

## 基于最小描述长度准则的稀疏多带信号频谱感知算法

杨鹏\* 柳征 姜文利

(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

**摘要:** 该文研究稀疏多带信号的频谱感知问题。首先利用欠采样的数据构造自相关矩阵,并对该矩阵进行特征值分解,然后根据最小描述长度(MDL)准则对特征值进行计算,利用结果区分信号子空间和噪声子空间,最后根据子空间的结果求出信号的频率支集,由此提出了一种针对稀疏多带信号的频谱感知算法。由于传统算法需要预先设置门限来区分信号子空间和噪声子空间,所以不合理的门限值会导致算法失效,该文算法不用预先设置门限,具有更好的适应性。仿真实验结果验证了该文算法的有效性。

**关键词:** 信号处理; 频谱感知; 稀疏多带信号; 欠采样; 子空间方法; 最小描述长度(MDL)准则

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)07-1547-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.01324

## Spectrum Sensing Algorithm Based on Minimum Description Length Criterion for Sparse Multiband Signal

Yang Peng Liu Zheng Jiang Wen-li

(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Spectrum sensing issue for sparse multiband signals is considered in this paper. Firstly, undersampling at sub-Nyquist rate are used to construct correlation matrix, and eigenvalue decomposition is carried out. Then, the method uses Minimum Description Length (MDL) criterion to distinguish between signal subspace and noise subspace and finds the spectral support. A spectrum sensing algorithm for sparse multiband signal is presented. Traditional methods distinguish between signal subspace and noise subspace by setting threshold, and make mistake when the threshold is wrong. Adaptability of this algorithm is better because there is no need to set threshold. The simulation results verify the validity of this algorithm.

**Key words:** Signal processing; Spectrum sensing; Sparse multiband signal; Sub-Nyquist sampling; Subspace method; Minimum Description Length (MDL) criterion

### 1 引言

将数目相对少的窄带发射波扩展到宽的频率范围上,可以用稀疏多带信号<sup>[1-4]</sup>进行描述,这也是军事和民用通信领域经常遇到的信号类型。频谱感知的目的是检测窄带发射波占据的频率区间,同时根据稀疏多带信号的频域稀疏性,能够利用欠采样的数据在不需要重构原信号的情况下实现频谱感知。因此,针对稀疏多带信号,如何以尽可能小的采样速率采集数据实现频谱感知具有十分重要的研究意义。

由于预先不知道稀疏多带信号的先验信息,需要利用非合作的检测方法探测窄带发射波占据的频率区间(称之为频率支集),传统的频谱感知方法<sup>[5]</sup>主要有能量检测法、匹配滤波器检测法和基于信号

循环平稳特性的检测方法。能量检测法易于实施,对相位同步要求低,但不能区分信号和噪声,易受噪声不确定性影响;匹配滤波器检测法处理时间短,但需要信号的先验信息,对相位同步要求高;基于信号循环平稳特性的检测方法能够区分信号和噪声,可利用统计特性进行信号识别,但计算复杂度高,需要很高的抽样速率。这几种方法均需要对信号以 Nyquist 速率进行采样,当处理宽频率范围的稀疏多带信号时,对数字信号存储器、模数转换器和处理器等硬件设备提出了很高的要求。

为了降低处理系统中对硬件设备的要求,需要减小采样速率,利用欠采样的数据实现频谱感知。文献[6,7]提出了一种接近最小采样速率<sup>[8]</sup>的算法,称之为谱盲采样(Spectrum Blind Sampling, SBS),该算法能够利用欠采样的数据重构原信号,主要分为低速采样和信号重构两部分。低速采样部分利用基于多陪集(Multi-Coset, MC)的周期非均匀采样方法

获取数据;信号重构部分首先采用类似于阵列信号处理中提出的多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法(称之为 MUSIC-like 算法<sup>[6,7]</sup>)求出频率支集,然后利用采样数据和频率支集重构原信号,但该算法需要预先设置门限来区分信号子空间和噪声子空间,不合理的门限会导致无法正确分离子空间。

SBS 算法能够利用欠采样的数据求出稀疏多带信号的频率支集,因此该算法也可以应用到频谱感知问题中。针对稀疏多带信号,本文研究并改进 SBS 算法,提出了一种基于最小描述长度(Minimum Description Length, MDL)准则的频谱感知算法。该算法首先利用欠采样的数据构造相关矩阵,并对该矩阵进行特征值分解,然后根据 MDL 准则对特征值进行计算,利用结果估计信号子空间的维数,由此区分出信号子空间和噪声子空间,最后根据子空间求解结果及信号子空间和噪声子空间的正交性求出稀疏多带信号的频率支集,完成频谱感知。与 SBS 算法相比,本文算法不需要预先设置门限,避免了由不合理门限引起的错误,具有更好的适应性。

本文首先描述稀疏多带信号模型及 SBS 算法存在的不足,然后对本文算法的数学原理进行分析,并给出实现步骤,最后通过仿真实验验证本文算法的有效性。

## 2 问题描述

### 2.1 稀疏多带信号模型

$x(t)$  表示连续,随机的实信号,假定  $x(t)$  的有限带宽范围为  $[-f_{\text{nyq}}/2, f_{\text{nyq}}/2]$ , 它的频谱  $X(f)$  是由  $n$  个谱带  $x_i(f), i=1, \dots, n$  及其对称谱带组成,谱带  $x_i(f)$  的宽度为  $B_i$ , 谱带位置是任意的,谱带之间不交叠,其中每个谱带的宽度都不超过  $B$ ,  $B = \max(B_i), i=1, \dots, n$ , 所有谱带的数量不超过  $N$  ( $2n \leq N$ ),  $f_{\text{nyq}}$  表示  $x(t)$  的 Nyquist 速率。当所有谱带宽度之和远小于信号的有限带宽时,即满足  $NB \ll f_{\text{nyq}}$ , 称之为稀疏多带信号。

针对稀疏多带信号进行频谱感知的问题描述为:预先不知道稀疏多带信号的频率支集(即谱带位置),利用欠采样的数据实现频谱感知。图 1 是典型稀疏多带信号的频谱,所有谱带的数目为 6,谱带位置  $x_i(f)$ 、谱带宽度  $B_i$  及  $f_{\text{nyq}}$  均与发射机有关,其中  $i=1,2,3$ 。

### 2.2 谱盲采样(SBS)算法及存在的不足

在预先不知道稀疏多带信号频率支集的情况下, SBS 算法<sup>[6,7]</sup>能够利用欠采样的数据实现信号重构。SBS 算法主要分为两个部分:低速采样和信号

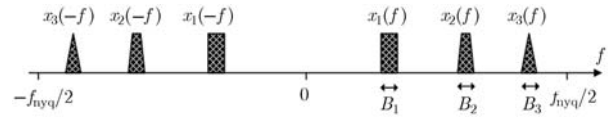


图 1 典型稀疏多带信号的频谱

重构,其中信号重构部分首先求出稀疏多带信号的频率支集,然后利用采样点和频率支集恢复原信号。将 SBS 算法用于解决频谱感知问题时,只需要求出频率支集信息,而不需要恢复原信号,本文不讨论 SBS 算法中与恢复原信号有关的部分。

**2.2.1 数据采集技术** 多陪集(MC)采样是一种周期非均匀的数据采样技术,其采样速率远低于 Nyquist 速率。一般采用多通道结构实现 MC 采样技术,如图 2 所示,每个通道均是由 1 个延时器和 1 个模数转换器(Analog-to-Digital Converter, ADC)组成,通道的延迟时间  $\Delta t$  各不相同,其中  $0 \leq c_1 < \dots < c_q$ ,  $1/T$  是基频,并满足  $1/T \geq f_{\text{nyq}}$ 。

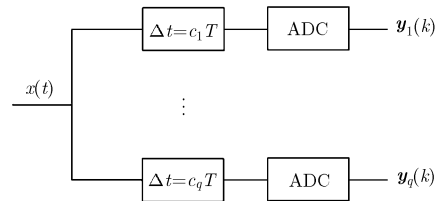


图 2 实现多陪集(MC)采样技术的多通道结构

对信号  $x(t)$  进行 MC 采样,可以表示为

$$\Psi = \{(mL + c_i)T : m \in \mathbb{Z}, i=1, \dots, q\} \quad (1)$$

其中  $L$  是正整数,  $\{c_i\}$  满足  $0 \leq c_1 < \dots < c_q \leq L-1$ ,  $\Psi = [y_1(k), \dots, y_q(k)]^T$ ,  $y_i(k)$  表示第  $i$  个通道的采样数据。

在频域中分析上述采样过程(数学推导过程见文献[6,7,9]),  $x(t)$  和  $y_i(k)$  之间的关系可以表示为

$$\mathbf{z}(f) = \Phi \mathbf{x}(f), \quad f \in \left[0, \frac{1}{LT}\right] \quad (2)$$

其中  $\mathbf{z}(f) = [z_1(f), \dots, z_q(f)]^T$ ,  $z_i(f)$  表示  $y_i(k)$  的离散时间傅里叶变换(Discrete-Time Fourier Transform, DTFT),  $\Phi$  表示观测矩阵,  $\Phi_{ik} = \frac{1}{LT}$

$\cdot \exp\left\{j \frac{2\pi}{L} c_i k\right\}$ ,  $x_i(f) = X\left(f + \frac{i}{LT}\right)$ ,  $f \in \left[0, \frac{1}{LT}\right]$  表示在信号的有效带宽范围内划分的第  $i$  个频谱片,  $\mathbf{x}(f) = [x_1(f), \dots, x_L(f)]^T$  表示频谱片的集合,示意图如图 3 所示,相邻虚线内包含的频率区间表示一个频谱片。

### 2.2.2 频谱感知算法及存在的不足

定义<sup>[10]</sup> 令  $\mathbf{S}$  是观测数据的相关矩阵的  $r$  个大

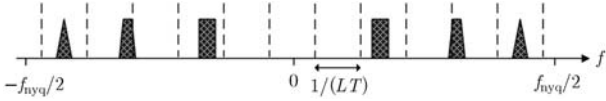


图3 在信号的有效带宽范围内划分的频谱片的示意图

特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  对应的特征向量构成的矩阵，其列空间  $\text{Span}(\mathbf{S}) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r)$  称为观测数据空间的信号子空间，而另外  $n-r$  个次特征值对应的特征向量构成矩阵  $\mathbf{G}$ ，其列空间  $\text{Span}(\mathbf{G}) = \text{Span}(\mathbf{u}_{r+1}, \mathbf{u}_{r+2}, \dots, \mathbf{u}_n)$  称为观测数据空间的噪声子空间，其中  $\lambda_i, i=1, \dots, n$  表示观测数据的相关矩阵的特征值， $\mathbf{u}_i, i=1, \dots, n$  表示特征值  $\lambda_i$  对应的特征向量。

基于信号子空间和噪声子空间的定义，式(2)可以利用 MUSIC-like 算法求解，首先构造  $\mathbf{z}(f)$  的相关矩阵  $\mathbf{R}_z$ ，然后对  $\mathbf{R}_z$  进行特征值分解，最后利用特征值的大小区分信号子空间和噪声子空间。但该方法<sup>[8]</sup>只考虑理想情况，认为在不含噪声的情况下，噪声子空间对应的特征值均为零；在含白噪声的情况下，噪声子空间对应的特征值均相等且数值较小。在实际情况下，该方法并不容易准确区分出信号子空间和噪声子空间，主要原因如下：

(1)与统计自相关矩阵相比，由有限数目的采样点计算得到的相关矩阵  $\mathbf{R}_z$  会引入估计偏差；

(2)MC 采样结构中各通道引入的噪声均不一样，这会引入输出噪声在空域不是平稳白噪声，从而导致相关矩阵在进行特征值分解后，噪声子空间对应的特征值不会均等于同一数值。

### 3 基于最小描述长度(MDL)准则的频谱感知算法

MDL 准则的特点是决策过程中不需要人工参与，能够直接利用观测矢量计算出所含有的信号数目<sup>[11]</sup>。本文算法利用 MDL 准则区分信号子空间和噪声子空间，并根据子空间求解结果及信号子空间和噪声子空间的正交性求出稀疏多带信号的频率支集。

假定信号与噪声不相关，式(2)可表示为

$$\mathbf{z}(f) = \Phi[\mathbf{s}(f) + \mathbf{n}(f)] \quad (3)$$

其中  $\mathbf{s}(f) = [s_1(f), \dots, s_q(f)]^T$ ， $s_i(f)$  表示第  $i$  个频谱片中包含的信号， $\mathbf{n}(f) = [n_1(f), \dots, n_q(f)]^T$ ， $n_i(f)$  表示第  $i$  个频谱片中包含的噪声。

将式(3)两边同时乘以自身的共轭转置，并取期望操作，可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{z}(f)\mathbf{z}^H(f)] &= \Phi\mathbf{E}[\mathbf{s}(f)\mathbf{s}^H(f)]\Phi^H \\ &+ \Phi\mathbf{E}[\mathbf{n}(f)\mathbf{n}^H(f)]\Phi^H \end{aligned} \quad (4)$$

令功率谱密度  $\mathbf{P}(f) = \mathbf{E}[\mathbf{s}(f)\mathbf{s}^H(f)]$ ，式(4)可以化简为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{z}(f)\mathbf{z}^H(f)] &= \Phi\mathbf{P}(f)\Phi^H + \Phi(\sigma^2\mathbf{\Sigma})\Phi^H \\ &= \Phi\mathbf{P}(f)\Phi^H + \sigma^2\mathbf{\Sigma} \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\Phi\Phi^H = \mathbf{I}$ ，对角阵  $\mathbf{\Sigma}$  对应噪声方差，主对角线上的元素均不相等。

对矩阵  $\mathbf{E}[\mathbf{z}(f)\mathbf{z}^H(f)]$  进行特征值分解，采用 MDL 准则对特征值进行计算，就能估计出信号子空间的维数，具体公式<sup>[11]</sup>如下：

$$\begin{aligned} \text{MDL}(f, k) &= -\lg \left( \frac{\prod_{i=k+1}^q l_i(f)^{1/(q-k)}}{\frac{1}{q-k} \sum_{i=k+1}^q l_i(f)} \right)^{(q-k)N} \\ &+ \frac{1}{2}k(2q-k)\lg N \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $l_1(f) \geq \dots \geq l_q(f)$  是矩阵  $\mathbf{E}[\mathbf{z}(f)\mathbf{z}^H(f)]$  的特征值， $N$  是采样点的数目，使得式(6)计算结果最小的  $k$  就是信号子空间维数的估计值。

下面举例进行说明，稀疏多带信号的谱带数目为 6，对观测数据的相关矩阵进行特征值分解，将所得的特征值利用 MDL 准则进行计算，结果如图 4 所示，计算结果最小的  $k=6$  就是信号子空间维数的估计值，从而可以判断：观测数据中含有的谱带数目为 6。

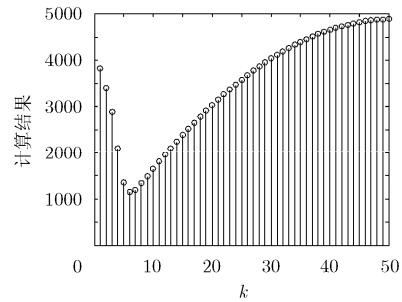


图4 采用最小描述长度(MDL)准则的计算结果

下面给出本文算法的实现步骤：

步骤 1 计算采样点的相关矩阵  $\mathbf{R}_z$ ，对  $\mathbf{R}_z$  进行特征值分解，得到特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q$ ；

步骤 2 采用 MDL 准则式(6)对特征值进行计算，计算结果最小的  $k$  就是信号子空间维数的估计值；

步骤 3 利用  $k$  值区分信号子空间和噪声子空间， $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  是信号子空间对应的特征值， $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_q$  是噪声子空间对应的特征值；

步骤 4 计算  $\mathbf{U}_n^* \Phi$  中列的 2-范数，记录使得计算结果最小的  $m$  个值所对应的索引号  $\{k_1, \dots, k_m\}$ ，这就是包含谱带的频谱片的索引号，频谱感知完成。

## 4 仿真实验

仿真实验的目的是验证本文算法针对稀疏多带信号的频谱感知能力, 主要包括以下几个方面:

- (1) 信噪比参数对本文算法性能的影响;
- (2) 采样通道数目对本文算法性能的影响;
- (3) 与 MUSIC-like 算法相比, 本文算法的改进效果。

### 4.1 仿真条件

产生稀疏多带信号的数学表达式为

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{B_i} \text{sinc}(B(t - \tau_i)) \exp(j2\pi f_i t)$$

其中  $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$ ,  $x(t)$  的谱带数目为  $n$ , 谱带宽度为  $B$ , 时间偏移为  $\tau_i$ , 载频为  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ 。

设置信号的有效带宽范围为  $[0, 1]$  GHz, 谱带数目  $n = 3$  (说明谱带及对称谱带数目的总和  $N = 6$ ), 谱带宽度  $B = 10$  MHz, 观测时间长度为  $100 \mu\text{s}$ , 时间偏移  $\tau_i$  是在时间范围  $[0, 50] \mu\text{s}$  内随机产生, 载频  $f_i$  是在频率范围  $[0, 1]$  GHz 内随机产生, 通道数目  $p = 30$ , 划分的频谱片数目  $L = 90$ , 为了评估本文算法性能, 随机产生 100 个测试信号。评估本文算法性能的标准是谱带位置的正确恢复率, 其中, 如果算法恢复的谱带位置和真实值相同, 那么认为正确; 如果恢复的谱带数目大于真实值的数目, 同时谱带位置包含了真实值, 也认为正确; 如果恢复的谱带位置没有包含所有的真实值, 那么认为错误。

### 4.2 信噪比参数变化时的算法性能

仿真条件设置: SNR 范围为  $[5, 25]$  dB, 数据采样通道数目为 30, 通道采样速率约为 11 MHz, 谱带数目为 6, 下面是本文算法的仿真结果。

由图 5 可以看出, 当信噪比参数增加至 16 dB 时, 本文算法的正确恢复率能够达到 90% 以上。

### 4.3 数据采样通道数目变化时的算法性能

仿真条件设置: SNR 为 30 dB, 数据采样通道数目的范围为  $[1, 30]$ , 通道采样速率约为 11 MHz, 谱带数目为 6, 下面是本文算法的仿真结果。

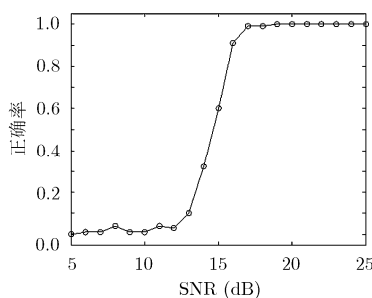


图 5 信噪比参数变化时的谱带正确恢复率

由图 6 可以看出, 针对谱带数目为 6 的情况, 数据采样通道数目增加至 14 时, 本文算法的正确恢复率能够达到 90% 以上。

### 4.4 与 MUSIC-like 算法相比, 本文算法的改进效果

仿真条件设置: SNR 分别为 16, 18, 20 dB, 数据采样通道数目为 30, 通道采样速率约为 11 MHz, 谱带数目为 6, MUSIC-like 算法中门限的取值范围为  $[2, 18]$ , 下面是 MUSIC-like 算法随门限值变化时, 谱带正确恢复的仿真结果。

由图 7 可以看出, 当门限增加至与谱带数目相等的数值 6 时, 只能正确恢复部分信号, 其余信号没有正确恢复的原因是: 在仿真实验中, 谱带的中心频率是随机产生的, 而整个有限带宽范围内划分的虚拟频谱片的位置是固定的, 由于单个谱带可能会占据相邻的两个频谱片, 所以 6 个谱带可能会占据 6 个以上的频谱片, 需要增大门限值才能正确恢复。当算法中的门限增加至 9 时, MUSIC-like 的正确恢复率能够达到 90% 以上。由此可知, 如果预先设置的门限值过低, 就会造成 MUSIC-like 算法失效。

由于本文算法中不需要预先设置门限, 从而避免了 MUSIC-like 算法中门限取值过低造成的错误。如图 5 所示, 与 MUSIC-like 算法相比, 本文算法在同样的仿真条件下正确恢复率能够达到 90% 以上。

下面是 MUSIC-like 算法随门限值取值变化时, 重构信号的信噪比仿真结果。

由图 7 和图 8 可以看出, 采用 MUSIC-like 算法时, 增加门限值能够提高算法性能, 但同时会导致重构信号的信噪比降低, 原因是: MUSIC-like 算法中门限值与恢复的谱带数目相等, 如果门限值大于真实的谱带数目, 那么除了恢复含有信号的频谱片外, 也恢复了仅仅含有噪声的频谱片。当门限值越大时, 恢复出的仅含噪声的频谱片的数目就会越多, 导致重构信号的信噪比呈降低趋势。

如图 4 所示, 与 MUSIC-like 算法相比, 本文算法能够利用 MDL 准则判断出信号子空间的维数, 避免了 MUSIC-like 算法中门限值取值过高造成的问题。

### 4.5 仿真结论

在预先不知道信号谱带位置的情况下, 利用本文算法实现对信号环境的频谱感知, 通过仿真实验可以得出以下结论:

- (1) 信号信噪比参数和数据采样通道数目的增加对本文算法性能的提高具有显著的改善效果;

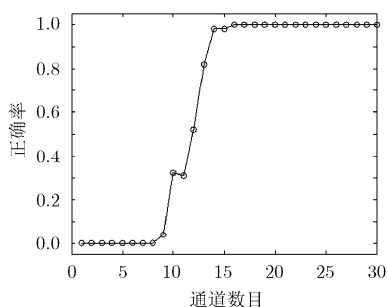


图6 数据采样通道数目变化时的谱带正确恢复率

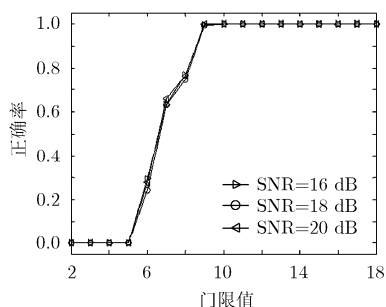


图7 MUSIC-like 算法的谱带正确恢复率

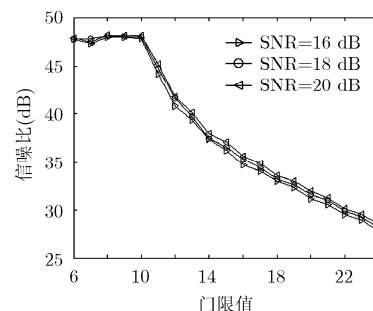


图8 MUSIC-like 算法重构信号的信噪比仿真结果

(2)与 MUSIC-like 算法相比, 本文算法的自适应性得到了提高。

## 5 总结

频谱感知算法在电子侦察中具有十分重要的意义。本文研究了针对稀疏多带信号的频谱感知问题, 利用欠采样的数据实现频谱感知。

针对稀疏多带信号, 本文改进了盲谱采样(SBS)算法, 提出了一种基于 MDL 准则的频谱感知算法。该算法首先利用欠采样的数据构造相关矩阵, 并对该矩阵进行特征值分解, 然后根据 MDL 准则对特征值进行计算, 利用计算结果判断信号子空间的维数, 最后通过信号子空间和噪声子空间之间的正交性估计信号所属频谱片的位置, 实现频谱感知。与 MUSIC-like 算法相比, 本文算法具有更好的自适应性, 仿真实验验证了本文算法的性能。

## 参考文献

- [1] Mishali M and Eldar Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 375-391.
- [2] Mishali M, Eldar Y C, and Elron A J. Xampling: signal acquisition and processing in union of subspaces[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(10): 4719-4734.
- [3] Lexa M A, Davies M E, and Thompson J S. Reconciling compressive sampling systems for spectrally sparse continuous-time signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(1): 155-171.
- [4] Mishali M and Eldar Y C. Wideband spectrum sensing at sub-Nyquist rates[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, 28(4): 102-135.

- [5] 王颖喜, 卢光跃. 基于最大最小特征值之差的频谱感知技术研究[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(11): 2571-2575.  
Wang Ying-xi and Lu Guang-yue. DMM based spectrum sensing method for cognitive radio systems[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(11): 2571-2575.
- [6] Ping F and Bresler Y. Spectrum-blind minimum-rate sampling and reconstruction of multiband signals[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing*, Atlanta, USA, 1996: 1688-1691.
- [7] Bresler Y. Spectrum-blind sampling and compressive sensing for continuous-index signals[C]. *Information Theory and Applications Workshop*, California, USA, 2008: 547-554.
- [8] Landau H J. Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions[J]. *Acta Mathematica*, 1967, 117(1): 37-52.
- [9] Venkataramani R and Bresler Y. Perfect reconstruction formulas and bounds on aliasing error in sub-Nyquist nonuniform sampling of multiband signals[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, 46(6): 2173-2183.
- [10] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 613-617.
- [11] Wax M and Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria[J]. *IEEE Transactions on Speech and Signal Processing*, 1985, 33(2): 387-392.

杨 鹏: 男, 1983 年生, 博士生, 研究方向为信号处理和综合电子战技术。

柳 征: 男, 1978 年生, 博士, 讲师, 研究方向为综合电子战技术。

姜文利: 男, 1967 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为综合电子战技术、空间信息处理等。