

基于状态转移矩阵逼近的椭圆球面波函数求解方法

钟佩琳* 王红星 赵志勇 刘锡国 刘传辉
(海军航空工程学院电子信息工程系 烟台 264001)

摘要: 该文针对现有椭圆球面波函数(PSWFs)求解算法存在的效率低、硬件实现复杂度高,尤其是精度不可控的问题,结合线性时变系统理论,提出一种基于微分方程状态转移矩阵逼近的 PSWFs 求解方法。该算法通过求解小区间上的状态转移矩阵来逼近整个时间区间上的状态转移矩阵,进而求得离散时间点上的系统运动轨迹,即 PSWFs 数值解。理论推导了解误差并修正了算法,修正后算法具有简明的误差表达式,与 Parr 算法和 Legendre 多项式逼近算法在求解精度和复杂度上进行了对照分析。结果表明,该文算法求解精度高且可控,时间和空间复杂度低,易于硬件实现。

关键词: 信号处理; 椭圆球面波函数; 求解方法; 微分方程; 状态转移矩阵

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)10-2427-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00350

Algorithm for Prolate Spheroidal Wave Functions Based on State Transition Matrix Approximation

Zhong Pei-lin Wang Hong-xing Zhao Zhi-yong Liu Xi-guo Liu Chuan-hui
(Department of Electronic and Information Engineering,
Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China)

Abstract: The existing algorithms for Prolate Spheroidal Wave Functions (PSWFs) have poor efficiency, high complexity in hardware implementation and especially uncontrollable precision. To overcome the above weaknesses, a new algorithm based on state transition matrix approximation of differential equation is proposed combining the theory of linear time-varying system. In the new algorithm, the state transition matrix on the whole interval is approximated by the ones on very small intervals. After that, the movement track of the system on discrete time spot is attained, and that is the numerical solution of PSWFs. The expression of error to the precise value is deduced theoretically and then the algorithm is improved to get the briefer error expression. The new algorithm is compared and analyzed with the one proposed by Parr and the approximation algorithm of Legendre polynomials on the calculation precision and complexity. The simulation results show that the proposed algorithm has high and controllable precision, low complexity and are easy for hardware implementation.

Key words: Signal processing; Prolate Spheroidal Wave Functions (PSWFs); Resolving algorithm; Differential equation; State transition matrix

1 引言

1961 年, 贝尔实验室的 Slepian 等人^[1]首次提出椭圆球面波函数 (Prolate Spheroidal Wave Functions, PSWFs) 的概念, 建立起该函数所满足积分方程与微分方程的关系, 并证明了该带限函数集在给定时间区间内具有最佳能量聚集性。此外, 该函数集还具有完备性和双正交性等优良特性^[2,3], 因此具有广阔的应用前景^[4-6]。

由于 PSWFs 的闭式解难以求取, 因此通常采用数值求解及逼近表示等方式求得其近似解。目前主要的 PSWFs 近似求解方法有: 一是 Parr 等人^[7]提出的基于 PSWFs 积分方程特征值分解的数值解法(简称 Parr 算法)。该方法对 PSWFs 所满足的积分方程进行离散化, 构造 Toeplitz 矩阵, 其特征向量即为所求 PSWFs。这种算法物理意义明确, 便于计算机运算, 可求得任意频段具有任意带宽的 PSWFs, 但随着采样点数的增加, 矩阵维数随之增加, 导致计算量大大增加, 计算时间长, 效率低。而 PSWFs 的求解精度与采样点数密切相关, 因此, 该算法不适用于对 PSWFs 精度要求较高的场合。

2012-03-29 收到, 2012-05-31 改回

国家自然科学基金(60772056)和山东省“泰山学者”建设工程专项经费项目资助课题

*通信作者: 钟佩琳 hellopeilin@126.com

二是根据 PSWFs 的微分方程定义式, 采用 Legendre 多项式逼近的方法求得 PSWFs 的近似解^[8]。该算法通过增加多项式阶数可以无限逼近精确解, 但其与精确解之间的误差目前还没有定量的表示形式, 同时, 该方法随着多项式阶数的增大, 计算量增幅较大, 效率较低。三是建立 PSWFs 积分方程与矩阵的对应关系, 求解矩阵特征值与特征向量, 得到 PSWFs 近似数值解, 再通过插值重构的方法恢复信号波形^[9,10]。该方法与 Parr 算法一样可以求解任意频段上的 PSWFs 近似解, 但求解过程中需要进行多次数值积分, 运算量大, 不易于用硬件实现。文献[11]在此基础上进行了改进, 降低了运算复杂度, 但仍然无法给出所采用算法的求解误差水平。

已有的近似求解方法大都颇为繁复, 硬件实现复杂度高。同时, 由于 PSWFs 精确解难以求取, 目前已有算法缺乏误差分析, 求解精度难以精确控制, 这些因素均在一定程度上限制了 PSWFs 的应用。因此, 对 PSWFs 的求解方法进行研究, 寻找一种计算简便、易于硬件实现、特别是精度可控的近似求解方法具有重要的理论意义和应用价值。

针对已有 PSWFs 近似求解方法中存在的计算量大、效率低、精度不可控和硬件实现复杂度高不足, 本文从全新的角度提出一种基于微分方程分段状态转移矩阵逼近的 PSWFs 求解算法。通过构造状态方程, 以 PSWFs 为状态变量, 求解方程状态值。算法将时间区间进行分段, 在每个小区间上通过泰勒级数展开求得状态转移矩阵, 并得到每个时间点状态值与真值的计算误差, 该误差可通过改变区间划分个数和展开式阶数来进行控制。因此, 采用本文算法不仅能够得到较为精确的 PSWFs 数值解, 而且求解精度可控, 可满足不同工程实际对脉冲精度的要求。同时, 计算简便, 复杂度低, 易于硬件实现。

2 基于分段状态转移矩阵逼近的 PSWFs 脉冲求解方法

持续时间为 T 的 PSWFs 满足如下齐次线性时变微分方程:

$$\begin{aligned} & \left[(T/2)^2 - t^2 \right] \frac{d^2 \psi_n(t)}{dt^2} - 2t \frac{d\psi_n(t)}{dt} \\ & + [\chi_n(c) - c^2(2t/T)^2] \psi_n(t) = 0, \\ & -T/2 \leq t \leq T/2 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\psi_n(t)$ 为 n 阶 PSWF, χ_n 为 n 阶 PSWF 对应的特征值, $c = \pi TB$ 为时间带宽积, B 为脉冲带宽。 c 和 $\chi_n(c)$ 是决定方程解的重要参数, $\chi_n(c)$ 可根据 c 和 n 的取值范围选择不同的计算公式得到^[8,12]。

整理式(1), 得到

$$\frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = \frac{2t}{(T/2)^2 - t^2} \frac{d\psi_n}{dt} - \frac{\chi_n - 4c^2 t^2 / T^2}{(T/2)^2 - t^2} \psi_n, \quad -T/2 < t < T/2 \quad (2)$$

式(2)所表示的系统 s 域框图如图 1 所示。

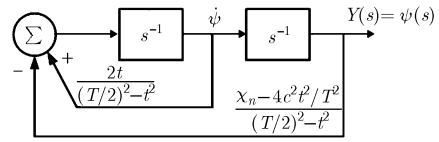


图1 微分方程 s 域框图

由图 1 可知, 在式(2)所表示的线性系统中, PSWFs 是该系统的状态变量, 其在 $[-T/2, T/2]$ 内的取值对应着系统在该时间区间内的运动轨迹, 求解 $\psi_n(t)$ 也即求解该系统的零输入响应。将式(2)降阶, 得到 PSWFs 微分方程的状态方程。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad -T/2 < t < T/2 \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\chi_n - 4c^2 t^2 / T^2}{(T/2)^2 - t^2} & \frac{2t}{(T/2)^2 - t^2} \end{bmatrix}$$

$\psi_n(t)$ 为第 1 维状态变量。

根据线性系统理论, 式(3)基于状态转移矩阵的解可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, -T/2)\mathbf{x}(-T/2) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{x}(-T/2)$ 为系统在初始时刻 $-T/2$ 具有的初始状态, $\Phi(t, -T/2)$ 为式(4)从初始时刻 $-T/2$ 到 t 时刻的状态转移矩阵。

时变微分方程的状态转移矩阵非常难以求取, 但在工程中我们可以进行近似处理, 只要满足一定的精度要求即可。因此, 将区间 $[-T/2, T/2]$ 等间隔划分为 N 个小区间 $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$, 记 $t_s = t_i - t_{i-1}$, 通过数值逼近微小区间内的状态转移矩阵来获得 $[-T/2, T/2]$ 上的近似状态转移矩阵, 从而得到式(4)的数值解。

设 $\Phi(t_i, t_{i-1})$ 为 $[t_{i-1}, t_i]$ 这一微小区间上的状态转移矩阵, 则式(4)在 t_i 时刻可表示为

$$\mathbf{x}(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1})\mathbf{x}(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

由式(5)可知, 只要求得 $\Phi(t_i, t_{i-1})$, 便可通过小区间上状态转移矩阵的连乘求得系统在每一时刻的状态值。

根据线性系统理论, $\Phi(t_i, t_{i-1})$ 具有以下性质:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_{i-1}) &= \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_{i-1}), \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i \\ \Phi(t_i, t_i) &= \Phi(t_{i-1}, t_{i-1}) = \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

经推导, $\mathbf{A}(t)$ 具有足够可微性, 因此, $\Phi(t, t_{i-1})$ 具有直到 n 阶导数, 可对 $\Phi(t, t_{i-1})$ 进行泰勒级数展开得到近似计算式, 同时可以通过给定局部截断误差的阶数, 得到近似计算式的计算精度。将 $\Phi(t, t_{i-1})$ 在 t_{i-1} 处按泰勒级数展开, 然后令 $t = t_i$, 有

$$\begin{aligned} \Phi(t_i, t_{i-1}) &= \Phi(t_{i-1}, t_{i-1}) + t_s \dot{\Phi}(t_{i-1}, t_{i-1}) \\ &+ \frac{1}{2!} t_s^2 \ddot{\Phi}(t_{i-1}, t_{i-1}) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} t_s^n \Phi^{(n)}(t_{i-1}, t_{i-1}) + o(t_s^n) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $o(t_s^n)$ 为 t_s^n 的高阶无穷小, 也即近似计算式的截断误差。这样, 通过取不同的 n 值, 即可得到 $\Phi(t_i, t_{i-1})$ 在区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上具有不同精度的近似计算式。如取 $n=1$, 并利用性质式(6), 则有

$$\Phi(t_i, t_{i-1}) = [\mathbf{I} + (t_i - t_{i-1})\mathbf{A}(t_{i-1})] + o(t_s) \quad (8)$$

如取 $n=2$, 有

$$\begin{aligned} \Phi(t_i, t_{i-1}) &= \{\mathbf{I} + (t_i - t_{i-1})\mathbf{A}(t_{i-1}) + 1/(2!) \\ &\cdot (t_i - t_{i-1})^2 [\dot{\mathbf{A}}(t_{i-1}) + \mathbf{A}^2(t_{i-1})]\} + o(t_s^2) \end{aligned} \quad (9)$$

按此类推, 忽略 t_s 的高阶无穷小, 即可得到各分段区间上具有更高阶精度的近似状态转移矩阵计算式。

3 算法误差分析

设 $\Phi(t_i, t_{i-1})$ 为区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上状态转移矩阵的精确解, $\mathbf{x}(t_i)$ 为在离散时刻 $t = t_i$ 时状态的精确解, $\hat{\Phi}(t_i, t_{i-1})$ 为利用泰勒级数展开求得的近似解, 则根据式(7)和式(5)可得

$$\Phi(t_i, t_{i-1}) = \hat{\Phi}(t_i, t_{i-1}) + o(t_s^n) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_i) &= \Phi(t_i, t_{i-1})\mathbf{x}(t_{i-1}) = \prod_{k=1}^i \Phi(t_k, t_{k-1})\mathbf{x}(-T/2) \\ &= \prod_{k=1}^i (\hat{\Phi}(t_k, t_{k-1}) + o(t_s^n)\mathbf{x}(-T/2)) \end{aligned} \quad (11)$$

由式(10)可知, 本文算法的求解误差仅来自于区间状态转移矩阵的截断误差。根据式(11), 在计算每一离散时刻的状态值时, 该时刻之前每一个小区间上状态转移矩阵的截断误差会得到传播, 影响状态值的计算精度。

令 $\hat{\mathbf{x}}(t_i)$ 为带有舍入误差的近似解, 经推导得 t_i 时刻的误差为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{x}(t_i) - \hat{\mathbf{x}}(t_i) \\ &= \sum_{k=1}^i \left\{ (-1)^{k-1} \sum \left[\Phi(t_p, t_{p-1}) \cdots \Phi(t_q, t_{q-1}) \right]_i^{i-k} o(t_s^{kn}) \right\} \\ &\cdot \mathbf{x}(-T/2) \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\sum \left[\Phi(t_p, t_{p-1}) \cdots \Phi(t_q, t_{q-1}) \right]_i^{i-k}$ 表示将前 i 个区间状态转移矩阵中的任意 $i-k$ 个不同矩阵进行连乘,

并对这 C_i^{i-k} 种可能的情况进行求和。例如, t_3 时刻的误差为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= \mathbf{x}_3 - \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &= \left\{ (\Phi_{3,2}\Phi_{2,1} + \Phi_{3,2}\Phi_{1,0} + \Phi_{2,1}\Phi_{1,0})o[(t_s)^n] \right. \\ &\quad \left. - (\Phi_{3,2} + \Phi_{2,1} + \Phi_{1,0})o[(t_s)^{2n}] + o[(t_s)^{3n}] \right\} \\ &\cdot \mathbf{x}(-T/2) \end{aligned} \quad (13)$$

从式(12)可以看出, \mathbf{e}_i 与 t_i 时刻前每一个小区间的状态转移矩阵均有关联, 证明了误差的传播, 但由于表达式非常复杂, 难以得到具体的误差量级。

为了得到简单明确的误差项表达式, 同时进一步降低计算误差, 下面从消除小区间近似状态转移矩阵给状态值计算带来的误差入手, 通过修正每一个离散时刻的状态值来抑制误差的传播。

记 $\hat{\mathbf{x}}(t_i)$ 为修正后 t_i 时刻的状态值, $\tilde{\mathbf{e}}_i$ 为修正后 t_i 时刻的误差, 则经推导得修正计算式及误差如下:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_i) = \hat{\mathbf{x}}(t_i) - t_s^n \hat{\Phi}(t_i, t_{i-1})\hat{\mathbf{x}}(t_{i-2}), \quad i \geq 2 \quad (14)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = o(t_s^n)\hat{\mathbf{x}}(t_{i-1}) \quad (15)$$

修正算法即在 t_i 时刻将按式(7)求得的 $\hat{\mathbf{x}}(t_i)$ 代入式(14)进行修正。在推导过程中, 舍掉了含有 $o(t_s^{2n})\mathbf{x}(t_i)$ 的项, 因为该项数值非常微小。例如, 当微分方程定义区间 $T=2$, 采样点数为 100, 区间状态转移矩阵具有二阶精度时, $o(t_s^{2n})$ 的量级为 10^{-12} , 因此该项可以忽略不计。从式(15)可以很容易地得到每一个离散时刻的状态值计算误差, 由于 $\hat{\mathbf{x}}(t_{i-1})$ 会随着采样点数及微分方程参数的变化而变化, 因此, 为了对计算误差有一个更直观的了解, 我们引入相对误差来表征计算误差。

记 $\tilde{\mathbf{e}}_{ri}$ 为修正后 t_i 时刻的相对误差, 则有

$$\tilde{\mathbf{e}}_{ri} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_i}{\hat{\mathbf{x}}(t_i)} = \frac{o(t_s^n)\hat{\mathbf{x}}(t_{i-1})}{\hat{\mathbf{x}}(t_i)} \quad (16)$$

当采样点数较多时, $\hat{\mathbf{x}}(t_{i-1})/\hat{\mathbf{x}}(t_i) \approx 1$, $\tilde{\mathbf{e}}_{ri} \approx o(t_s^n)$, 由此可知采用修正算法后每一离散时刻状态值的相对误差均约为 $o(t_s^n)$, 因此本文算法的求解精度取决于区间状态转移矩阵的展开式阶数和采样点数。例如, 当微分方程定义区间 $T=2$, 采样点数为 100, 区间状态转移矩阵具有二阶精度时, 相对误差量级为 10^{-6} 。

4 算法性能及仿真分析

4.1 算法精度仿真分析

由于目前无法计算 PSWFs 的精确解, 同时已有的 PSWFs 求解算法难以得到简明的误差表达式, 因而求解精度未知, 无法进行确切的比较。但由第 2 节可知, 本文算法与真值间的误差来源于泰勒级

数展开式的截断误差，具有简明的表达形式，因此，可以在 PSWFs 精确解未知的条件下获得求解误差，便于根据实际需求进行精度控制。

作为对照分析，下面在 $T=2, c=2\pi$ ，采样点数 $N=500$, Legendre 多项式的阶数为 30 的条件下，给出了分别采用 Parr 算法、Legendre 多项式逼近算法以及本文的二阶修正算式所求得零阶 PSWF 时域波形和功率谱，如图 2，图 3 所示。其中，Parr 算法与本文算法具有完全相同的仿真条件，Legendre 多项式阶数满足逼近表示的基本条件 $M \geq 2(\lfloor e \cdot c \rfloor + 1) = 20$ ，具有较高的精度。

从图 2，图 3 中可以看出，本文算法与 Parr 算法所求得的 PSWF 时域波形和功率谱基本一致，而与 Legendre 多项式逼近算法求得的 PSWF 在波形和功率谱上稍有差别，Legendre 多项式逼近算法所得 PSWF 功率谱主瓣宽度比其他算法小，但旁瓣要高出 5 dB。按照图 2 的仿真条件，二阶计算式的相对计算误差为 $\leq 6.4 \times 10^{-8}$ ，已经具有较高的求解精度。此外，以上 3 种算法得到的 PSWF 的主瓣能量聚集度均为 99.98% 以上，具有较高的功率效率。

4.2 复杂度分析

在工程应用中，计算方法的时间和空间复杂度的高低直接决定了波形产生的实时性好坏和对硬件处理水平要求的高低。在高速通信系统中，减小计算量和对存储空间的需求，既可增强波形产生的实时性，又可节约成本。在本文算法中，小区间上状态转移矩阵的求解只需进行简单的 2 维矩阵运算，然后与区间前端时刻状态值相乘作为区间末端时刻的状态值。整个计算过程所占用的存储空间与计算一个时刻状态值所用空间相同，增加区间划分个数不会增加算法对存储空间的需求，因此，本文算法空间复杂度非常低，要明显低于已有 PSWFs 求解方法。

为进一步分析算法的时间复杂度，下面对本文算法、Parr 算法以及 Legendre 多项式逼近算法的

计算量进行比较分析。

当采样点数为 N 时，采用 Parr 算法求解 PSWFs，所需加乘运算次数为 $N^2(N+1)/4$ 。由 M 阶 Legendre 多项式逼近表示 PSWF 需要进行 $40M + N(2M-1) + M^3/4$ 次加乘运算，其复杂度与 N 和 M 均有关。采用本文算法，如选用二阶修正算式则需要 $54N$ 次加乘运算。图 4 为 3 种算法所需计算量与离散采样点数的关系曲线。

由图 4 可知，本文算法的计算量要明显小于 Parr 算法，随着采样点数的增加，优势越来越明显。在采样点数为 150 时，本文算法已经比 Parr 算法的计算量低了两个数量级。采样点数相同时，本文算法与阶数为 20 的 Legendre 多项式逼近算法的计算量相当，随着采样点数的增加，本文的算法的计算量慢慢超过 20 阶 Legendre 多项式逼近算法，但由于 $M=20$ 是满足逼近表示条件的最小值，此时该算法的精度较低，当增大阶数以提高逼近精度时，计算量会显著增加，如 $M=30$ 时，Legendre 多项式逼近算法的计算量已经超过了本文算法。因此，经过综合比较，本文算法的计算复杂度明显低于 Parr 算法和 Legendre 多项式逼近算法。

5 结论

针对已有 PSWFs 近似求解算法计算量大、硬件实现复杂度高和求解精度不可控的问题，本文利用 PSWFs 微分方程定义式，从状态方程求解的角度，采取分段状态转移矩阵逼近求解的方式，提出一种新的 PSWFs 近似求解方法。该方法不仅可以以较低的计算复杂度获得较高的求解精度，同时可以得到与精确值之间的误差。经理论推导，该算法精度取决于时间区间划分个数即采样点数和区间状态转移矩阵展开式的阶数，在每一个离散时间点的求解误差约为 $o(t_s^{n+1})$ 。在相同采样点数的条件下，本文算法所求 PSWFs 时域波形和功率谱与 Parr 算法基本一致，近似计算式阶数取 2 即可获得较高的

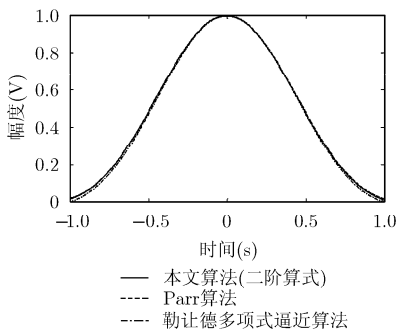


图 2 采用不同算法求得的零阶 PSWF 时域波形

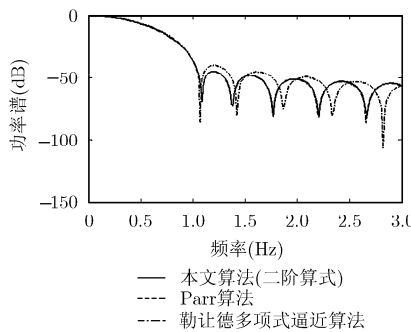


图 3 零阶 PSWF 归一化功率谱

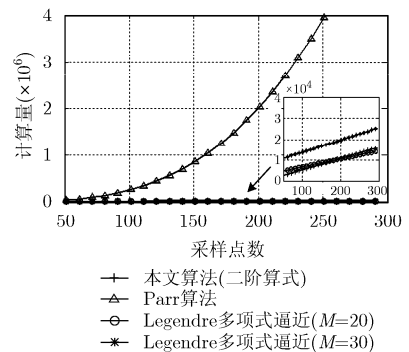


图 4 不同算法计算量比较

精度。在时间和空间复杂度上, 本文算法要明显低于后两者。总体来说, 本文算法计算简便, 运算量低, 易于硬件实现, 特别是可以获得离散时间点上的计算误差, 精度可控, 能够满足不同工程实际需求。

参 考 文 献

- [1] Slepian D and Pollak H O. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty-I[J]. *Bell System Technical Journal*, 1961, 40(1): 43-64.
- [2] Moore I C and Cada M. Prolate spheroidal wave functions, an introduction to the Slepian series and its properties[C]. *Applied Computational Harmonic Analysis*, San Diego: Academic Press, 2004: 208-230.
- [3] 赵志勇, 王红星, 李洪烈, 等. 非正弦波通信时域正交椭圆球面波脉冲设计方法[J]. *电子与信息学报*, 2009, 31(12): 2912-2916.
- Zhao Zhi-yong, Wang Hong-xing, Li Hong-lie, *et al.* Designing method of orthogonal pulse in time domain based on prolate spheroidal wave functions for nonsinusoidal wave communication[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(12): 2912-2916.
- [4] Zhao Hui, Ran Qi-wen, Ma Jing, *et al.* Generalized prolate spheroidal wave functions associated with linear canonical transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(6): 3032-3041.
- [5] Wei Li-ying, Rodney A K, and Tharaka A L. An optimal basis of band-limited functions for signal analysis and design[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(11): 5744-5755.
- [6] Dullaert W, Reichardt L, and Rogier H. Improved detection scheme for chipless RFIDs using prolate spheroidal wave function-based noise filtering[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2011, 10: 472-475.
- [7] Parr B, Cho B, and Wallace K. A novel ultra-wideband pulse design algorithm[J]. *IEEE Communications Letters*, 2003, 7(5): 219-221.
- [8] Xiao H, Rokhlin V, and Yarvin N. Prolate spheroidal wavefunctions, quadrature and interpolation[J]. *Inverse Problems*, 2001, 17(4): 805-838.
- [9] Khare K and George N. Sampling theory approach to prolate spheroidal wave functions[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2003, 36(39): 10011-10021.
- [10] Khare K. Bandpass sampling and bandpass analogues of prolate spheroidal functions[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(7): 1550-1558.
- [11] 王红星, 刘锡国, 赵志勇, 等. 椭圆球面波函数的快速重构算法[J]. *电波科学学报*, 2011, 26(4): 765-770.
- Wang Hong-xing, Liu Xi-guo, Zhao Zhi-yong, *et al.* Fast method of reconstructing prolate spheroidal wave function[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2011, 26(4): 765-770.
- [12] Rokhlin V and Xiao H. Approximate formulae for certain prolate spheroidal wave functions valid for large values of both order and band-limit[J]. *Applied Computational Harmonic Analysis*, 2007, 22(1): 105-123.
- 钟佩琳: 女, 1984年生, 博士生, 研究方向为非正弦波通信理论及应用.
- 王红星: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为现代通信新技术、非正弦波通信、无线光通信理论与技术.
- 赵志勇: 男, 1976年生, 讲师, 研究方向为现代通信新技术、调制解调技术.
- 刘锡国: 男, 1981年生, 讲师, 研究方向为现代通信系统、非正弦波通信.
- 刘传辉: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为现代通信系统、非正弦波通信.