第 34 卷第 9 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.34No.9
2012 年 9 月 Journal of Electronics & Information Technology Sept. 2012

基于稀疏互质电磁矢量阵列的 MUSIC 算法

邵 华* 苏卫民 顾 红 王 灿
(南京理工大学电子工程与光电技术学院 南京 210094)

摘 要：为增加传统 MUSIC 算法可分辨的信号源数，该文构造了一对具有互质关系的 2 维稀疏电磁矢量阵列，并基于此阵列提出了一种基于 3 维平滑的 MUSIC 算法。该算法利用两个阵列间的互质关系形成具有更多自由度的互质差合成阵列，并基于 3 维(2 维空域加极化域)平滑算法恢复其自相关矩阵的秩，达到应用于传统 MUSIC 算法的目的。该算法的最大优势是仅使用二阶统计量即可系统地增加了原阵列的自由度。计算机仿真结果表明所提算法能估计多于物理阵元数的信号且分辨率高。

关键词：2D-DOA 估计；2 维电磁矢量阵列；稀疏互质；3 维平滑算法

中图分类号: TN911.7 **文献标识码**: A **文章编号**: 1009-5896(2012)09-2033-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.00021

MUSIC Algorithm Based on Sparse Coprime Electromagnetic Vector Arrays

Shao Hua Su Wei-min Gu Hong Wang Can
(*School of Electronic Engineering and Optoelectronic Technology*,
Nanjing University of Science and Technology, *Nanjing* 210094, *China*)

Abstract: To increase signal number distinguished by traditional MUSIC algorithm, this paper proposes a MUSIC algorithm based on three-dimensional smoothing by a coprime pair of two-dimensional sparse electromagnetic vector arrays. The coprime relationship between two arrays is used in the algorithm to generate a coprime co-array with more degrees of freedom. And the rank of its autocorrelation matrix is restored by three-dimensional (two-dimensional spatial domain and polarization domain) smoothing algorithm in order to apply to the traditional MUSIC algorithm. A major advantage of this method is that the freedom of the original array is also systematically increased by even using second-order statistics. Computer simulation results show that the proposed algorithm can estimate the number of signals more than the number of physical array elements and have high resolution.

Key words: 2D-DOA estimation; Two-dimensional electromagnetic vector array; Sparse and coprime; Three-dimensional smooth algorithm

1 引言

与传统的标量传感器不同，电磁矢量传感器(EmVs)可以同时接收空间电磁波信号的3个电场信号和 3 个磁场信号。因此，与标量阵相比，EmVs 阵列能获取目标信号更多的信息，具有更高的测向精度和分辨率，近十几年已成为国内外学者研究的热点[1,2]。尽管如此，针对 EmVs 阵列，基于二阶统计量的测向算法能分辨信号数仅为 $\overline{M}+1$ [2,3]，其中 $\overline{M}$ 为阵元数。虽然可以通过四阶累积量构造虚拟阵元[3−5]来提高阵列自由度，但是其巨大的计算负担而使其难以应用于实时处理。针对以上问题，文献[6]构造了一对具有互质关系的均匀线性标量阵，这两个阵列的阵元间距分别为 Md 和 Nd (整数 M 和 N 互质，d 是关于入射信号波长的基本间距)。通过考虑它们输出信号并集的自关矩阵，形成自由度为 $O(MN)$ 的互质差合成均匀标量线阵，而仅仅使用 $2N+M$ 或 $N+2M$ 个物理阵元。此外，为充分利用这些自由度，他们还建议了一种基于 1 维空间平滑的 DOA 估计算法[6,7]，该算法能够得到互质差合成线阵接收信号的自相关矩阵，避免了四阶累积量的使用。随后，文献[8,9]将该方法扩展到 2 维标量阵，利用分别分布于稀疏格子 $\boldsymbol{M}$ 和稀疏格子 $\boldsymbol{N}$ 的两个标量面阵产生密集的互质差合成均匀面阵。

尽管它们在增加阵列自由度方面讨论得较为详

2012-01-06 收到，2012-04-17 改回
南京理工大学自主科研专项计划(2010ZDJH05)，国家部委基金和高等学校博士学科点专项科研基金(20113219110018)资助课题
*通信作者：邵华 tongyishaohua@163.com

细，但都是针对标量阵列，而关于矢量阵列在这方面的应用未见到相关研究。为此，本文针对 2 维 EmVs 阵列，提出一种基于 3 维平滑的 MUSIC 算法。首先给出一对具有互质关系的 2 维稀疏 EmVs 阵列，利用两个阵列间的互质关系形成具有更多自由度的互质差合成阵列，并基于 3 维平滑算法恢复其自相关矩阵的秩，达到应用于传统 MUSIC 算法的目的。本算法的最大优势是仅使用二阶统计量就可系统地增加原阵列的自由度，突破了传统 MUSIC 算法中测向数不大于 $\overline{M}+1$ 的限制。

2 差合成 EmVs

考虑一个波长为 λ 的窄带远场信号 $s(t)$ 入射到一个由 $\overline{M}$ 个 EmVs 组成的 2 维 EmVs 阵列上，根据 EmVs 接收信号模型，可得 6×1 维 EmVs 的导向矢量[1,2]为

$$\boldsymbol{a}\overset{\text{def}}{=}[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Theta}(\theta,\phi)\,\boldsymbol{g}(\gamma,\eta) \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{\Theta}(\theta,\phi)=[\boldsymbol{\chi}_1,\boldsymbol{\chi}_2]$，$\boldsymbol{g}(\gamma,\eta)=[\sin\gamma e^{j\eta},\cos\gamma]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\chi}_1=[\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}(\theta,\phi),\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}(\theta,\phi)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\chi}_2=[\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}(\theta,\phi),-\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}(\theta,\phi)]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_1(\theta,\phi)=[\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_2(\theta,\phi)=[-\sin\phi,\cos\phi,0]^{\mathrm{T}}$，$0\le\phi<2\pi$ 和 $0\le\theta<\pi$ 分别表示入射信号的方位角和俯仰角，$0\le\gamma<\pi/2$ 和 $-\pi\le\eta<\pi$ 为入射信号的极化参数。对第 $\overline{m}$ 个 EmVs，$\overline{m}=1,\cdots,\overline{M}$，以第 1 个 EmVs 为参考的空间相位因子为

$$q_{\overline{m}}(\theta,\phi)\triangleq e^{j2\pi\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\overline{m}}/\lambda} \tag{2}$$

其中 $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵转置，$\boldsymbol{U}=[u,v]^{\mathrm{T}}$，$u=\sin\theta\cos\phi$ 和 $v=\sin\theta\sin\phi$ 分别表示入射信号 x 轴和 y 轴方向余弦，$\boldsymbol{V}_{\overline{m}}\in R^2$ 表示第 $\overline{m}$ 个 EmVs 的 2 维坐标。对第 $\overline{m}$ 个 EmVs，其采样矢量为

$$\boldsymbol{x}_{\overline{m}}(t)=\boldsymbol{a}\cdot q_{\overline{m}}(\theta,\phi)\cdot s(t) \tag{3}$$

假定入射信号 $s(t)$ 是功率为 σ_s^2 的广义平稳信号，那么第 $\overline{m}_1$ 和第 $\overline{m}_2$ 个 EmVs 接收信号 6×6 维的互相关矩阵为

$$E[\boldsymbol{x}_{\overline{m}_1}(t)\cdot\boldsymbol{x}_{\overline{m}_2}^{\mathrm{H}}(t)]=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}e^{j2\pi\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{V}_{\overline{m}_1}-\boldsymbol{V}_{\overline{m}_2})/\lambda}\sigma_s^2 \tag{4}$$

其中 $(\cdot)^{\mathrm{H}}$ 表示矩阵共轭转置，$1\le\overline{m}_1$，$\overline{m}_2\le\overline{M}$。向量化式(4)后可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{\overline{m}_1,\overline{m}_2}&=\mathrm{Vec}\{E[\boldsymbol{x}_{\overline{m}_1}(t)\cdot\boldsymbol{x}_{\overline{m}_2}^{\mathrm{H}}(t)]\}\\&=(\boldsymbol{a}^*\otimes\boldsymbol{a})e^{j2\pi\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{V}_{\overline{m}_1}-\boldsymbol{V}_{\overline{m}_2})/\lambda}\sigma_s^2\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{Z}_{\overline{m}_1,\overline{m}_2}$ 是 36×1 维的向量，$\otimes$ 表示 Kronecker 积，$(\cdot)^*$ 表示共轭。式(5)的含义是：首先，$\boldsymbol{V}_{\overline{m}_1}-\boldsymbol{V}_{\overline{m}_2}$ 在空间上形成差合成传感器(虚拟标量传感器)；然后，$\boldsymbol{a}^*\otimes\boldsymbol{a}$ 在极化域构造差合成 EmVs，即 $\boldsymbol{Z}_{\overline{m}_1,\overline{m}_2}$ 相当于表示 6 个权值不同，但都位于 $\boldsymbol{V}_{\overline{m}_1}-\boldsymbol{V}_{\overline{m}_2}$ 坐标位置处的差合成 EmVs 接收信号 σ_s^2 时的输出。

进一步，上述 2 维 EmVs 阵列输出信号的自相关矩阵能够达到 6 个权值不同、分布相同的差合成 EmVs 阵列输出信号时的效果，其中阵元位置取集合 S_{du} 中的元素。集合 S_{du} 是由差值集合 $S_{\mathrm{diff}}=\{\boldsymbol{V}_{\overline{m}_1}-\boldsymbol{V}_{\overline{m}_2},1\le\overline{m}_1,\overline{m}_2\le\overline{M}\}$ 中不同元素组成。很明显，原阵列中阵元分布不同产生的差合成阵列自由度不同，最多可达 $\overline{M}(\overline{M}-1)$，因而合理地布置物理 EmVs 是原阵列自由度增加程度的关键。下一节将利用两个具有互质关系的 2 维稀疏 EmVs 阵列，系统地增加互质差合成 EmVs 阵列(后文定义)的自由度，并且为适用于后文的 MUSIC 算法，使其阵元在矩形范围内均匀无孔地分布于密集格子。

3 两个具有互质关系的 2 维稀疏 EmVs 阵列

因为后文中阵元的分布采用格子理论进行描述，所以先给出这方面的一些基本概念[10,11]。在 K 维实空间中，任意向量可由一组基向量线性表示，这些线性无关的向量组成的矩阵 $\boldsymbol{V}$ 称为生成矩阵。以整数为系数所有基向量线性组合的集合 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{v}$，称为格子，记为 $\mathrm{LAT}(\boldsymbol{V})$，其中 $\boldsymbol{v}$ 表示 $K\times1$ 维的整数向量。当 $\boldsymbol{v}\in[0,1)^K$ 时，$\boldsymbol{V}\boldsymbol{v}$ 表示离原点距离小于任何其它格子点的点集合，称为基本晶格，记为 $\mathrm{FPD}(\boldsymbol{V})$，其面积为 $\det(\boldsymbol{V})$，即生成矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的行列式。进一步，定义格子密度为基本晶格面积的倒数，其表达式为 $D(\Lambda)=1/\det(\boldsymbol{V})$，它反映格子点阵在空间中的分布密度。当 $\boldsymbol{v}\in(-1,1)^K$ 时，$\boldsymbol{V}\boldsymbol{v}$ 表示对称晶格，记为 $\mathrm{SPD}(\boldsymbol{V})$。

考虑两个 2×2 的非奇异对角矩阵 $\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}\{M_1,M_2\}$ 和 $\boldsymbol{N}=\mathrm{diag}\{N_1,N_2\}$，前者由 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}$ 产生格子 $\boldsymbol{M}$，后者由 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{m}$ 生成格子 $\boldsymbol{N}$，其中 $\boldsymbol{n}=[n_1,n_2]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{m}=[m_1,m_2]^{\mathrm{T}}$ 是 2 维整数向量。文献[9]给出如下定理 1。

定理 1 假设矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 满足交换($\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}$)和互质关系，那么

(1) $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 取所有整数向量时，向量差 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{m}$ 也取所有整数向量；

(2) 当 $\boldsymbol{n}\in\mathrm{FPD}(\boldsymbol{N})$ 和 $\boldsymbol{m}\in\mathrm{FPD}(\boldsymbol{M})$ 时，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{m}$ 表示唯一的整数向量；

(3)当 $\boldsymbol{n}\in\mathrm{FPD}(\boldsymbol{N})$ 和 $\boldsymbol{m}\in\mathrm{FPD}(\boldsymbol{M})$ 时，整数向量 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{m}$ 是不同的，除非 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}$。

由定理 1 可知，当 $\boldsymbol{n}\in\mathrm{FPD}(\boldsymbol{N})$ 和 $\boldsymbol{m}\in\mathrm{FPD}(\boldsymbol{M})$ 时，向量差 $\boldsymbol{k}$ 仅表示 $M_1M_2N_1N_2$ 个不同向量，然而后文的 MUSIC 算法要求产生 $(2M_1N_1-1)(2M_2N_2-1)$ 个不同的向量且均匀无孔地分布在矩形范围。为此给出如下定理，它表明通过扩大 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 的取值范围可以实现以上要求。

定理 2 假设矩阵 $\boldsymbol{M}=\mathrm{diag}\{M_1,M_2\}$ 和 $\boldsymbol{N}=$

$\mathrm{diag}\{N_1, N_2\}$ 满足互质关系，并且考虑向量差值 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{m}$，其中 $\boldsymbol{n}=[n_1,n_2]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{m}=[m_1,m_2]^{\mathrm{T}}$。满足下述条件之一时，$\boldsymbol{k}$ 能产生 $\{\boldsymbol{MNv}, \boldsymbol{v}=[v_1,v_2]^{\mathrm{T}}, -1<v_1<1, 0\le v_2<1\}$ 范围内的所有整数向量。

(1) $\boldsymbol{m}\in \mathrm{FPD}(\boldsymbol{M})$，$-N_1<n_1<2N_1$ 和 $0\le n_1<2N_2$；

(2) $\boldsymbol{n}\in \mathrm{FPD}(\boldsymbol{N})$，$-M_1<m_1<2M_1$ 和 $-M_2<m_1<M_2$。

定理 2 的证明略。很明显，定理 2 中两个条件要求的物理阵元数不同，实际中可以根据具体情况选择需要阵元较少的条件。为简化叙述，后文的讨论以条件 2 为例。不难证明，在定理 2 中如果考虑 $\boldsymbol{k}$ 和 $-\boldsymbol{k}$ 时，它们能够产生 $\mathrm{SPD}(\boldsymbol{MN})$ 范围内的所有整数向量。为此，我们考虑 N_1N_2 个 EmVs 和 $(3M_1-1)\cdot(2M_2-1)$ 个 EmVs，前者按 $\{\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}d, \boldsymbol{n}\in \mathrm{FPD}(\boldsymbol{N})\}$ 分布于格子 $\boldsymbol{M}$，后者按 $\{\boldsymbol{N}\boldsymbol{m}d, -M_1<m_1<2M_1, -M_2<m_1<M_2\}$ 形式分布于格子 $\boldsymbol{N}$，那么它们输出信号并集的自相关矩阵(指数项中包含 $\boldsymbol{k}$ 和 $-\boldsymbol{k}$)可以构造 6 个分布相同、权值不同的差合成 EmVs 阵列，其中每个阵列中阵元位置以 $\{\boldsymbol{k}d, \boldsymbol{k}\in \mathrm{SPD}(\boldsymbol{MN})\}$ 的形式存在，称这 6 个阵列的集合为互质差合成 EmVs 阵列。由格子密度定义可知，格子 $\boldsymbol{k}$ 比格子 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 更加密集，这就说明两个稀疏 EmVs 阵列能够合成更加密集的 EmVs 阵列，图 1 给出了该过程的示意图，其中实圆圈表示两个稀疏 EmVs 阵列的阵元，6 个密集网格表示互质差合成 EmVs 阵列。

4　基于 3 维平滑的 MUSIC 算法

经前面分析可知，两个稀疏 EmVs 阵列可以在原点处共用同一阵元，称共用原点处阵元的这两个阵列组成的并集为 2 维稀疏互质 EmVs 阵列，同时

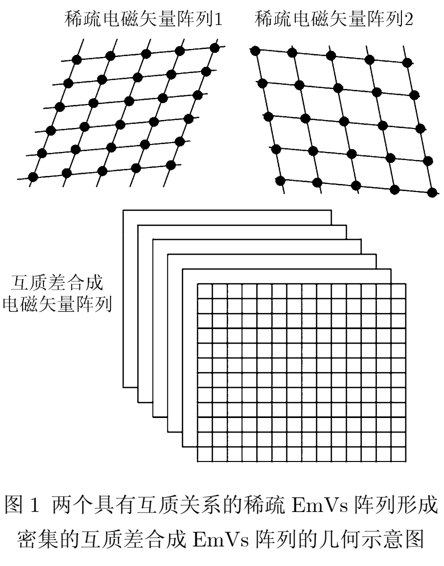

图 1　两个具有互质关系的稀疏 EmVs 阵列形成密集的互质差合成 EmVs 阵列的几何示意图

为了避免 DOA 估计模糊，选择 $d=\lambda/2$。考虑有 D 个独立窄带远场信号入射到上述阵列，设信号入射方向分别为 $(\theta_1,\phi_1),\cdots,(\theta_D,\phi_D)$，其中 $0\le\phi_i<2\pi$ 和 $0\le\theta_i<\pi$ 分别表示第 i 个入射信号的方位角和俯仰角，$i=1,\cdots,D$。以原点处的阵元为参考，各信号在参考点的复包络分别为 $s_1(t),\cdots,s_D(t)$，那么阵列的第 k 次快拍为

$$\boldsymbol{y}(k)=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{s}(k)+\boldsymbol{\eta}(k) \tag{6}$$

式(6)中

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{Q}\odot\boldsymbol{A} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_D] \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_D] \tag{9}$$

$$\boldsymbol{q}_i=\left[e^{j2\pi\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_1/\lambda},\cdots,e^{j2\pi\boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_L/\lambda}\right]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{s}(k)=[s_1(k),\cdots,s_D(k)]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\eta}(k)=[\eta_1(k),\cdots,\eta_L(k)]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

其中阵元数 $L=(3M_1-1)(2M_2-1)+N_1N_2-1$，$\odot$ 表示 Khatri-Rao 积(其对应列进行 Kronecker 积)。噪声 $\boldsymbol{\eta}(k)$ 假定为平稳、时间和空间都互不相关的高斯白噪声，且与信号相互独立。信号也假设为平稳、时间和空间都互不相关，以便信号向量 $\boldsymbol{s}(k)$ 的自相关矩阵是对角阵。基于以上模型，阵列输出信号的自相关矩阵为

$$\boldsymbol{R}_{yy}=E[\boldsymbol{y}(k)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(k)]=(\boldsymbol{Q}\odot\boldsymbol{A})\boldsymbol{R}_{ss}(\boldsymbol{Q}\odot\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{6L} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{ss}=\mathrm{diag}\{\sigma_{s,1}^2,\cdots,\sigma_{s,D}^2\}$，$\sigma_{s,i}^2$ 表示第 i 个入射信号的功率，σ_n^2 表示 EmVs 中单个分量的接收噪声功率。实际中，只能根据阵列的 $\bar{K}$ 个快拍数据来计算自相关矩阵的估计值

$$\widehat{\boldsymbol{R}}_{yy}=\frac{1}{\bar{K}}\sum_{k=1}^{\bar{K}}\boldsymbol{y}(k)\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}(k) \tag{14}$$

对式(13)进行向量化，经简单整理后得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}&=\mathrm{Vec}(\boldsymbol{R}_{yy})\\&=\underbrace{[\boldsymbol{q}_1^*\otimes\boldsymbol{a}_1^*\otimes\boldsymbol{q}_1\otimes\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_D^*\otimes\boldsymbol{a}_D^*\otimes\boldsymbol{q}_D\otimes\boldsymbol{a}_D]}_{\boldsymbol{G}}\\&\quad\cdot\boldsymbol{p}+\sigma_n^2\tilde{\boldsymbol{i}}_n\end{aligned} \tag{15}$$

式中 $\boldsymbol{p}=[\sigma_{s1}^2,\cdots,\sigma_{sD}^2]^{\mathrm{T}}$，$\tilde{\boldsymbol{i}}_n=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_{6L}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{e}_l$ 是第 l 个元素为 1、其余元素为 0 的 $6L\times1$ 维列向量。比较式(6)和式(15)可知，$\boldsymbol{z}$ 相当于阵列导向矩阵为 $\boldsymbol{G}$ 的阵列接收入射信号向量为 $\boldsymbol{p}$ 时的输出，并且阵列接收噪声为 $\sigma_n^2\tilde{\boldsymbol{i}}_n$ 的确定噪声。进一步分析式(15)不难知道，矩阵 $\boldsymbol{G}$ 中向量差值包括向量互差值 $\pm(\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{m})$ 和向量自差值 $(\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{M}\boldsymbol{n}_2)\cup(\boldsymbol{N}\boldsymbol{m}_1-\boldsymbol{N}\boldsymbol{m}_2)$，其中整数向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，$\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{m}_2$ 均符合定理 2 的条件(2)，并且 $\boldsymbol{n}_1\ne\boldsymbol{n}_2$ 和 $\boldsymbol{m}_1\ne\boldsymbol{m}_2$。因此，选择

$\boldsymbol{G}$ 中相应行可以形成互质差合成EmVs阵列的导向矩阵 $\boldsymbol{B}$，其中导向矩阵 $\boldsymbol{B}$ 第 (l_1,l_2,q) 个矩阵块为

$$\boldsymbol{B}_{l_1,l_2,q}=\left[a_{1,q}^{*}\boldsymbol{a}_1 e^{j2\pi\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}[l_1,l_2]^{\mathrm{T}}d/\lambda},\cdots,a_{D,q}^{*}\boldsymbol{a}_D e^{j2\pi\boldsymbol{U}_D^{\mathrm{T}}[l_1,l_2]^{\mathrm{T}}d/\lambda}\right] \tag{16}$$

式中整数 $l_1=-M_1N_1+1,\cdots,M_1N_1-1$，整数 $l_2=-M_2N_2+1,\cdots,M_2N_2-1$，$q=1,\cdots,6$。在实际操作中，从向量 $\boldsymbol{z}$ 中抽取相应行来形成上述阵列的输出 $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{Bp}+\dot{\boldsymbol{e}}$，其中 $\dot{\boldsymbol{e}}$ 是6个元素为1，其余元素为0的 $6(2M_1N_1-1)(2M_2N_2-1)\times 1$ 维列向量，元素1的位置为向量自差 $\boldsymbol{Mn}-\boldsymbol{Mn}$ 或者 $\boldsymbol{Nm}-\boldsymbol{Nm}$ 所在位置。虽然与原稀疏阵列自由度 L 相比，$\boldsymbol{z}_1$ 所表示阵列的自由度提高到 $6(2M_1N_1-1)(2M_2N_2-1)$，但是其自相关矩阵是秩为1的秩亏矩阵。因此，要把该阵列应用于经典的MUSIC算法，首先必须恢复自相关矩阵的秩，这常采用空间平滑算法。文献[7,8]和文献[9-11]分别采用1维和2维空间平滑算法，因为差合成标量阵仅涉及1维或2维空域，而互质差合成EmVs阵列阵元分布在2维空域和极化域，为此我们采用3维平滑来恢复其自相关矩阵的秩。另外，为最有效地利用阵列自由度，按下述步骤划分子阵：

(1)在极化域划分，把互质差合成EmVs阵列划分成权值分别为 $a_{i,1}^{*},\cdots,a_{i,6}^{*}$，阵元位置均以 $\{\boldsymbol{k}d,\boldsymbol{k}\in\mathrm{SPD}(\boldsymbol{MN})\}$ 形式分布的6个子阵，其中 $i=1,\cdots,D$；

(2)对第 q 个子阵，在2维空域将其划分为 $M_1N_1M_2N_2$ 个大小为 $M_1N_1\times M_2N_2$ 的重叠子阵，并且第 (λ_1,λ_2,q) 个子阵的位置以形式 $[l_1',l_2']^{\mathrm{T}}d$ 进行定位，其中整数 $-M_1N_1+\lambda_1<l_1'<\lambda_1$，整数 $-M_2N_2+\lambda_2<l_2'<\lambda_2$，$\lambda_1=1,\cdots,M_1N_1$，$\lambda_2=1,\cdots,M_2N_2$。

采用以上阵列划分方式，除了能最有效地利用阵列的自由度外，还能够得到第(1,1,1)个子阵的二阶统计量。选取 $\boldsymbol{z}_1$ 中相应行，可得第 (λ_1,λ_2,q) 个子阵输出

$$\boldsymbol{z}_{\lambda_1,\lambda_2,q}=\boldsymbol{B}_{\lambda_1,\lambda_2,q}\boldsymbol{p}+\sigma_n^2\dot{\boldsymbol{e}}_{\lambda_1,\lambda_2,q} \tag{17}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{e}}_{\lambda_1,\lambda_2,q}$ 是在 $\{6M_1N_1M_2N_2-qM_1N_1M_2N_2-\lambda_2M_1N_1-\lambda_1,q=1,\cdots,6\}$ 处元素为1，其余为0的列向量。不难证明导向矩阵 $\boldsymbol{B}_{\lambda_1,\lambda_2,q}=\boldsymbol{A}_{1,1,1}\boldsymbol{\varLambda}_1^{\lambda_1}\boldsymbol{\varLambda}_2^{\lambda_2}\boldsymbol{\varLambda}_{3,q}$，其中 $\boldsymbol{\varLambda}_1=\mathrm{diag}\{e^{ju_1},\cdots,e^{ju_D}\}$，$\boldsymbol{\varLambda}_2=\mathrm{diag}\{e^{jv_1},\cdots,e^{jv_D}\}$ 和 $\boldsymbol{\varLambda}_{3,q}=\mathrm{diag}\{a_{q,1}^{*},\cdots,a_{q,D}^{*}\}$。那么，第 (λ_1,λ_2,q) 个子阵接收信号的自关矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\lambda_1,\lambda_2,q}&=E(\boldsymbol{z}_{\lambda_1,\lambda_2,q}\boldsymbol{z}_{\lambda_1,\lambda_2,q}^{\mathrm{H}})\\&=\boldsymbol{A}_{1,1,1}\boldsymbol{\varLambda}_1^{\lambda_1}\boldsymbol{\varLambda}_2^{\lambda_2}\boldsymbol{\varLambda}_{3,q}\boldsymbol{pp}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\varLambda}_{3,q}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\varLambda}_2^{\lambda_2})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\varLambda}_1^{\lambda_1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{1,1,1}^{\mathrm{H}}\\&\quad+\sigma_n^4\dot{\boldsymbol{e}}_{\lambda_1,\lambda_2,q}\dot{\boldsymbol{e}}_{\lambda_1,\lambda_2,q}^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{A}_{1,1,1}\boldsymbol{\varLambda}_1^{\lambda_1}\boldsymbol{\varLambda}_2^{\lambda_2}\boldsymbol{\varLambda}_{3,q}\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{e}}_{\lambda_1,\lambda_2,q}^{\mathrm{H}}\\&\quad+\sigma_n^2\dot{\boldsymbol{e}}_{\lambda_1,\lambda_2,q}\boldsymbol{p}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{\varLambda}_{3,q}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\varLambda}_2^{\lambda_2})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\varLambda}_1^{\lambda_1})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}_{1,1,1}^{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{18}$$

对所有 $6M_1N_1M_2N_2$ 个子阵的自相关矩阵求平均值后得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\mathrm{smooth}}&=\frac{1}{6M_1N_1M_2N_2}\sum_{\lambda_1=1}^{M_1N_1}\sum_{\lambda_2=1}^{M_2N_2}\sum_{q=1}^{6}\boldsymbol{R}_{\lambda_1,\lambda_2,q}\\&=\frac{1}{6M_1N_1M_2N_2}(\boldsymbol{A}_{1,1,1}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{A}_{1,1,1}^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{6M_1N_1M_2N_2})^2\end{aligned} \tag{19}$$

对式(19)进行开根号，得到第(1,1,1)个子阵的输出信号的自相关矩阵为

$$\widehat{\boldsymbol{R}}=\frac{\boldsymbol{A}_{1,1,1}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{A}_{1,1,1}^{\mathrm{H}}+\sigma_n^2\boldsymbol{I}_{6M_1N_1M_2N_2}}{\sqrt{6M_1N_1M_2N_2}} \tag{20}$$

很明显，式(20)可以应用于经典的MUSIC算法中，它表示的阵列具有 $M_1N_1M_2N_2$ 个自由度，而仅仅使用 L 个物理EmVs，同时该算法采用二阶统计量，极大地减小了计算复杂度。

5 仿真试验

仿真1 通过计算机仿真验证本文算法估计的DOA数多于物理阵元数。考虑两个具有互质关系的电磁矢量阵列，其相关参数为 $\boldsymbol{M}=0.5\lambda\cdot\mathrm{diag}\{2,2\}$，$\boldsymbol{N}=0.5\lambda\cdot\mathrm{diag}\{3,5\}$。由这些参数可知 $\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{NM}=0.5\lambda\cdot\mathrm{diag}\{6,10\}$，阵列 a(分布于格子 $\boldsymbol{M}$)和阵列 b(分布于格子 $\boldsymbol{N}$)的阵元数都为15，最终3维平滑后的互质差合成EmVs阵列的阵元数为 6×10。为使得入射信号数多于物理阵元数，假设36个窄带独立信号从不同方向入射到上述两个阵列，其中入射信号方向为随机选取，快拍数分别为100和1000，信噪比(SNR)为0 dB和20 dB。

图2表示本文算法的MUSIC谱随SNR和快拍数的变化关系，其中图2(a)和图2(b)采用的快拍数均为100，信噪比分别为0 dB和20 dB；图2(c)和图2(d)采用的快拍数均为1000，信噪比分别为0 dB和20 dB。图2中4个子图都表明本文算法能够正确分辨36个入射信号，这验证了本文算法能分辨入射信号数多于物理阵元数的结论。比较图2中4个子图可知，在小快拍数下，信噪比是影响MUSIC谱的主要因素，然而随着快拍数增加，这种影响逐步减弱。另外，在本文算法中快拍数是改善测向性能更为敏感的因素，这是因为差合成阵列来源于原阵列的自相关矩阵，而它是由有限快拍数近似得到，因而在小快拍数的情况下，增大快拍数能有效地提高测向性能。

仿真2 为了比较本文算法(算法1)、基于EmVs矩形阵的MUSIC算法[2](算法2)和基于互质标量面阵的MUSIC算法[8](算法3)三者之间的分辨率和测向精度，仿真中分别采用如下3个天线阵列：

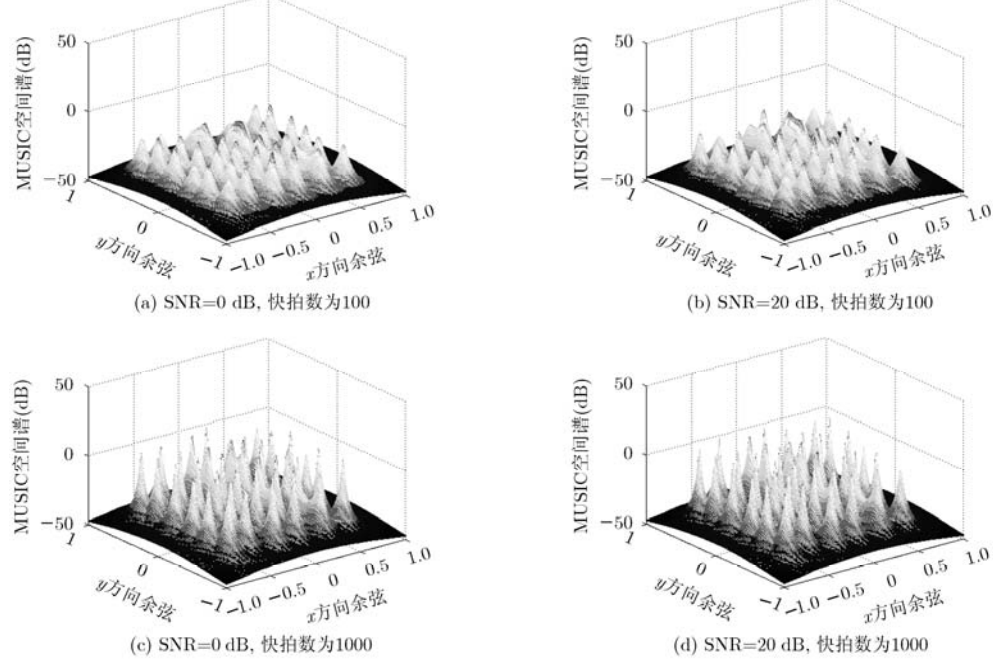

图 2 本文算法中 MUSIC 谱随 SNR 和快拍数的变化关系

阵列 1 为仿真 1 中 2 维稀疏互质 EmVs 阵列；阵列 2 为 5×6 的 EmVs 均匀矩形阵列，阵元间距为 0.5λ；阵列 3 由 30 个标量传感器组成的阵列，其阵元分布与阵列 1 相同。假设有两个独立窄带远场电磁信号入射到上述 3 个天线阵，并且相同信号入射到不同阵列的方向相同。(1)为比较 3 种算法的分辨率，假设信号 1 和信号 2 的入射方向分别为 $(20°,30°)$ 和 $(20°,31°)$，3 个阵列接收信号的 SNR 为 10dB，快拍数为 1000。(2)为对比 3 种算法的测向精度，假设两个信号的入射方向分别为 $(20°,30°)$ 和 $(20°,40°)$，阵列接收信号的 SNR 为 0 dB，快拍数变化范围是 $200\sim1000$，变化步长为 100，每个参数的试验重复次数为 200。

图 3 给出了 3 种算法在分辨率方面的性能对比图，其中图 3(a), 3(b)和 3(c)依次表示算法 1，算法 2 和算法 3 的 MUSIC 谱。从图 3 中可以看出算法 1 分辨率最优，其次是算法 2，最差的是算法 3，其原因是算法 1 形成的互质差合成 EmVs 阵列的孔径比阵列 2 的孔径更大，而相对由标量传感器组成的阵列 3 来说，两个矢量阵能获取入射信号更多的信息。

图 4 给出了以上 3 种算法的测向均方根误差随快拍数的变化曲线。从图 4 中可以看出，3 种算法的测向精度都随快拍数的增加而提高，然而它们的测向精度由高到低依次是算法 1，算法 2 和算法 3，并且算法 1 的测向均方根误差约比算法 2 要小 1 倍。这主要是因为：算法 1 利用两个稀疏 EmVs 阵列的互质关系，形成 6×10 的互质差合成 EmVs 阵列，其标量传感器总数为 360(每个 EmVs 由 6 个标量传感器组成)，然后再采用 MUSIC 算法进行 2D-DOA 估计；算法 2 直接采用 5×6 的 EmVs 阵列输出信号进行测向，其标量传感器总数为 180；算法 3 利用两个稀疏的标量阵的互质关系，形成 6×10 的互质差

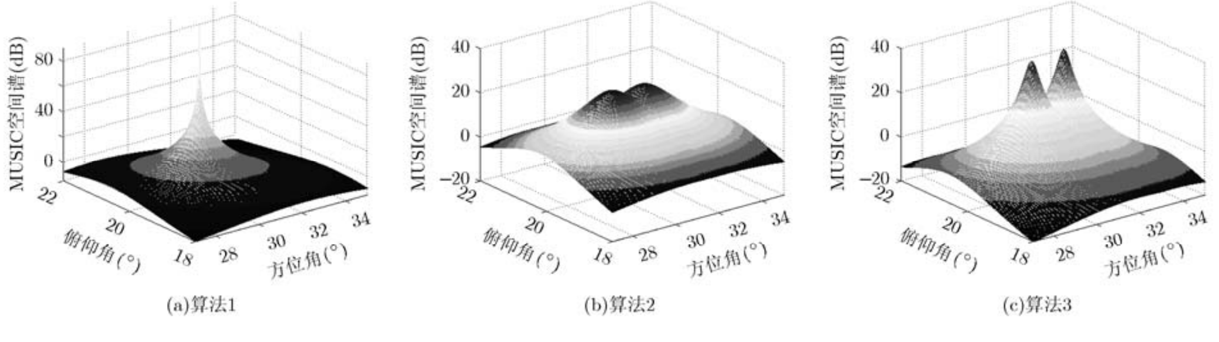

图 3　3 种算法分辨率的对比图

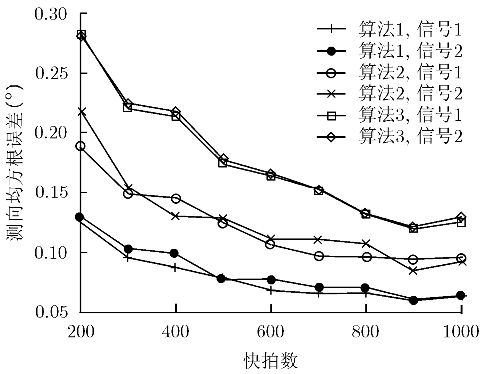

图 4 3 种算法的测向均方根误差随快拍数的变化

合成标量阵列，其标量传感器总数为 60，以上 3 个阵列的阵元间距都为 0.5λ。标量传感器的个数决定获取入射信号信息量的程度，从而也决定了各自算法的测向精度，因此，从标量传感器的数量可以解释 3 种算法的测向精度。另外，算法 1 的合成阵列孔径约比算法 2 采用的阵列孔径大 1 倍，因此算法 1 测向精度比算法 2 的测向精度约提高 1 倍。

6 结束语

本文构造了两个具有互质关系的电磁矢量稀疏阵列结构，它们能够形成更加密集的均匀矩形阵列。与原阵列相比，极大地增加了阵列的自由度，同时为有效地利用这些自由度，提出了一种基于 3 维平滑的 MUSIC 算法。与传统的基于四阶累积量增加阵列自由度的方法相比，本文算法最大优势是在增加阵列自由度的同时仅利用了二阶统计量，极大地减小了计算负担，并且对原阵列结构选择自由度大。

参 考 文 献

[1] Wong K T and Yuan X. Vector cross-product direction-finding with an electromagnetic vector-sensor of six orthogonally oriented but spatially non-collocating dipoles / loops[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(1): 160–171.

[2] Wong K T and Zoltowski M D. Closed-form direction finding and polarization estimation with arbitrarily spaced electromagnetic vector-sensors at unknown locations[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2000, 48(5): 671–681.

[3] Xu Y, Liu Z, Wong K T, *et al.*. Virtual-manifold ambiguity in HOS-based direction-finding with electromagnetic vector-sensors[J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 2008, 44(4): 1291–1308.

[4] Liu Tsung-hsien and Mendel J M. Azimuth and elevation direction finding using arbitrary array geometries[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(7): 2061–2065.

[5] Dogan M C and Mendel J M. Applications of cumulants to array processing-part I: aperture extension and array calibration[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(5): 1200–1216.

[6] Pal P and Vaidyanathan P P. Coprime sampling and the music algorithm[C]. IEEE Digital Signal Processing Workshop and Signal Processing Education Workshop, Pasadena, 2011: 289–294.

[7] Pal P and Vaidyanathan P P. Nested arrays: a novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167–4181.

[8] Vaidyanathan P P and Pal P. Theory of sparse coprime sensing in multiple dimensions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(8): 3592–3608.

[9] Vaidyanathan P P and Pal P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586.

[10] Pal P and Vaidyanathan P P. Two dimensional nested arrays on lattices[C]. IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing, Pasadena, 2011: 2548–2551.

[11] Vaidyanathan P P. Multirate Systems and Filter Banks[M]. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1992: 545–650.

邵 华： 男，1985 年生，博士生，研究方向为单站机载无源雷达、阵列信号处理等.

苏卫民： 男，1959 年生，教授，博士生导师，研究方向为自适应信号处理、外辐射源雷达等.

顾 红： 男，1967 年生，教授，博士生导师，研究方向为快速数字信号处理、随机信号雷达等.

王 灿： 女，1986 年生，博士生，研究方向为噪声雷达成像等.