计结果是否正确, 若正确则算法结束。若不正确则进行步骤 3。

步骤 3 控制状态选择。改变序列控制状态, 将控制状态  $\mathbf{X}_n$  转换为  $\mathbf{X}_{n+1}$ 。按间隔顺序  $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}]$  统计软判决频次系数  $\eta'$ 。

步骤 4 矩阵加权。根据式(23)求解 Hadamard 矩阵加权系数, 对矩阵进行列加权。

步骤 5 序列多项式估计。利用  $\eta'$  进行加权 WHT 变换, 根据变换谱系数得到最优解  $\hat{c}_{n+1}$ , 根据  $\mathbf{X}_n$  与  $\mathbf{X}_{n+1}$  的关系, 反推多项式估计解  $\hat{c}_n$ , 验证估计结果。

## 4 算法仿真及性能分析

使用 matlab 软件, 以  $m$  序列为例, 分析 SWWHT 算法多项式估计性能。采用序列生成多项式:

$$\text{多项式 1: } g_1(x) = 1 + x + x^3 + x^4 + x^{10};$$

$$\text{多项式 2: } g_2(x) = 1 + x^3 + x^{10};$$

$$\text{多项式 3: } g_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{10};$$

$$\text{多项式 4: } g_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^6 + x^7 + x^8;$$

$$\text{多项式 5: } g_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^7 + x^8 + x^{10};$$

$$\text{多项式 6: } g_6(x) = 1 + x + x^3 + x^7 + x^{12} + x^{16} + x^{17}。$$

按照 '0' → '1', '1' → '-1' 映射, 发送序列取值  $a_i \in \{-1, 1\}$ , 接收序列  $r(i) = a(i) + n_i$ , 其中  $n_i$  表示 AWGN。接收序列为截短序列。算法性能为随机试验 5000 次得到的估计值。PN 序列估计均在低信噪比条件下进行, 为便于分析, 文中均采用序列误码率对算法估计性能进行推导。算法仿真在不同信噪比条件下进行, 表 1 给出了码片信噪比和误码率对应表。

### 4.1 SWWHT 谱系数

以多项式 1  $g_1(x) = 1 + x + x^3 + x^4 + x^{10}$  为本原多项式, 误码率为 0.2, 产生含错  $m$  序列。从该序列中任意截取长度为 200 的截短序列作为接收序列。根据 SWWHT 算法, 计算软频次系数, 进行

表 1 码片信噪比与误码率对应表

信噪比(dB)	-15	-10	-5	0	5
误码率	0.43	0.38	0.29	0.16	0.03

WHT 变换。谱系数如图 2 所示, 在位置 1052 处出现峰值。1051 对应的二进制数为(10000011011), 倒序后即多项式系数。

### 4.2 算法性能

考察 SWWHT 算法对不同抽头数多项式估计性能。分别以多项式 2(2 抽头)和多项式 3(8 抽头)为生成多项式, 在不同误码率条件下进行仿真。图 3 给出了 SWWHT 算法与 WHT 算法在不同抽头数条件下容错性能对比曲线。接收序列长度为 200, 两种算法的计算复杂度均为  $O(11 \times 2^{11})$ 。

从图 3 可以看出, 生成多项式抽头数为 2 时, SWWHT 算法较 WHT 算法容错性能提高了 0.5 个误码率单位, 约 1.5 dB。当生成多项式抽头数为 8 时, WHT 算法容错性能急剧降低, SWWHT 算法容错性能略有下降, 例如 WHT 算法在误码率 0.04 的条件下成功率能达到 90%, 而 SWWHT 算法误码率 0.15 条件下能达到 90%。即在相同误码条件下, 对多抽头数多项式进行估计, SWWHT 算法较 WHT 算法成功率有较大提高。由于 SWWHT 算法中 Walsh Hadamard 矩阵加权本质是降低多抽头数对序列误码率的影响, 提升多抽头估计性能, 因此 SWWHT 算法受抽头数的影响较小。

考察 SWWHT 算法在不同接收序列长度条件下的估计性能。以多项式 3 为生成多项式, 接收序列截取长度  $N$  分布为 100, 500, 1000。图 4 给出了 3 种接收序列长度条件下的算法容错性能曲线。从图中可以看出, 算法容错性能随接收序列累积量增大而增大, 原因是累积量越大, 频次系数统计越不随机, 正确方程系数概率优势越明显。 $N$  从 500 到 1000 算法容错性能增幅从 100 到 500 增幅小, 原因是随着累积量增大, 估计成功率越接近方程容错似然限。

考察 SWWHT 算法对不同阶多项式性能。根据式(11), 理想情况下, 当接收序列累积量足够多时, 估计成功率逼近似然限, 算法性能只和抽头系数个数相关, 与多项式阶数无关。分别以多项式 4(8 阶数, 6 抽头)、多项式 5(10 阶, 6 抽头)、多项式 6(17 阶, 6 抽头)为生成多项式, 在不同误码率的条件下进行仿真。图 5 给出了 SWWHT 算法不同阶多项式估计性能对比曲线。接收序列截短长度 200, 800, 3000。从图中可以看出, 随着阶数的提高算法成功率稍微有所降低, 原因是多项式阶数越多, 估计成功率达似然限时序列累积量要求越多, 同时, 矩阵

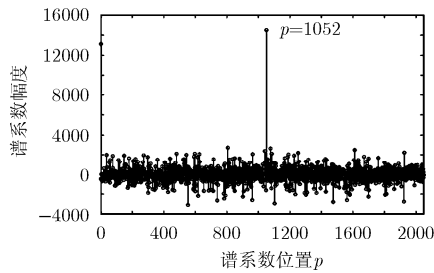


图2 SWWHT 谱系数

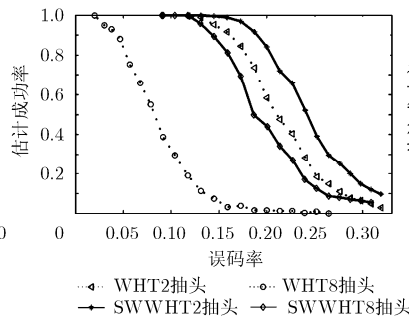


图3 不同抽头数SWWHT与WHT算法性能对比

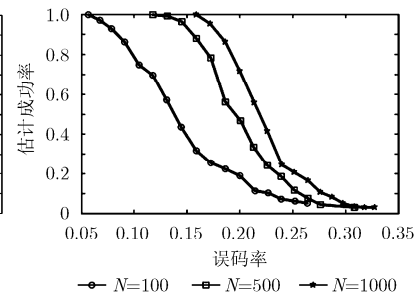


图4 不同接收序列长度算法性能对比

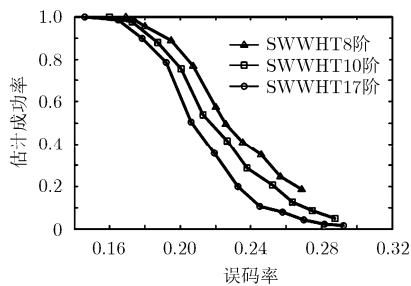


图5 不同阶多项式SWWHT算法性能对比

权值调整程度随多项式阶数的增大而增大，造成少量估计性能的损失。

## 5 结论

利用WHT变换进行序列多项式估计时，存在容错性能不足和估计多项式抽头数制约的问题。针对这些问题，本文从3个方面对WHT算法进行了改进：将序列频次系数由硬判决改进为软判决，从而提高抗误码性能；对Walsh-Hadamard矩阵进行列加权，改变多抽头系数多项式和少抽头多项式在谱系数中的平衡，提升多抽头系数估计性能；针对抽头数特别多情况，进行序列控制状态选择，降低估计多项式抽头数。仿真结果表明，新算法具有较好的估计性能，且基本不受多项式抽头数制约，具有一定应用价值。算法不足之处在于，抗误码性能受方程容错似然限制约。

## 参考文献

- [1] 田日才. 扩频通信[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007, 4: 1-6.
- [2] 万哲先. 代数与编码[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009, 2: 183-250.
- [3] Wang L P, Zhu Y F, and Pei D Y. On the lattice basis reduction multi-sequence synthesis algorithm[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(11): 2905-2910.
- [4] Yin Qian, Yuan Zhi-yong, and Guo Ping. Further studies on the distribution of the shortest linear recurring sequences for the stream cipher over the ring[C]. *Proceedings of 2007 International Conference on Intelligent Computing*, Berlin Heidelberg, 2007: 680-688.
- [5] 苏绍璟, 伍文君. 含错 m 序列本原多项式的高阶统计测定算法[J]. *兵工学报*, 2010, 31(12): 1593-1598.  
Su Shao-jing and Wu Wen-jun. Blind identification of the primitive polynomial of m-sequence with error using high-order statistic[J]. *Acta Armamentarii*, 2010, 31(12): 1593-1598.
- [6] Wang Feng-hua, Huang Zhi-tao, and Zhou Yi-yu. A new method for m-sequence and gold-sequence generator polynomial estimation[C]. *Proceedings of IEEE International Symposium on Microwave Antenna, Propagation and EMC Technologies for Wireless Communication*, Hangzhou, China, 2007: 1039-1044.
- [7] 游凌, 朱中梁. Walsh 函数在解二元域方程组上的应用[J]. *信号处理*, 2000, 16(增刊): 27-30, 20.  
You Ling and Zhu Zhong-liang. The application of walsh function in resolving of F(2) equations[J]. *Signal Processing (Chinese)*, 2000, 16(Suppl.): 27-30, 20.
- [8] Aye Aung and Bonn Poh Ng. Natural-ordered complex Hadamard transform[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(3): 874-879.
- [9] 戚林, 郝士琦, 王磊. 基于改进 Walsh-Hadamard 变换的删除卷积码盲解码算法[J]. *计算机应用研究*, 2011, 28(4): 1457-1459.  
Qi Lin, Hao Shi-qi, and Wang Lei. Blind decoding algorithm of punctured convolutional codes based on improved WHT[J]. *Application Research of Computers*, 2011, 28(4): 1457-1459.
- [10] Hamood M T. Fast Walsh-Hadamard-Fourier(WHT) transform algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(11): 5627-5631.
- [11] Suchitra G and Valarmathi M L. BER performance of modified Walsh Hadamard codes in a DS-CDMA and cognitive underlay system[J]. *European Journal of Scientific Research*, 2011, 64(4): 563-578.
- [12] Sos Agaian, Hakob Sarukhanyan, and Jaakko Astola. Gold Hadamard Transform matrices[C]. *Proceedings of the 2006 International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multivariate Signal Processing*, Florence, Italy, 2006: 107-112.

黄开枝: 女, 1973年生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为无线移动通信、信息处理、物理层安全。  
陈松: 男, 1983年生, 硕士生, 研究方向为无线移动通信、信息处理。