

基于基追踪-Moore-Penrose 逆矩阵算法的稀疏信号重构

张晓伟* 李明 左磊

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

摘要: 压缩感知(Compressed Sensing, CS)稀疏信号重构其本质就是在稀疏约束条件下求解欠定线性方程组, 基于迭代加权 $L-p$ ($0 < p \leq 1, p = 2$) 类范数算法减小重构误差成为近来稀疏信号重构热点之一。该文提出了基追踪-Moore-Penrose 逆矩阵(Basis Pursuit-Moore-Penrose Inverse Matrix, BP-MPIM)算法: (1)由基追踪(Basis Pursuit, BP)算法得到稀疏信号非零元素位置(亦称支撑集, 对应于测量矩阵的列); (2)通过求解由支撑集所对应测量矩阵的子矩阵和 CS 测量值组成的超定线性方程组实现稀疏信号重构, 并证明了由此重构的稀疏信号是其唯一最小二次范数解。仿真的稀疏信号和实测宽带雷达回波信号脉冲压缩结果表明, 和原来算法相比, 新算法具有更小的重构误差, 且误差只存在于其支撑集内。

关键词: 雷达信号处理; 压缩感知(CS); 信号重构; 基追踪(BP); Moore-Penrose 逆矩阵

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)02-0388-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00238

Sparse Signal Reconstruction Based on Basis Pursuit-Moore-Penrose Inverse Matrix

Zhang Xiao-wei Li Ming Zuo Lei

(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: The sparse signal reconstruction with Compressed Sensing (CS) is actually solving a system of underdetermined linear equations within the signal sparsity, of which one focus is to reduce recovery errors by the type of iteratively weighted $L-p$ ($0 < p \leq 1, p = 2$) algorithms recently. The Basis Pursuit-Moore-Penrose Inverse Matrix (BP-MPIM) algorithm is proposed in this paper. First, nonzero element coordinates of the sparse signal are acquired by the basis pursuit algorithm, which are renamed with the sparse signal support set (corresponding with columns of the measure matrix). Then, the sparse signal recovery is solved from a set of superdetermined linear equations, which is composed of the submatrix of the sampling matrix and compressed sensing measurements. At the same time, it is proved that the reconstruction of sparse signals by this new algorithm is the one and only minimize $L-2$ norm. Both simulative sparse signals and pulse compressed data of wideband radar echoes indicate that the new algorithm has less recovery errors than the previous algorithms, which are just in the support set.

Key words: Radar signal processing; Compressed Sensing (CS); Signal reconstruction; Basis Pursuit (BP); Moore-Penrose Inverse Matrix (MPIM)

1 引言

通过各种各样的传感器, 人们可以从自然界中获得不同的信号, 但对于获得的相当多信号, 往往对我们有用的信息是有限的, 这就是信号所具有的稀疏性。例如: 在宽带雷达背景下, 由电磁波理论

知, 回波信号为发射信号和具有有限个散射点目标的响应函数卷积, 它经过匹配滤波后表现为 1 维距离像, 其脉冲压缩结果中较大值是有限的。随着发射信号带宽的增加, 基于传统的香农采样定理的宽带雷达信号处理子系统, 大量的数据给其信号处理实时性带来了较大的压力, 且使其硬件成本逐倍增加。近年来, 文献[1,2]提出的压缩感知(Compressed Sensing, CS)新理论指出当信号非零元素个数远远小于信号的维数时, 可以以较低的码率采样, 完全可以以相当高的概率实现稀疏信号的重构。CS 新理论的出现已经在雷达^[3]、DOA 估计^[4]和 SAR 成像^[5]等领域得到广泛的应用。

2012-03-08 收到, 2012-10-26 改回

国家自然科学基金(61271297, 61272281), 博士点基金(20110203110001), 国防预研基金(9140A01060411DZ0101)和航空科学基金(20110181006)资助课题

*通信作者: 张晓伟 xwzhang@stu.xidian.edu.cn;
weirui928189 @163.com

文献[6]第1次提出了基于 $L-2$ 范数解决估值逼近问题；文献[7]在经典的逼近理论中将 $L-2$ 范数推广到 $L-p(0 < p < \infty)$ ，但是这些算法只适用于被逼近的值全是非零元素，CS理论的提出使得前面所述的 $L-p(0 < p < \infty)$ 范数理论不能直接应用于稀疏信号重构。文献[8]提出了基于 $L-p(0 < p < 1)$ 类范数算法实现稀疏信号重构，但没有理论推导；文献[9]提出了迭代加权 $L-1$ 类范数算法，并给出了大量的实验和实例，和标准的 $L-1$ 范数算法相比，迭代加权 $L-1$ 范数具有更小的重构误差，同样没有给出理论推导；文献[10]给出了在噪声背景下，迭代加权 $L-1$ 范数算法重构稀疏信号的误差，并在每次迭代时更新修正因子，但不包含无噪稀疏信号；文献[11]从零空间特性(Null Space Properties, NSP)出发，提出并证明了迭代加权 $L-2$ 范数算法随着迭代次数的增加是收敛的，从而重构稀疏信号，并将其推广到迭代加权 $L-p(0 < p < 1)$ 类范数算法。但是对于 $L-p(0 < p < 1)$ ，他们指出，此时 $L-p$ 范数为非凸函数，为其局部最小值，并不是全局最小值；文献[12]分析了稀疏信号为块稀疏时，迭代加权 $L-1$ 范数重构的性能优于标准的 $L-1$ 范数算法；文献[13]总结稀疏信号重构迭代加权两类 $L-p(p = 1, 2)$ 范数算法，并分析了不同类型的加权迭代方式。

对于CS稀疏信号的重构，其本质上就是组合优化问题，难以直接求解。基于迭代加权 $L-p(0 < p \leq 1, p = 2)$ 类范数算法可以减少稀疏信号重构误差，但当 $p = 1$ 时还没有严格的理论推导，且计算量较大；当 $0 < p < 1$ 时范数为非凸的，得到局部最小值并非全局最小值；当 $p = 2$ 时，该算法重构稀疏信号计算量小，但重构结果不是其最小二次范数。本文提出了基追踪-Moore-Penrose 逆矩阵(Basis Pursuit-Moore-Penrose Inverse Matrix, BP-MPIM)算法，它分为两个步骤：(1)由基追踪算法得到稀疏信号非零元素的位置(亦称支撑集，对应于测量矩阵的列)；(2)通过求解由支撑集所对应的测量矩阵的子矩阵和CS测量值组成的超定线性方程组实现稀疏信号重构，并证明了由此重构的稀疏信号是其唯一最小二次范数解。仿真的稀疏信号和宽带雷达回波信号脉压结果表明，和原来算法相比，所提出的新算法具有更小的重构误差，且误差只存在于其支撑集内。

2 BP-MPIM 算法及其最小二次范数证明

2.1 $L-1$ 类范数重构算法

由Dohono等人提出的CS新理论，包含了信息论、线性规划和最优化理论，在越来越多的领域得到了更加广泛的应用。该理论指出：如果1维信号

$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbf{R}^N$ 在由基空间(词典) $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M\}^T \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 中线性表示，其中 $\psi_i \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ ，其非零相关系数远远小于其维数，则说信号 \mathbf{x} 在基空间(词典) Ψ 中是稀疏的。对于稀疏信号 \mathbf{x} ，可以由满足有限等容特性(Restricted Isometry Property, RIP)的矩阵 Φ 测量，当测量矩阵 Φ 满足参数为 $(2S, \delta_{2S})$ 的RIP时，其中 $0 < \delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$ ， S 为非零元素个数，通过 $L-1$ 类范数算法，可以以相当高的概率实现稀疏信号的重构，由式(1)表示：

$$\min \|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_1, \mathbf{Y} = \Phi\mathbf{x} = \Phi\Psi\Theta \quad (1)$$

其中 $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{M \times 1}$ ， $\Theta \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ ， Θ 为信号 \mathbf{x} 由基(词典) $\Psi \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 中线性表示的相关系数矩阵， $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为加权矩阵， S, M 和 N 满足 $S \ll M < N$ 。

$L-1$ 类范数算法将组合优化问题转换到线性规划领域，可以通过内点法、单纯形法等求解目标函数的全局最小值，实现稀疏信号重构。对于式(1)，当 $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ (\mathbf{I} 为 $N \times N$ 单位阵)时，稀疏信号由基追踪实现重构，其优势在于需要测量维数少，重构概率高，但其不足之处在于通过线性规划得到全局最小值并不是唯一最小二次范数解；当 $\mathbf{W} \neq \mathbf{I}$ 时，稀疏信号由迭代加权 $L-1$ 类范数实现重构，和基追踪相比，虽然迭代加权 $L-1$ 类范数需要更少测量维数，但依然是通过线性规划得到全局最小值。

2.2 BP-MPIM 算法

针对 $L-1$ 类范数算法重构稀疏信号(Sparse Signal, SS)重构误差大这一问题，本文提出了BP-MPIM算法，它通过计算矩阵的Moore-Penrose逆矩阵求解线性方程组实现稀疏信号重构，具有更小的重构误差。BP-MPIM算法包括两个步骤：(1)由基追踪算法得到稀疏信号非零元素的位置(亦称支撑集，对应于测量矩阵的列)；(2)通过求解由支撑集所对应的测量矩阵的子矩阵和CS测量值组成的超定线性方程组实现稀疏信号重构，如表1所示。

表1 BP-MPIM 算法

BP-MPIM 算法
输入：
CS 测量值 $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_M\} \in \mathbf{R}^M$ ，测量矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ ，稀疏信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ 非零元素的个数 S ；
输出：逼近稀疏信号 $\hat{\mathbf{x}}$ ；
步骤 1 (1)由基追踪算法得到稀疏信号的非零元素的位置(亦称支撑集，对应测量矩阵的列)； $SS = \text{BP}(\mathbf{y}, \Phi)$ ， $\ SS\ _0 = S$ ， $SS_i \in SS, i = \{1, 2, \dots, S\}$ ， $SS \subseteq N, N = \{1, 2, \dots, n\}$ ；
(2)输出：由基追踪算法得到稀疏信号的支撑集 Φ_{SS} ；
步骤 2 (1)计算稀疏信号支撑集 Φ_{SS} 的 Moore-Penrose 逆矩阵： $\Phi_{SS}^+ = (\Phi_{SS}^T \Phi_{SS})^{-1} \Phi_{SS}^T$ ；
(2)重构稀疏信号支撑集的非零元素： $\hat{\mathbf{x}}_{SS} = \Phi_{SS}^+ \mathbf{y}$
重构稀疏信号： $\hat{\mathbf{x}} \mid SS = \hat{\mathbf{x}}_{SS}$

稀疏信号的支撑集可以由下面两种方法得到:

方法 1: 当稀疏信号非零元素个数 S 已知时, 可以通过选取基于基追踪算法重构结果绝对值前 S 个最大值所对应的测量矩阵子矩阵;

方法 2: 当稀疏信号非零元素个数 S 未知时, 选定由基追踪算法重构结果与原稀疏信号 \boldsymbol{x} 之差绝对值大于固定门限 σ_{SS} 时所对应测量矩阵的子矩阵。

2.3 唯一最小二次范数证明

BP-MPIM 算法步骤 1 得到稀疏信号非零元素位置(亦称支撑集, 对应测量矩阵的列), 步骤 2 通过求解由支撑集所对应的测量矩阵的子矩阵和 CS 测量值组成的超定线性方程组实现稀疏信号重构, 即:

$$\boldsymbol{y} = \Phi_{SS} \hat{\boldsymbol{x}}_{SS} \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^{M \times 1}$, $\Phi_{SS} \in \mathbf{R}^{M \times S}$, $\hat{\boldsymbol{x}}_{SS} \in \mathbf{R}^{S \times 1}$, $S \ll M < N$ 。

此时方程组(2)中, 未知变量的个数小于方程组中方程个数, CS 稀疏信号的重构由欠定线性方程组变为超定线性方程组。在证明由 BP-MPIM 算法重构稀疏信号为其唯一最小二次范数解之前, 由 Moore-Penrose 逆矩阵^[4]定义, 先给出下面性质 1 和引理 1:

性质 1 对于矩阵 Φ_{SS} 和其 Moore-Penrose 逆矩阵 Φ_{SS}^+ , 存在下面关系: $\Phi_{SS} \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS} = \Phi_{SS}$, $(\Phi_{SS}^+ \Phi_{SS})^T = [(\Phi_{SS}^T \Phi_{SS})^{-1} \Phi_{SS}^T \Phi_{SS}]^T = \boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}$, \boldsymbol{I} 为 $S \times S$ 的单位阵。

引理 1 对于线性方程组 $\boldsymbol{y} = \Phi_{SS} \hat{\boldsymbol{x}}_{SS}$, 其通解为 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z}$, 其中 \boldsymbol{z} 为一任意的 $\mathbf{R}^{M \times 1}$ 矩阵, \boldsymbol{I} 为 $S \times S$ 的单位阵。

证明 由线性代数理论可知, 对于线性方程组 $\boldsymbol{y} = \Phi_{SS} \hat{\boldsymbol{x}}_{SS}$ 通解可以表示为: $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{c} (\boldsymbol{c} \in N(\Phi_{SS}))$, 其中 \boldsymbol{x}_0 是特解, $N(\Phi_{SS})$ 为 Φ_{SS} 的零空间。从 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z}$ 可知, 取定 Φ_{SS}^+ 时, $\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y}$ 即为其特解; 而任意的 $(\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z} \in N(\Phi_{SS})$ 是 $\Phi_{SS} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的通解(性质 1), 引理 1 得证。

从矩阵理论出发, 式(2)中未知变量 $\hat{\boldsymbol{x}}_{SS}$ 个数为 $S \ll M$, 即线性方程组方程的个数远远大于未知变量的个数, 为超定线性方程组, 我们给出下面定理:

定理 1 对于由式(2)构成的线性方程组, 其唯一最小二次范数解为 $\min \|\hat{\boldsymbol{x}}_{SS}\|_2^2 = \|\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y}\|_2^2$, 其中 $\Phi_{SS}^+ = (\Phi_{SS}^T \Phi_{SS})^{-1} \Phi_{SS}^T$, Φ_{SS}^T 为矩阵 Φ_{SS} 的转置矩阵。

证明 最小二次范数证明:

由引理 1 知, 式(2)的通解为 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z}$, 其中 \boldsymbol{z} 为一任意的 $\mathbf{R}^{M \times 1}$ 矩阵, \boldsymbol{I} 为 $S \times S$ 的单位阵, 则

$$\begin{aligned} \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2^2 &= \|\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z}\|_2^2 \\ &= (\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z})^T (\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z}) \\ &= \|\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y}\|_2^2 + \|(\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z}\|_2^2 + (\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y})^T \\ &\quad \cdot (\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z} + ((\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z})^T \Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

其中 $(\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{I}) \boldsymbol{z} = \mathbf{0}$ (性质 1), 即 $\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2^2 = \|\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y}\|_2^2 + \|(\boldsymbol{I} - \Phi_{SS}^+ \Phi_{SS}) \boldsymbol{z}\|_2^2 \geq \|\Phi_{SS}^+ \boldsymbol{y}\|_2^2$, 最小二次范数得证。

唯一性证明:

在证明其唯一性之前, 先给出 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in R(\Phi_{SS}^T)$, $R(\Phi_{SS}^T)$ 表示 Φ_{SS}^T 的列空间。下面用反证法证明 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in R(\Phi_{SS}^T)$ 。

若 $\tilde{\boldsymbol{x}} \notin R(\Phi_{SS}^T)$, 则由 $\boldsymbol{C} = R(\Phi_{SS}^H) \oplus R^\perp(\Phi_{SS}^H) = R(\Phi_{SS}^H) \oplus N(\Phi_{SS})$ 知, $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \tilde{\boldsymbol{x}}_2$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_1 \in R(\Phi_{SS}^T)$, $\tilde{\boldsymbol{x}}_2 \in N(\Phi_{SS})$ 且 $\tilde{\boldsymbol{x}}_2 \neq \mathbf{0}$, 可得 $\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2 = \|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|^2 + \|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|^2 > \|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|^2$ 。而 $\boldsymbol{y} = \Phi_{SS} \tilde{\boldsymbol{x}} = \Phi_{SS} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 + \Phi_{SS} \tilde{\boldsymbol{x}}_2 = \Phi_{SS} \tilde{\boldsymbol{x}}_1$, 这与刚证明的 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 是其最小二次范数矛盾, 所以 $\tilde{\boldsymbol{x}} \in R(\Phi_{SS}^T)$ 。

若还有 $\tilde{\boldsymbol{x}}_1 \in R(\Phi_{SS}^T)$, 且 $\Phi_{SS} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{y}$, 则 $\Phi_{SS}(\tilde{\boldsymbol{x}} - \tilde{\boldsymbol{x}}_1) = \Phi_{SS} \tilde{\boldsymbol{x}} - \Phi_{SS} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 = \mathbf{0}$, 即 $\tilde{\boldsymbol{x}} - \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \in N(\Phi_{SS}) = R^\perp(\Phi_{SS}^T)$; 又 $\tilde{\boldsymbol{x}} - \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \in R(\Phi_{SS}^T)$; 故 $\tilde{\boldsymbol{x}} - \tilde{\boldsymbol{x}}_1 \in R^\perp(\Phi_{SS}^T) \cap R(\Phi_{SS}^T)$, 即 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}_1$, 唯一性得证。定理 1 得证。

2.4 计算量分析

BP-MPIM 算法包括两个步骤, 步骤 1 由基追踪算法得到稀疏信号非零元素支撑集, 其运算量为 $O(N^3)$; 步骤 2 通过求解超定线性方程组实现稀疏信号重构, 其中计算稀疏信号支撑集 Φ_{SS} 的 Moore-Penrose 逆矩阵: $\Phi_{SS}^+ = (\Phi_{SS}^T \Phi_{SS})^{-1} \Phi_{SS}^T$, 运算量为 $O(S \times \log(S))$, 重构稀疏信号支撑集的非零元素计算量为 $O(S)$, 即新算法总的运算量为 $O(N^3 + S \times (\log(S) + 1))$ 。和基追踪算法相比, 新算法只增加了较少 $O(S \times (\log(S) + 1))$ 的运算量, 但其重构误差小的多。迭代加权 $L-1$ 范数算法重构稀疏信号其运算量为 $O(KN^3)$, 迭代加权 $L-2$ 范数算法其运算量为 $O(KSMN)$, 迭代加权 $L-p$ ($p=1, 2$) 算法减少稀疏信号重构误差, 随着迭代次数 K 增加, 其运算量逐倍增大。4 类算法的计算量如表 2 所示。

表 2 4 类算法运算量

BP	IWL1	IWL2	BP-MPIM
$O(N^3)$	$O(KN^3)$	$O(KSMN)$	$O(N^3 + S \times (\log(S) + 1))$

3 仿真的稀疏信号和雷达回波脉压结果重构实验

仿真实验包括对仿真的稀疏信号和实测宽带雷达回波信号脉冲压缩结果重构实验, 分别选取高斯

随机矩阵和伯努利矩阵作为测量矩阵进行重构误差比较。

3.1 仿真的稀疏信号重构

仿真的稀疏信号重构实验选取 2 类稀疏信号：第 1 类稀疏信号(非零元素幅度服从 $\{-1,1\}$ 均匀分布的稀疏信号)和第 2 类稀疏信号(非零元素幅度服从 $N(0,1)$ 的高斯正态分布的稀疏信号)。2 类稀疏信号分别在 高斯随机测量矩阵和伯努利测量矩阵情形下进行重构误差比较。仿真实验参数选取文献[11]中稀疏信号重构实验参数以作比较，分别对基追踪算法、文献[10]所提出的迭代加权 $L-1$ 范数算法、文献[11]所提出的迭代加权 $L-2$ 范数算法和 BP-MPIM 算法比较，其中基追踪算法简称为 BP(Basis Pursuit)，迭代加权 $L-1$ 范数算法简称为 IWL1(Iteratively Weighted $L-1$ norm)，迭代加权 $L-2$ 范数算法简称为 IWL2(Iteratively Weighted $L-2$ norm)。该仿真实验的参数如表 3 所示， S 为非零元素个数， M 为 CS 测量维数， N 为稀疏信号的维数， $\rho = S/N$ 为稀疏度； $K1$ 为 IWL1 迭代的次数， ϵ_i 为 IWL1 每次迭代修正因子，其中 $i=1,2,\dots,6$ ； $K2$ 为 IWL2 迭代次数，误差选取 $\text{err} = (\hat{x} - x) / \|x\|_2$ 相对误差。

图 1 和图 2 是当测量矩阵分别为高斯测量矩阵和伯努利测量矩阵，4 种算法 1000 次蒙特-卡罗实验时，第 1 类稀疏信号重构相对误差比较。

表 3 实验 1 的仿真参数

S	M	N	$\rho = S/N$	$K1$	ϵ_i	$K2$
45	250	1500	45/1500	6	$100 \times i$	80

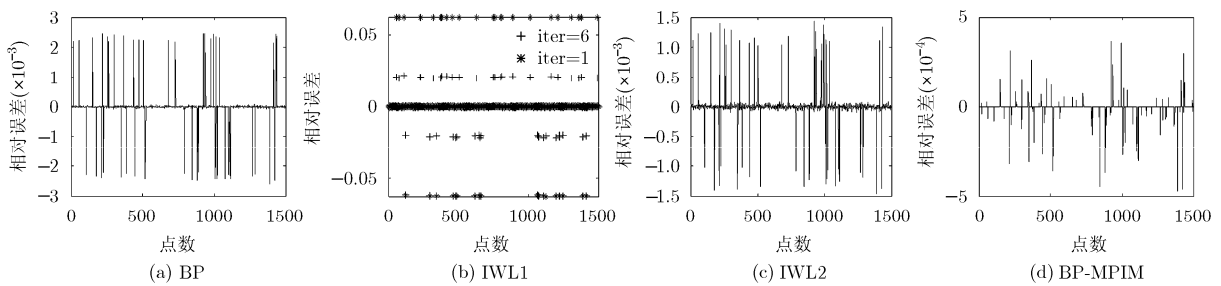


图 1 高斯随机测量矩阵

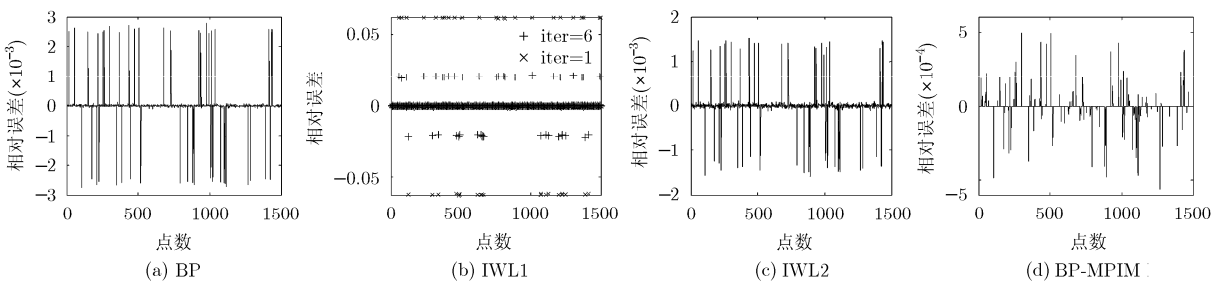


图 2 伯努利测量矩阵

当测量矩阵为高斯随机测量矩阵时，从图 1 可知，BP-MPIM 算法其重构相对误差最小，误差数量级为 10^{-4} ，而基追踪算法和 IWL2 算法其重构相对误差为 10^{-3} 的数量级上，但 IWL1 算法其重构相对误差最大，其误差数量级为 10^{-2} 。当测量矩阵为伯努利测量矩阵时，从图 2 可知，BP-MPIM 算法其重构相对误差最小，误差数量级为 10^{-4} ，而 BP 算法和 IWL2 算法重构相对误差数量级为 10^{-3} ，但 IWL1 重构相对误差最大，误差数量级为 10^{-2} 。从图 1 和图 2 可知，不管测量矩阵为高斯随机测量矩阵还是伯努利测量矩阵，BP-MPIM 算法重构相对误差都是最小的，且其误差只存在与支撑集内，而在稀疏信号支撑集外不存在误差，但其他算法的重构误差存在与整个信号空间；BP 算法和 IWL2 算法其重构相对误差较大；IWL1 算法随着迭代次数的增加，相对误差逐渐变小，但是代价为成倍增长的运算量。

图 3 和图 4 是当测量矩阵分别为高斯测量矩阵和伯努利测量矩阵，4 种算法 1000 次蒙特-卡罗实验时，第 2 类稀疏信号重构相对误差比较。

当测量矩阵为高斯随机测量矩阵时，从图 3 中可知，BP-MPIM 算法其重构相对误差最小，误差数量级为 10^{-5} ，而 BP 算法重构相对误差数量级为 10^{-3} ，IWL2 算法重构相对误差数量级为 10^{-4} ，IWL1 算法重构相对误差数量级为 10^{-2} ；当测量矩阵为伯努利测量矩阵时，从图 4 可知，BP-MPIM 算法其重构相对误差最小，误差数量级为 10^{-5} ，BP 算法重构相对误差数量级为 10^{-3} ，IWL2 算法重构相对误差

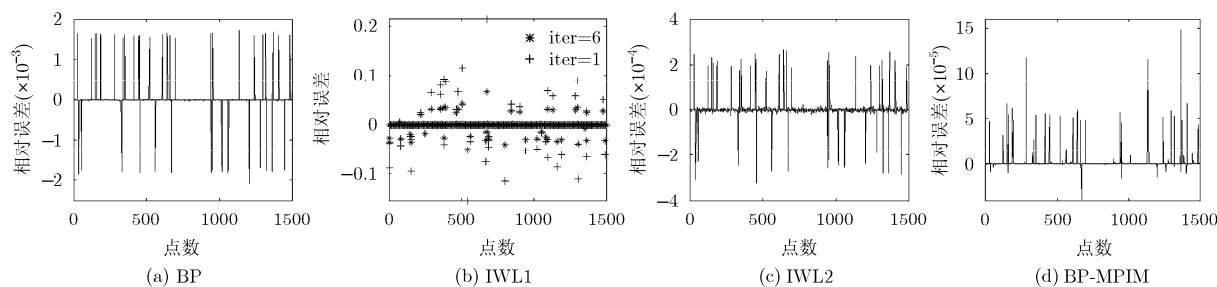


图3 高斯随机测量矩阵

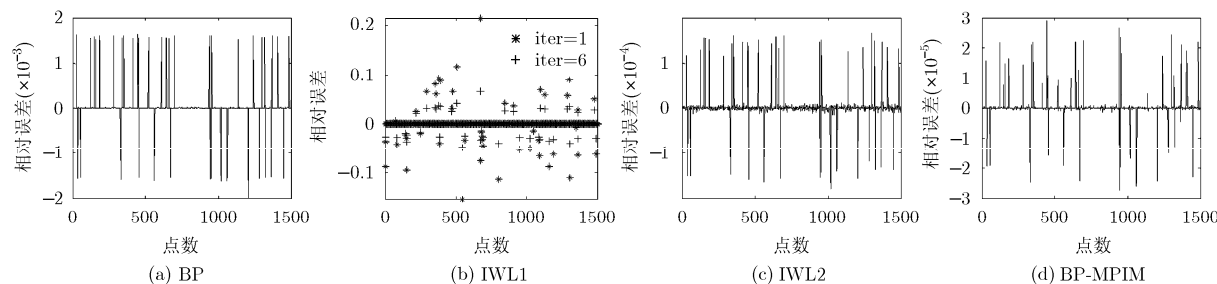


图4 伯努利测量矩阵

数量级为 10^{-4} ，而 IWL1 算法其重构相对误差数量级为 10^{-2} (迭代 6 次时)。从图 3 和图 4 知，不管测量矩阵为高斯随机矩阵还是伯努利测量矩阵，BP-MPIM 算法其重构相对误差最小，BP 算法和 IWL2 算法重构相对误差较大；IWL1 算法随着迭代次数的增加，其重构相对误差变小，同第 1 类稀疏信号一样，代价为逐倍增长的运算量。

3.2 宽带雷达回波信号脉压结果重构实验

在宽带雷达背景下，随着发射信号带宽的增加，目标不能看做点目标，而应当视为多个散射点目标，其脉冲压缩结果表现为 1 维距离像。图 5 为实验选取某宽带雷达在某次实验中录取的回波数据和脉冲压缩结果，为了便于 CS 重构，将该脉冲压缩结果进行以下处理：归一化、选取脉冲压缩结果最大值为中心的 2500 采样点和将选取小于 0.005 值的数据置零。对于实测的宽带雷达回波信号脉冲压缩结果，图 6 和图 7 给出了在高斯随机测量矩阵和伯努利测量矩阵时，4 种算法的重构相对误差，雷达和实验的参数如表 4 所示，参数含义同表 3。

图 6 和图 7 是当测量矩阵分别为高斯随机测量矩阵和伯努利测量矩阵，4 种算法 1000 次蒙特-卡罗实验时，对所选取的脉冲压缩结果重构相对误差比较。

当测量矩阵为高斯随机测量矩阵时，从图 6 可知，BP-MPIM 算法的重构相对误差最小，误差数量级为 10^{-4} ，而 BP 算法和 IWL2 算法重构相对误差数量级为 10^{-3} ，IWL1 算法重构相对误差数量级为

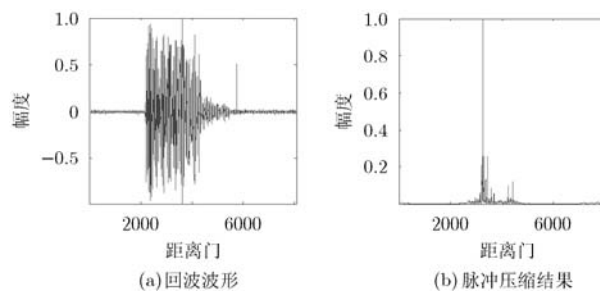


图5 重构实验所选取的实测数据

10^{-2} ；当测量矩阵为伯努利测量矩阵时，从图 7 可以看出，BP-MPIM 算法的重构相对误差依然是最小的，误差数量级为 10^{-5} ，而 BP 算法和 IWL2 算法重构相对误差数量级为 10^{-4} ，IWL1 算法重构相对误差数量级为 10^{-2} 。从图 6 和图 7 可知，测量矩阵为伯努利测量矩阵时，4 种算法的重构相对误差都小于高斯随机测量矩阵；BP-MPIM 算法重构相对误差最小，BP 算法和 IWL2 算法重构相对误差较大，而 IWL1 算法重构相对误差最大。

4 结束语

CS 新理论的提出在许多领域得到了广泛的应用，基于迭代加权 $L-p$ ($0 < p \leq 1, p = 2$) 类范数重构算法可以减小重构误差。本文提出的 BP-MPIM 算法通过求解支撑集所对应的测量矩阵的子矩阵和 CS 的测量值组成的超定线性方程组实现稀疏信号重构，并证明了由此重构的稀疏信号为其唯一最小二次范数解。仿真的稀疏信号和实测宽带雷达回波

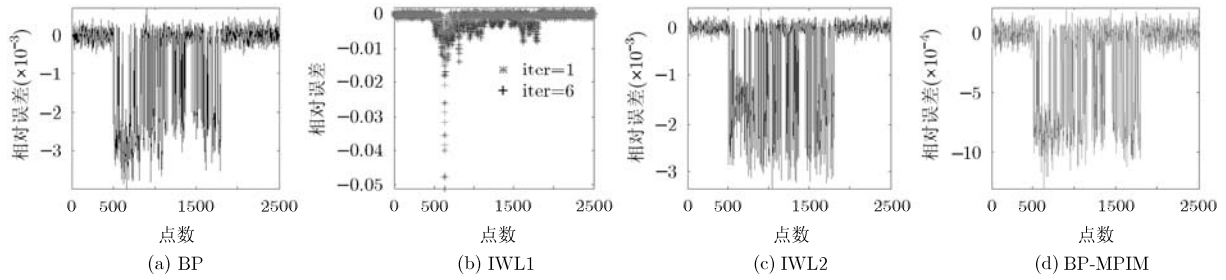


图 6 高斯随机测量矩阵

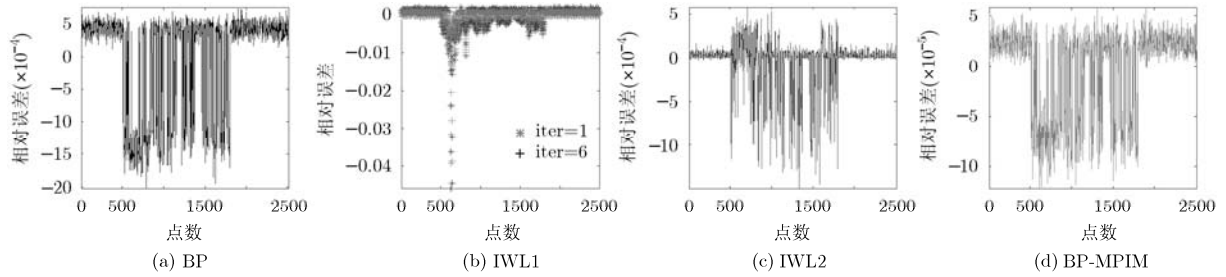


图 7 伯努利测量矩阵

表 4 实验 2 主要参数

宽带雷达参数			S	M	N	$\rho = S / N$	$K1$	ε_i	$K2$
波段	带宽	采样频率							
X	1 GHz	2 GHz	626	1500	2500	626/2500	6	$100 \times i$	80

信号脉压结果重构实验表明，不管测量矩阵为高斯测量矩阵还是伯努利测量矩阵，新算法的重构相对误差和其它的算法相比都是最小，且新算法重构误差只存在于其支撑集内，这对 CS 稀疏信号重构具有重要意义。

参考文献

[1] Candès E, Romberg J, and Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.

[2] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.

[3] 贺亚鹏, 王克让, 张劲东, 等. 基于压缩感知的伪随机多相码连续波雷达[J]. *电子与信息学报*, 2011, 33(2): 418-423.
He Y P, Wang K R, Zhang J D, et al. Compressive sensing based pseudo-random multi-phase cw radar[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(2): 418-423.

[4] Zhang M, Zhi T, and Zhou Y. Direction-of-arrival estimation of wideband signals via covariance matrix sparse representation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4256-4270.

[5] 徐建平, 皮亦鸣. 压缩感知 SAR 成像中的运动补偿[J]. *电子与信息学报*, 2012, 34(2): 294-299.
Xu J P and Pi Y M. Motion compensation for compressive sensing SAR imaging[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(2): 294-299.

[6] Lawson C L. Contributions to the theory of linear least maximum approximation[D]. [Ph. D. dissertation], University of California, 1961.

[7] Cline A K. Rate of convergence of Lawson's algorithm[J]. *Mathematic of Computation*, 1972, 26(2): 167-176.

[8] Chartand R. Exact reconstructions of sparse signals via nonconvex minimization[J]. *IEEE Signal Processing Letter*, 2007, 14(10): 707-710.

[9] Candès E, Wakin M, and Boyd S. Enhancing sparsity by reweighted L_1 minimization[J]. *Journal Fourier Annual Application*, 2008, 14(5): 877-905.

[10] Needell D. Topics in compressed sensing[D]. [Ph. D. dissertation], University of California, 2009.

[11] Daubechies I, DeVore R, Fornasier M, et al. Iteratively re-weighted least squares minimization for sparse signal recovery[J]. *Communication Pure Application Mathematics*, 2010, 63(1): 1-38.

[12] Khajehnejad M A, Xu W, Avestimehr A S, et al. Analyzing weighted L_1 minimization for sparse recovery with nonuniform sparse models[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(5): 1985-2001.

[13] Wipf D and Nagarajan S. Iterative reweighted L_1 and L_2 methods for finding sparse solutions[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 317-329.

[14] Horn R A and RJohnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge University Press, 1985.

张晓伟: 男, 1983年生, 博士生, 研究方向为宽带雷达信号处理、压缩感知。

李明: 男, 1965年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为宽带信号实时处理与检测及多源信息融合。

左磊: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为微弱目标检测。