

基于空-时加权全变差正则项的视频复原算法

任福全 邱天爽*

(大连理工大学电子信息与电气工程学部 大连 116023)

摘要: 该文改进空-时全变差正则项,提出了基于空-时加权全变差的视频图像重建算法。通过空-时加权全变差正则项的引入,获得新的视频重建模型,并提出了基于分裂 Bregman 迭代算法的模型快速求解方法。仿真和数值实验表明,该文算法能够有效地实现高斯白噪声背景下视频序列去模糊问题,而且能够较好地保持复原图像序列的边缘和细节信息,避免传统TV算法产生的过平滑而失去细节信息的缺点,获得更加自然和细节的复原图像。

关键词: 图像处理; 视频复原; 空-时加权全变差; 分裂 Bregman 迭代算法

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)04-0820-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00589

Video Restore Method Based on Spatial Temporal Weighted Total Variation

Ren Fu-quan Qiu Tian-shuang

(Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: By improving the Spatial-Temporal Total Variation (ST-TV) method, a video image reconstruction approach based on the Spatial Temporal Weighted Total Variation (ST-WTV) is proposed in this paper. By introducing ST-WTV as a regular term, a new model is got for video image sequences reconstruction. An algorithm based on split Bregman iterative method is given in this paper. Finally, the simulated and real data experimental results show that the proposed spatially ST-WTV video restoration algorithm not only efficiently reduces the “artifacts” produced with a TV model in fat regions of the image, but also preserves the edge information, getting more nature and detail-preserving image sequences.

Key words: Image processing; Video restoration; Space Time Weighted Total Variation (ST-WTV); Split Bregman iterative method

1 引言

视频图像复原是指对受噪声、模糊等因素而退化的视频图像序列进行处理,以获取清晰、稳定、高质量的视频图像序列。随着视频图像在远程感知、医学成像、视频监控等方面的广泛应用,视频图像复原技术备受学术界的广泛关注。

传统的视频重建方法采用基于单帧视频图像的运动去模糊方法^[1,2],该问题的研究始于20世纪60年代科学家对空间技术所获取图像的处理。20世纪90年代,文献[3]提出了基于‘空-时块’的视频图像处理与重建算法,文献[4,5]将其应用于视频序列去噪、视频图像超分辨率重建等问题的求解。与传统的单帧视频图像复原算法相比较,基于‘空-时块’的视频图像处理与重建算法充分利用了视频图像序列的时域相关性,并可以约束重建模型在时间方向上的

光滑性,在去除模糊的同时,有效地去除噪声的影响。

本文主要研究噪声和模糊影响下视频图像序列的视频复原问题。在文献[6]提出的空-时全变差模型的基础上,为了克服该算法中空-时全变差正则项因分片常数带来的过平滑而失去边缘和细节信息的缺点,本文提出了空-时加权全变差(Spatial Temporal Weighted Total Variation, ST-WTV)模型,用于解决视频复原问题,并给出了该模型的基于分裂 Bregman 迭代和3D-FFT的模型求解算法。

2 背景与符号说明

3 维张量 $f(x, y, t) \in R^{M \times N \times K}$ 表示视频信号,其中 (x, y) 表示像素点的空域坐标, t 表示像素点的时域坐标。记 $\mathbf{f} = \text{vec}(f(x, y, t))$, 其中 $\text{vec}(\bullet)$ 为向量化算子,表示将视频 $f(x, y, t)$ 按字典式顺序排列成大小为 $M \times N \times K$ 的列向量。

对于给定的视频序列 $f(x, y, t)$ 和模糊核函数 $h(x, y, t)$, $o(x, y, t)$ 为 f 与 h 的 3 维卷积,由于 3 维卷积是线性运算,可以表示为矩阵和向量乘积的形式。

2012-05-16 收到, 2012-12-20 改回

国家自然科学基金(81241059, 61172108, 61139001)和国家科技支撑计划项目(2012BAJ18B06)资助课题

*通信作者: 邱天爽 qitutsh@dlut.edu.cn

于是可以定义整体退化矩阵 \mathbf{H} 为

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \text{vec}(\text{o}(x, y, t)) = \text{vec}(f(x, y, t) * h(x, y, t)) \quad (1)$$

可以证明^[7,8]退化矩阵 \mathbf{H} 是一个三重块循环矩阵, 并且可以通过 3D 傅里叶变换对角化。于是视频序列的退化模型表述为

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{N} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{g} = \text{vec}(g(x, y, t))$ 表示观测信号向量, \mathbf{N} 为加性高斯白噪声向量。分别定义水平方向、垂直方向和时间方向的前向差分算子 $\mathbf{D}_x\mathbf{f}, \mathbf{D}_y\mathbf{f}, \mathbf{D}_t\mathbf{f}$, 算子 \mathbf{D} 定义为: $\mathbf{D} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{D}_x^T \ \mathbf{D}_y^T \ \theta_t \mathbf{D}_t^T]^T$, 其中 θ_t 用于调节时间方向上的梯度所占权重。于是可以将空-时全变差表示为

$$\text{STTV}(\mathbf{f}) = |\mathbf{D}\mathbf{f}|_1 \quad (3)$$

文献[6]提出了序列图像处理的空-时全变差模型, 使用 $\text{STTV}(\mathbf{f}) = |\mathbf{D}\mathbf{f}|_1$ 作为正则性条件, 充分利用了视频序列时域上的光滑性, 取得了比较好的效果。但是当退化模型中的噪声较大时, 采用该正则项会造成图像纹理信息和较小的细节与边缘被模糊和破坏, 这是因为 STTV 模型和传统的 TV 模型一样, 趋向于一个分段常数解。为了有效地保持重建图像的边缘和细节信息, 本文在文献[6]的基础上提出了带有图像空域微分曲率权重的空-时加权全变差的视频复原模型, 并提出了基于分裂 Bregman 迭代方法的多步迭代快速算法, 大幅度降低了计算复杂性。

3 空时加权全变差视频图像重建模型及其算法

3.1 空时加权全变差视频图像重建模型

为了有效地抑制 TV 模型上述的缺点, 文献[9, 10]提出了各种改进的 TV 模型, 其中加权全变差模型在保持图像边缘和细节方面显示出比较优异的效果。文献[10]提出一个新的空域信息提取运算符, 称为差异曲率(difference curvature)。在每个像素点, 一个由该点处差异曲率决定的加权参数被加在 TV 约束上, 以自适应调节该像素点处 TV 参数的大小。

对于视频的第 i 个像素点, 该点处的差异曲率定义为

$$C_i = \left| |u_{\eta\eta}| - |u_{\varepsilon\varepsilon}| \right| \quad (4)$$

$$u_{\eta\eta} = \frac{\mu_x^2 \mu_{xx} + 2\mu_x \mu_y \mu_{xy} + \mu_y^2 \mu_{yy}}{\mu_x^2 + \mu_y^2} \quad (5)$$

$$u_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\mu_y^2 \mu_{xx} - 2\mu_x \mu_y \mu_{xy} + \mu_x^2 \mu_{yy}}{\mu_x^2 + \mu_y^2} \quad (6)$$

其中 ε 代表梯度方向, η 代表垂直于梯度方向, 那么可以定义第 i 个像素点处的权重系数为 $wg_i =$

$\frac{1}{1 + \rho C_i}$, 于是得到差异曲率加权的 ST-WTV 为

$$|\mathbf{f}|_{\text{STWTV}} = \sum_{i=1}^{M \times N \times K} wg_i \left(|\mathbf{D}_x^i \mathbf{f}|_1 + |\mathbf{D}_y^i \mathbf{f}|_1 + \theta_t |\mathbf{D}_t^i \mathbf{f}|_1 \right) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{D}_x^i, \mathbf{D}_y^i, \mathbf{D}_t^i$ 分别表示视频图像序列第 i 个像素点沿水平方向(x), 垂直方向(y)和时间方向(t)的前向差分。为了便于表达和计算, 可以将上述定义的 $|\mathbf{f}|_{\text{STWTV}}$ 表达为矩阵乘积的形式, 得到块对角矩阵

$$\mathbf{W} = \text{diag}[\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_K] \quad (8)$$

其中子矩阵 $\mathbf{W}_K = \text{diag}[wg_1^k, wg_2^k, \dots, wg_{M \times N}^k]$ 表示 $t = k$ 时的权重系数矩阵。令

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \text{diag}[\mathbf{W}, \mathbf{W}, \mathbf{E}] \quad (9)$$

其中 \mathbf{E} 为 $M \times N \times K$ 阶单位矩阵, 显然矩阵 $\widetilde{\mathbf{W}}$ 也是实的对角矩阵, 设 $\widetilde{\mathbf{W}} = \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}})$, $\widetilde{\mathbf{W}}$ 为 $M \times N \times K$ 维列向量。不妨记 \mathbf{f} 的权重矩阵为 $\widetilde{\mathbf{W}} = \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}(\mathbf{f}))$, 其中 $\text{diag}(\cdot)$ 为对角矩阵生成算子。

定义视频序列 $f(x, y, t)$ 的空时加权全变差正则项(ST-WTV)表示为

$$|\mathbf{f}|_{\text{STWTV}} = |\widetilde{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}\mathbf{f}|_1 \quad (10)$$

于是, 可以给出基于空-时加权全变差的视频超分辨率模型

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \frac{\lambda}{2} \cdot \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 + |\mathbf{f}|_{\text{STWTV}} \quad (11)$$

3.2 基于分裂 Bregman 迭代的求解算法

分裂 Bregman 方法是由文献[11]提出的一种高效的 多步迭代快速算法, 该算法可以有效降低计算复杂性, 提升计算速度和收敛速度, 被广泛地运用到图像去噪^[12]和图像复原^[13]以及压缩感知^[14]等反问题的处理中。下面给出重建模型式(11)基于分裂 Bregman 迭代算法的求解过程:

待求解模型:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \frac{\lambda}{2} \cdot \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 + |\widetilde{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{D}\mathbf{f}|_1 \right\} \quad (12)$$

通过文献[11,15]中介绍的分裂 Bregman 算法, 可以将待求解式(12)转化为易于求解的问题:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{f}^{k+1}, \mathbf{d}^{k+1}) &= \arg \min_{(\mathbf{f}, \mathbf{d})} \left\{ |\mathbf{d}|_1 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\vartheta}{2} \|\mathbf{d}^k - \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k) \cdot \mathbf{D}\mathbf{f} - \mathbf{b}^k\|_2^2 \right\} \\ \mathbf{b}^{k+1} &= \mathbf{b}^k + \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k) \cdot \mathbf{D}\mathbf{f}^{k+1} - \mathbf{d}^{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由于上述的能量函数对于变量 (\mathbf{f}, \mathbf{d}) 而言均是凸的, 因此可以分别对其交替求解, 转化为子问题:

$$f^{k+1} = \arg \min_f \left\{ \left\| \mathbf{H}f - \mathbf{g} \right\|_2^2 + \frac{\vartheta}{\lambda} \left\| \mathbf{d}^k - \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k) \cdot \mathbf{D}f - \mathbf{b}^k \right\|_2^2 \right\} \quad (14a)$$

$$\mathbf{d}^{k+1} = \arg \min_d \left\{ \left\| \mathbf{d} \right\|_1 + \frac{\vartheta}{2} \left\| \mathbf{d} - \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k) \cdot \mathbf{D}f^{k+1} - \mathbf{b}^k \right\|_2^2 \right\} \quad (14b)$$

$$\mathbf{b}^{k+1} = \mathbf{b}^k + \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k) \cdot \mathbf{D}f^{k+1} - \mathbf{d}^{k+1} \quad (14c)$$

权重矩阵主对角线元素的更新为

$$\widetilde{\mathbf{W}}^{k+1} = \widetilde{\mathbf{W}}(f^{k+1}) \quad (15)$$

现在分别对所得到的子问题进行求解:

(1)f-子问题 显然式(14a)是关于 f 的光滑的无约束优化问题, 可以采用常见的最速下降法、拟牛顿法等算法求解, 但求解速度会很慢。文献[6,16]说明三重循环矩阵可以通过 3 维傅里叶变换实现对角化。本文采用 FFT 方法对式(14a)进行求解。首先, 对式(14a)进行处理可得

$$(\lambda \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \vartheta \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k)^2 \mathbf{D}^T \mathbf{D})f - \lambda \mathbf{H}^T \mathbf{g} - \vartheta \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k) \mathbf{D}^T \mathbf{d}^k = 0 \quad (16)$$

于是得到

$$f = \mathbf{F}^{-1} \left[\mathbf{F}[\lambda \mathbf{H}^T \mathbf{g} + \vartheta \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k) \mathbf{D}^T \mathbf{d}^k] \right. \\ \left. \left/ \left(\lambda \left| \mathbf{F}^H \mathbf{H} \mathbf{F} \right|^2 + \vartheta \text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k)^2 \left| \mathbf{F}[\mathbf{D}_x] \right|^2 + \left| \mathbf{F}[\mathbf{D}_y] \right|^2 + \theta_i^2 \left| \mathbf{F}[\mathbf{D}_t] \right|^2 \right) \right. \right] \quad (17)$$

其中算子 \mathbf{F} 表示 3 维傅里叶变换算子。采用以上算法可以大幅提高运算速度。

(2)d-子问题 可以直接通过简单的线性收缩算子 shrink 算子^[17,18]进行求解

$$\mathbf{d}^{k+1} = \text{shrink}(\text{diag}(\widetilde{\mathbf{W}}^k) \cdot \mathbf{D}f^{k+1} + \mathbf{b}^k, 1/\vartheta) \quad (18)$$

综上所述, 基于空时加权全变差(ST-WTV)重建模型的分裂 Bregman 迭代算法描述如表 1。

4 实验结果与分析

本节通过一些视频图像序列的数值仿真实验, 以验证本文提出模型和相应算法的有效性, 以及在边缘和纹理等高频区域重建结果的优越性。仿真实验中考虑退化图像是由清晰的视频图像经过高斯平滑或者运动模糊并加高斯白噪声得到的。采取最常用的图像质量评价方法峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)和主观评价来评估各类试验方法结果的图像质量。

首先对经典的 ‘Saleman’ 视频序列中的多帧图像进行仿真实验。原视频每帧图像的大小为 360 × 288, 共 70 帧, 按每 10 帧分段处理。首先对该序

表 1 基于空-时加权全变差(ST-WTV)重建模型的分裂 Bregman 迭代算法

算法名称: 基于 ST-WTV 正则项的视频重建模型 Bregman 迭代算法

算法任务: ST-WTV 正则化下的视频重建

输入参数: 观测到的视频序列 $g(x, y, t)$, 退化矩阵 \mathbf{H} , 模型参数 λ , 收敛参数 ε, θ_i

初始化: $f^0 = g, \widetilde{\mathbf{W}}^0 = \widetilde{\mathbf{W}}(f^0)$ 并计算 3D Fourier 变换 $\mathbf{F}[\mathbf{H}], \mathbf{F}[\mathbf{D}_x], \mathbf{F}[\mathbf{D}_y]$ 和 $\mathbf{F}[\mathbf{D}_t]$ 。

主迭代过程: while $\|f_{k+1} - f_k\|_2 / \|f_k\|_2 > \varepsilon$ do

步骤 1 执行式(17), 得到 f-子问题的解 f^{k+1} ;

步骤 2 执行式(18), 得到 d-子问题的解 d^{k+1} ;

步骤 3 执行式(14c), 得到 b^{k+1} ;

步骤 4 更新权重矩阵 $\widetilde{\mathbf{W}}^{k+1} = \widetilde{\mathbf{W}}(f^{k+1})$ 。

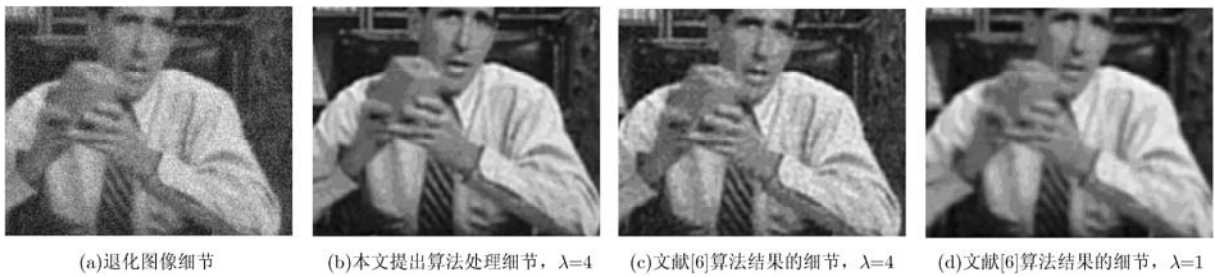
输出: 重建视频图像序列 $f = \text{Inv Vec}(f)$, 迭代次数 m 。

列进行高斯模糊, 为了增加图像的模糊程度, 并且便于与文献[6]的结果进行比较, 实验中选取的模糊核大小为 9×9 , 标准差为 $\sigma = 1$, 然后向模糊图像添加均值 $\mu_N = 0$, 标准差 $\sigma_N = 10$ 的高斯白噪声。如图 1 第 2 列所示, 退化图像序列的平均 PSNR 为 25.75 dB。随后, 采用基于文献[6]中提出的空-时 3D-TV 正则化模型和算法与本文提出的算法对退化的图像序列分别进行处理并对重建后的结果进行比较。在平滑区域, 3D-TV 正则化可以有效地去除噪声和模糊, 但在细节和边缘区域, TV 正则项往往在去除噪声和高斯模糊的同时, 丢掉细节信息, 造成细节上的模糊(如图 2(a)), 为了保持纹理和细节, TV 算法的正则项系数往往不会选择过大, 以便保持细节, 但同时会降低算法去除噪声的效果(如图 2(b))如图 1 第 4 列, TV 算法处理的平均 PSNR=29.28 dB。而本文提出的算法一方面由于基于图像差异曲率信息的加权矩阵的使用, 在去除噪声和高斯模糊的同时, 可以更好地保持住边缘和细节信息, 显示出优异的处理结果, 另一方面, 由于时域差分信息的使用, 可以使得图像序列处理的处理结果在像素平滑区域更加的平滑, 充分发挥 TV 类算法的优势, 如图 1 第 3 列所示, 本文提出算法处理的平均 PSNR = 30.07 dB。

同样, 本文又对受运动模糊和噪声影响的视频序列进行了测试。实验数据选择 ‘Tennis’ 序列。对 ‘Tennis’ 序列进行水平运动模糊, 运动像素 $m = 9$, 并向模糊图像施加均值 $\mu_N = 0$, 标准差 $\sigma_N = 10$ 的高斯白噪声。从视频序列中随机抽取一帧, 其处理结果和放大的细节比较如图 3 所示, 可以看到, 本文提出的算法可以很好地保持图像的边缘和细节信息。



图 1 ‘Saleman’ 序列第 1,10,45,53,69 帧图像处理结果



(a)退化图像细节

(b)本文提出算法处理细节, $\lambda=4$

(c)文献[6]算法结果的细节, $\lambda=4$

(d)文献[6]算法结果的细节, $\lambda=1$

图 2 ‘Saleman’ 序列第 69 帧图像处理结果细节放大

算法收敛性分析： 本文算法采用了分裂 Bregman 迭代算法，与传统算法例如序贯优化方法在解决 l_1 优化问题相比，Bregman 迭代有收敛速度快的特点，只需少许几次迭代可获得无约束优化问题的很好的结果，如图 4 所示，对 10 帧退化了的 ‘Saleman’ 序列图像处理的收敛曲线，可以看到，如果取收敛参数 $\epsilon = 10^{-3}$ ，那么在第 13 次迭代时，算法已经基本达到收敛了。

算法运行时间： 由于加权系数矩阵 \widehat{W} 的引入，算法的每一次循环迭代都需要进行一次对角元 \widehat{W} 的更新，对 \widehat{W} 更新时，需要对差分图像进行差分运

算，并通过式(8)，式(9)计算 \widehat{W} ，因此本文提出的算法与文献[6]相比，算法复杂度要略高一些，对 ‘Tennis’ 序列进行处理，每帧图像大小 240×352 ，运行计算机环境为 64 位 win7 系统，CPU 主频 2.33 GHz，内存 4 GB，运算时间如表 2 所示。

表 2 算法运行时间比较(s)

算法	10 帧	20 帧
文献[6]算法	7.84	15.43
本文算法	14.12	27.78

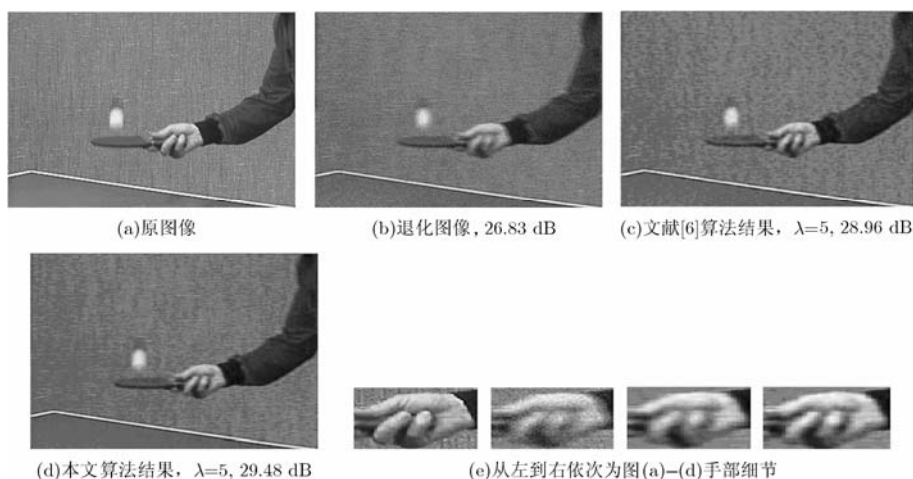
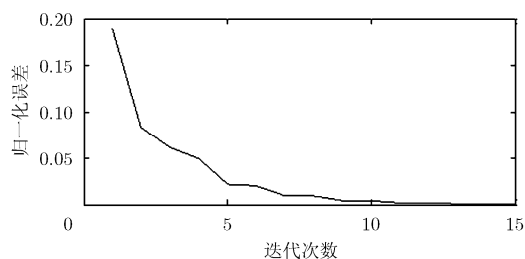


图 3 ‘Tennis’ 序列第 11 帧图像处理结果及其放大细节

图 4 算法收敛曲线, 10 帧 ‘Saleman’ 序列图像, $\lambda = 4$

5 结论

针对模糊和噪声影响下的视频复原问题, 本文提出了基于空-时加权全变差的视频图像重建算法。由于空-时加权全变差正则项的引入, 在去除噪声和模糊的同时, 可以有效地保持图像的边缘和细节信息。并针对该模型给出了基于分裂 Bregman 迭代方法和快速 3D-FFT 算法的模型求解算法对该模型进行求解, 可以快速实现视频序列复原, 达到较理想的效果。

参考文献

- [1] Dong Wei-sheng, Zhang Lei, Shi Guang-ming, *et al.* Image deblurring and super-resolution by adaptive sparse domain selection and adaptive regularization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, 20(7): 1838-1857.
- [2] 吴显金, 王润生. 基于边缘恢复和伪像消除的正则化图像复原[J]. *电子与信息学报*, 2006, 28(4): 577-581.
Wu Xian-jin and Wang Run-sheng. Regularized image restoration based on edge restoration and artifacts removing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2006, 28(4): 577-581.
- [3] Jähne B. *Spatio-Temporal Image Processing: Theory and Scientific Applications*[M]. New York: Springer-Verlag, 1993: 50-73.
- [4] Wexler Y, Shechtman E, and Irani M. Space-time completion of video[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, 29(3): 463-476.
- [5] Shechtman E, Caspi Y, and Irani M. Space-time super-resolution[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(4): 531-545.
- [6] Chan S H, Khoshabeh R, Gibson K B, *et al.* An augmented lagrangian method for total variation video restoration[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, 20(11): 3097-3111.
- [7] Golub G and Van Loan C. *Matrix Computation*[M]. 2nd Ed, Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1989: 161-193.
- [8] Kim B. Numerical optimization methods for image restoration[D]. [Ph.D. dissertation], Dept. Manage. Sci. Eng., Stanford University, Stanford, CA, Dec. 2002.
- [9] Li X, Hu Y, and Gao X B. A multiframe image super resolution method[J]. *Signal Processing*, 2010, 90(2): 405-414.
- [10] Chen Q, Montesinos P, Sun Q, *et al.* Adaptive total variation denoising based on difference Curvature[J]. *Image and Vision Computing*, 2010, 28(3): 298-306.
- [11] Goldstein T, Bresson X, and Osher S. Geometric applications of the split Bregman method: segmentation and surface reconstruction[R]. CAM Report 09-06, University of California Los Angeles, 2009.
- [12] Yang Yu-fei, Pang Zhi-feng, Shi Bao-li, *et al.* Split Bregman method for the modified lot model in image denoising[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217(12): 5392-5403.
- [13] Liu Xin-wu and Huang Li-hong. Split Bregman iteration algorithm for total bounded variation regularization based image deblurring[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, 372(2): 486-495.
- [14] Ying W, Osher S, Goldfarb D, *et al.* Bregman iterative algorithms for l_1 -minimization with applications to

- compressend sensing[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, 1(1): 143-168.
- [15] Goldstein T and Osher S. The split Bregman algorithm for l_1 regularized problems[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2): 323-343.
- [16] Ng M. *Iterative Methods for Toeplitz Systems*[M]. London: UK, Oxford University Press, 2004: 37-42.
- [17] Beck A and Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(1): 183-202.
- [18] Puig A T, Wiesel A, and Hero A O. Multidimensional shrinkage-thresholding operator and group LASSO penalties[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(6): 363-366.
- 任福全: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为图像处理、医学成像和压缩感知.
- 邱天爽: 男, 1954年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为非平稳非高斯信号处理、射频与通信信号分析与处理、生物医学信号处理.