

一种基于导向矢量变换的 DOA 估计预处理方法

蒋柏峰^{*①②} 吕晓德^①

^①(中国科学院电子学研究所微波成像技术国家级重点实验室 北京 100190)

^②(中国科学院研究生院 北京 100049)

摘要: 针对大多数空间谱估计算法在目标数量大于阵列自由度时失效这一问题, 该文基于内插阵列变换思想, 提出一种基于导向矢量变换的空域滤波方法。利用目标分布的先验信息, 将观测空间划分为若干子空间, 保证每一子空间内的目标数量小于阵列自由度; 使用内插阵列变换方法, 将整个观测空间的导向矢量变换为子空间的导向矢量, 抑制子空间外的目标, 从而将观测空间内大量目标的 DOA 估计问题转化为若干子空间内的常规 DOA 估计问题。计算机仿真结果验证了方法的有效性。

关键词: 阵列信号处理; 空域滤波; 虚拟阵列变换; DOA 估计

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)07-1552-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.01259

A DOA Estimation Pre-processing Method Based on Steering Vector Transformation

Jiang Bai-feng^{①②} Lü Xiao-de^①

^①(National Key Laboratory of Microwave Imaging Technology,

Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

^②(Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Most of the spatial spectrum estimation algorithms fail when the number of targets is larger than the array freedom. To deal with this problem, a spatial filtering method, which is based on steering vector transformation by using the method of interpolated array, is proposed in this paper. The entire observation space is divided into several sub-spaces, and the number of targets in each sub-space is guaranteed smaller than the array freedom by the priori information. By array interpolating, the steering vector of the entire observation is transformed into sub-space steering vector, which means the targets outside the subspace are inhibited. As the result, the mass targets DOA estimation issue in the entire observation space is transformed into a conventional DOA estimation issue in several sub-spaces. Simulative results show the effectiveness of the method presented.

Key words: Array signal processing; Spatial filtering; Virtual array transformation; DOA estimation

1 引言

空间谱估计是阵列信号处理的主要研究方向之一, 它将超分辨估计技术应用到 DOA 估计中, 突破了瑞利限的约束, 得到很高的角度分辨率, 在雷达、通信、声呐等众多领域有极为广阔的应用前景。然而大多数空间谱估计算法需要满足目标数量小于阵列自由度的约束条件, 在实际应用中当阵列规模确定后, 这一约束条件经常无法得到满足, 这已成为制约空间谱估计算法走向实际应用的瓶颈之一^[1-4]。针对这一问题, 从信号时域统计特性的角度出发, 文献[5,6]等利用信号的高阶统计量, 文献[7]

利用信号的非圆特点, 扩展阵列孔径增加可估计目标数量。对于均匀线阵, 经扩展后可将阵列自由度扩大一倍。文献[8]等利用信号的循环平稳特性, 对具有不同循环频率的信号进行分选, 增加可估计目标数量。这些算法在一定程度上解决了目标数量大于阵列自由度时的 DOA 估计问题, 但存在阵列扩展能力有限、计算量大、受信号时域统计特性束缚等缺点。

本文基于内插阵列变换思想^[9]提出一种基于导向矢量变换的空域滤波方法。它不依赖信号的统计特性, 在常规 DOA 估计算法之前增加一步预处理过程, 利用信号源分布的先验信息将观测空间划分为若干子空间保证每一子空间内目标数量小于阵列自由度; 利用内插阵列变换方法将整个观测空间的

导向矢量变换为子空间的导向矢量，实现对子空间外导向矢量的抑制，进而抑制这些导向矢量对应的信号分量，保留的信号分量数目小于阵列自由度。从而实现了利用常规空间谱估计算法对整个观测空间的分区估计，得到目标数量大于阵列自由度时的 DOA 估计。理论分析和计算机仿真说明了算法的有效性。

2 阵列信号模型

假设均匀线阵由 M 个各向同性阵元组成，阵元间距为半波长，以起始阵元作为参考阵元，当空间有 N 个不相关的远场窄带信号分别从以线阵轴向法线为参考的角度 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 入射到阵列时，阵列接收数据可表示为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{X}(t)$ 为 $M \times 1$ 维接收数据矢量， $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ 为 $M \times N$ 维阵列流型矩阵， $\mathbf{S}(t)$ 为 $N \times 1$ 维入射信号矢量， $\mathbf{N}(t)$ 为 $M \times 1$ 维噪声数据矢量。假设噪声数据矢量的各分量为相互独立的零均值高斯白噪声，方差均为 σ^2 ，噪声与信号相互独立，则阵列接收数据的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)]$ 为信号的协方差矩阵， \mathbf{I} 为单位矩阵。

当目标数量 N 小于阵列自由度 M 时，对式(2)进行特征分解，将其 N 个大特征值对应特征向量张成的空间作为信号子空间，将 $M - N$ 个小特征值对应特征向量张成的空间作为噪声子空间，多重信号分类算法(MUSIC)^[10]即是利用了信号子空间与噪声子空间的正交性进行 DOA 估计。然而当目标数量 N 大于等于阵列自由度 M 时， $\mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H$ 的秩为 M ，此时将无法划分信号子空间和噪声子空间，MUSIC 算法是失效的^[7]。

3 基于导向矢量变换的 DOA 估计预处理方法

3.1 算法基本思想

假设某种变换可将阵列流型矩阵 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ 的某些列变为零向量或模很小的向量，某些列保持不变，并且保持不变的列数小于阵列自由度。则由式(1)可知，变换后的接收数据中将主要由那些被保留的列对应的信号分量组成，而那些被变换为零或者很小的列对应的信号分量将被抑制。此时相当于到达阵列的目标数量小于阵列自由度，可利用常规的空间谱估计算法如 MUSIC 算法估计出被保留信号分量的 DOA 信息。基于这种思想，可将整个观测空

间内目标的 DOA 估计转化为若干次子空间内的常规 DOA 估计，从而实现了目标数量大于阵列自由度时的 DOA 估计。

假设感兴趣的观测空间为 $\boldsymbol{\Theta}$ ，将其划分为 P 个子空间记为 $\boldsymbol{\Theta}_p (p=1, 2, \dots, P)$ ， $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}_1 \cup \boldsymbol{\Theta}_2 \cup \dots \cup \boldsymbol{\Theta}_P$ 。划分的原则是使每个子空间内的目标数量小于阵列自由度，这需要一定的先验信息作为参考。

由前文介绍的算法思想，希望通过变换矩阵 $\mathbf{T}_p (p = 1, 2, \dots, P)$ ，使

$$\mathbf{T}_p \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}) = [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}_p), \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}], \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (3)$$

定义 $\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Theta}_p) = [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}_p), \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] (p = 1, 2, \dots, P)$ ，则式(3)可以记为

$$\mathbf{T}_p \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}) = \bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Theta}_p), \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (4)$$

当求解出变换矩阵 $\mathbf{T}_p (p = 1, 2, \dots, P)$ 后，将其左乘式(1)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_p \mathbf{X}(t) &= \mathbf{T}_p \mathbf{A} \mathbf{S}(t) + \mathbf{T}_p \mathbf{N}(t) = [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}(\theta_{p1}), \dots, \\ &\quad \mathbf{a}(\theta_{pn}), \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \mathbf{S}(t) + \mathbf{T}_p \mathbf{N}(t) \\ &= [\mathbf{a}(\theta_{p1}), \mathbf{a}(\theta_{p2}), \dots, \mathbf{a}(\theta_{pn})] [\mathbf{s}_{p1}(t), \mathbf{s}_{p2}(t), \dots, \\ &\quad \mathbf{s}_{pn}(t)]^T + \mathbf{T}_p \mathbf{N}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

式中 n 为子空间内信号数量，可通过子区间的合理划分认为 $n < M$ 。 $\mathbf{a}(\theta_{pi}) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为子空间内信号的导向矢量， $\mathbf{s}_{pi}(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为入射信号矢量中子空间内信号导向矢量对应的分量。

由式(5)可知，变换后的数据满足目标数量小于阵列自由度的约束条件，只是理想情况下的高斯白噪声变成了色噪声。为了使常规的空间谱估计算法能得到应用，需要白化色噪声。

由上述分析可知，本文提出算法的关键问题在于式(4)中变换矩阵 $\mathbf{T}_p (p = 1, 2, \dots, P)$ 的求解和色噪声的白化。

3.2 变换矩阵的求解

变换矩阵的求解可基于文献[9]提出的内插阵列变换思想，首先将整个感兴趣的观测空间进行细分为

$$\boldsymbol{\Theta} = [\theta_L, \theta_L + \Delta\theta, \dots, \theta_R] \quad (6)$$

式中 θ_L, θ_R 为感兴趣观测空间的左右边界， $\Delta\theta$ 为步长，则根据实际阵列的结构可以得到空间 $\boldsymbol{\Theta}$ 的真实阵列流型为

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}) = [\mathbf{a}(\theta_L), \mathbf{a}(\theta_L + \Delta\theta), \dots, \mathbf{a}(\theta_R)] \quad (7)$$

当对某一子空间 $\boldsymbol{\Theta}_p$ 内的信号进行 DOA 估计时，希望得到的阵列流型为

$$\bar{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\Theta}_p) = [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}(\theta_{ip}), \mathbf{a}(\theta_{ip} + \Delta\theta), \dots, \mathbf{a}(\theta_{ip}), \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \quad (8)$$

式中 θ_{ip}, θ_{ip} 为子空间 $\boldsymbol{\Theta}_p$ 的左右边界。

当 $\Delta\theta$ 较小时,子空间阵列流型 $\bar{\mathbf{A}}(\Theta_p)$ 是行满秩的。考虑式(4)共轭转置的增广矩阵 $[\mathbf{A}^H(\Theta), \bar{\mathbf{A}}^H(\Theta_p)]$ 的秩可知: $\text{rank}(\mathbf{A}^H(\Theta)) < \text{rank}([\mathbf{A}^H(\Theta), \bar{\mathbf{A}}^H(\Theta_p)])$, 即式(4)是不相容的。由矩阵分析的知识可知,不相容方程式(4)的极小范数最小二乘解为

$$\mathbf{T}_p = \bar{\mathbf{A}}(\Theta_p)\mathbf{A}^+(\Theta) \quad (9)$$

式中 \mathbf{A}^+ 为矩阵 \mathbf{A} 的 Moore-Penrose 逆。因为 \mathbf{A} 是行满秩的, 所以有 $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}$ 。式(9)可以写为

$$\mathbf{T}_p = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \quad (10)$$

由式(10)可知,变换矩阵仅与阵列结构、感兴趣观测空间以及子空间的划分有关,实际应用本算法时,可根据子空间的划分事先计算好变换矩阵存储起来,提高算法的实时性。

3.3 白化色噪声

由式(5)可知,阵列接收数据经变换后,噪声项受到干扰,由白噪声变为色噪声。为了白化色噪声,可利用文献[11]中的方法,首先估计噪声功率为

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{M-n} \sum_{i=1}^{M-n} \sigma_i^2 \quad (11)$$

式中 n 为子空间内目标数量, $\sigma_i^2 (i=1,2,\dots,M-n)$ 为变换后数据协方差矩阵 $\mathbf{T}_p\mathbf{R}_x\mathbf{T}_p^H$ 特征分解得到的 $M-n$ 个小特征值。则经过白化处理后的数据协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{T}_p\mathbf{R}_x\mathbf{T}_p^H + \bar{\sigma}^2(\mathbf{I} - \mathbf{T}_p\mathbf{T}_p^H) \quad (12)$$

式中 \mathbf{I} 为单位矩阵。

3.4 算法流程

与通常情况下的波束空间 MUSIC 算法类似^[1],经过变换矩阵变换、白化色噪声处理后,阵列流型已经发生变化,在利用 MUSIC 算法进行谱峰搜索时,应使用变换后的阵列流型对应的导向矢量进行谱峰搜索,即

$$\mathbf{b}(\theta) = \mathbf{T}\mathbf{a}(\theta) \quad (13)$$

式中 $\mathbf{a}(\theta)$ 为变换前导向矢量, $\mathbf{b}(\theta)$ 为变换后导向矢量, \mathbf{T} 为变换矩阵。谱峰搜索公式为

$$P_{\text{MUSIC}} = \frac{\mathbf{b}^H(\theta)\mathbf{b}(\theta)}{\mathbf{b}^H(\theta)\mathbf{U}_N\mathbf{U}_N^H\mathbf{b}(\theta)} \quad (14)$$

式中 \mathbf{U}_N 为噪声子空间。

下面给出本文方法的计算步骤:

- (1)将整个观测空间划分为 P 个子空间,利用式(10)求解变换矩阵 $\mathbf{T}_p (p=1,\dots,P)$;
- (2)利用阵列接收数据和变换矩阵,得到变换后每个子空间对应的数据协方差矩阵;
- (3)对每个子空间的数据协方差矩阵进行特征分解,利用式(11),式(12)白化色噪声;

(4)对经过白化处理的数据协方差矩阵使用常规 MUSIC 算法,利用式(14)进行谱峰搜索得到每个子空间内的 DOA 估计结果,进而得到整个观测空间内的 DOA 估计结果。

4 方法仿真分析

本文提出的方法是一种预处理类方法,可与常规的各种空间谱估计算法结合使用。为方便比对,仿真分析时均结合使用 MUSIC 算法。

4.1 变换偏差分析

由于式(4)是不相容的,变换得到的阵列流型与期望的阵列流型之间存在偏差,定义:

$$g(\theta) = \frac{\|\mathbf{T}_p\mathbf{a}(\theta) - \bar{\mathbf{a}}(\theta)\|_2}{\mathbf{a}(\theta)^H\mathbf{a}(\theta)} \quad (15)$$

为阵列流型变换偏差,式中 $\mathbf{a}(\theta)$ 为阵列流型 $\mathbf{A}(\Theta)$ 的某一行, $\bar{\mathbf{a}}(\theta)$ 为 $\bar{\mathbf{A}}(\Theta_p)$ 的相应列。利用式(15),通过仿真说明阵元数量、观测空间大小、空间划分步长、子空间大小及位置对变换偏差的影响,结果如图 1 所示。仿真时使用均匀线阵,阵元间距为半波长,除图 1(a)对应的仿真结果外,阵元数量均为 8。除图 1(c),图 1(d)对应的仿真结果外,空间划分步长均为 0.1° 。

图 1(a)为阵元数量 8 和 16 时的变换偏差曲线。观测空间 $[-90^\circ 90^\circ]$,变换区间 $[-20^\circ 20^\circ]$ 。可以看出,当阵元数量较多时,变换偏差较小,但在变换区间边缘都存在一个较大的偏差,阵元数量较多时变换区间边缘的过渡会快一些。在变换区间外,远离变换区间时变换偏差减小。

图 1(b)为变换区间大小不同时的变换偏差曲线,观测空间固定为 $[-90^\circ 90^\circ]$ 。可以看出,当变换区间增大时,变换区间内偏差出现起伏,但整体来看偏差变小。可以设想,当变换区间增大到与观测空间相同时,即变换前后的阵列流型不变,则变换矩阵为单位矩阵,此时变换偏差将为零,这与仿真分析得到的趋势是一致的。

图 1(c),图 1(d)为空间划分步长不同时的变换偏差曲线,观测空间固定为 $[-90^\circ 90^\circ]$,变换区间固定为 $[-20^\circ 20^\circ]$ 。由图 1(c)可以看出,空间划分步长为 0.1° 和 1° 时,变换偏差曲线几乎是重合的,这说明空间划分精细到一定程度时,变化偏差趋于稳定。由图 1(d)可以看出,当空间划分步长为 $5^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ 时,变换偏差逐渐变大,变换偏差曲线出现较大起伏;当空间划分步长取 20° 时,变换区间内存在较大变换偏差,可以认为变换失效。

图 1(e)为变换区间位置不同时的变换偏差曲线,观测空间固定为 $[-90^\circ 90^\circ]$ 。可以看出,当变换

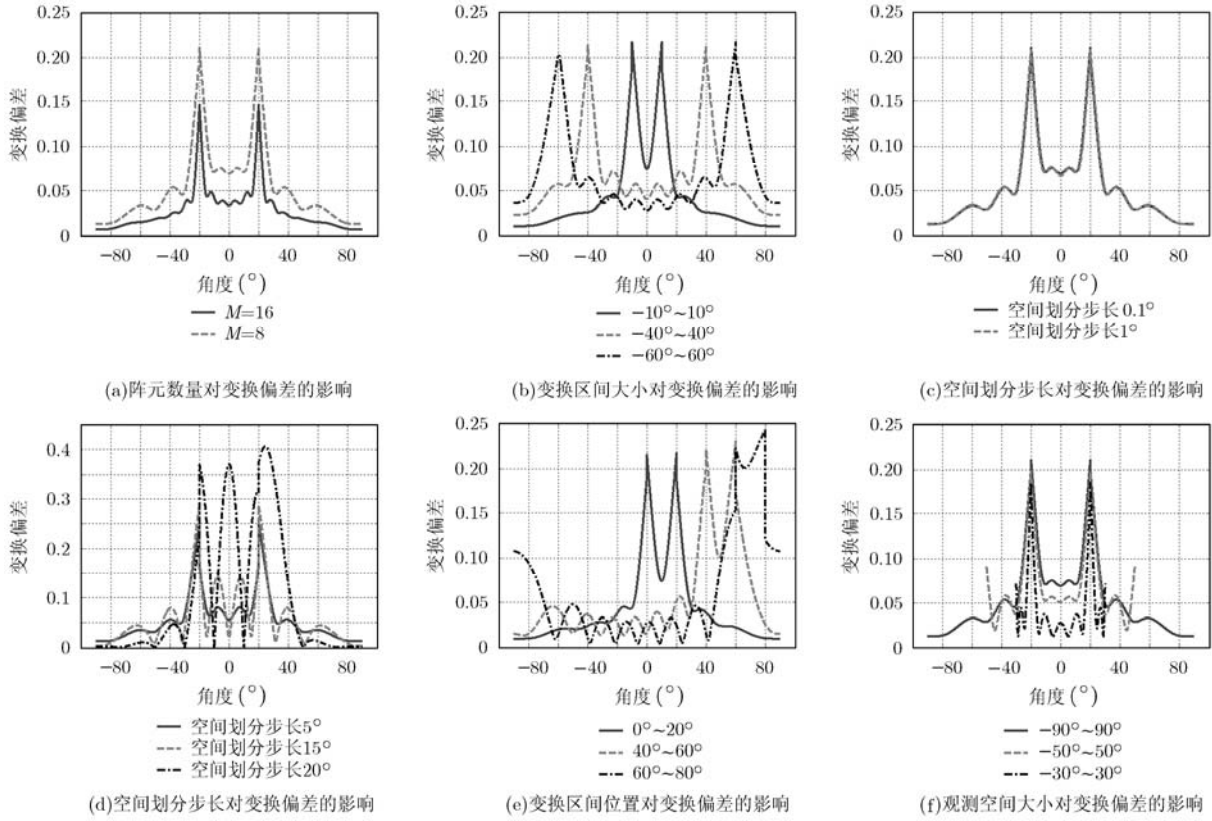


图1 变换偏差分析

区间靠近观测空间边缘时，变换偏差变大。

图 1(f)为观测空间大小不同时的变换偏差曲线，变换空间固定为 $[-20^\circ 20^\circ]$ 。可以看出，当固定变换区间大小，减小观测空间时，变换偏差变小。实际上这与图 1(b)仿真分析得到的变化趋势是类似的。

综上所述，对于本文提出方法的变换偏差有以下结论：

(1)阵元数量较多时，变换偏差较小；

(2)无论阵元数量多少，相比变换区间中间位置，变换区间边缘总是存在较大偏差，阵元数量较多时，变换偏差的过渡会快一些；

(3)空间划分步长越大，变换偏差越大；空间划分步长越小，变换偏差越小。但当空间划分步长小到一定程度，即空间划分精细到一定程度时，变换偏差趋于某一稳定值；

(4)观测空间与变换区间大小越接近，变换偏差越小；

(5)相同大小的变换区间，靠近观测空间中心的变换偏差较小。

在实际应用本文提出方法时，应充分利用信号源分布的先验信息，合理划分变换子空间，使目标尽可能的落在变换偏差较小的区域。

4.2 变换偏差对 DOA 估计的影响

设均匀线阵阵元数量为 8，阵元间距为半波长，有 12 个目标均匀分布在空间 $[-55^\circ 55^\circ]$ 内，那么在 $[0^\circ 20^\circ]$ 变换区间内有 2 个目标，分别位于 $5^\circ, 15^\circ$ 位置。信噪比为 10 dB，快拍数为 200，谱峰搜索间隔为 0.1° 。令观测空间为 $[-60^\circ 60^\circ]$ ，利用本文提出的方法对这两个目标进行估计，并对比空间只有这两个目标时常规 MUSIC 算法的估计结果，如图 2 所示。

本文方法的 DOA 估计结果为 $4.9^\circ, 15.7^\circ$ ，常规 MUSIC 算法的估计结果为 $4.9^\circ, 15.3^\circ$ ，从图 2 可以看出，在变换区间内本文方法能有效地进行 DOA 估计，但整体来看，由于变换偏差的影响，本文方

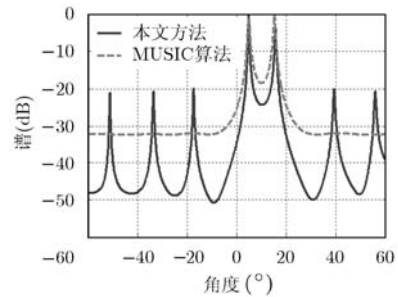


图2 变换偏差对 DOA 估计的影响

法的估计精度不如常规 MUSIC 算法；在变换区间外，由于变换偏差的存在，使得变换区间外目标的信号分量并没有全部去除，出现了伪峰。

4.3 方法有效性及统计性能分析

设均匀线阵阵元数量为 8，阵元间距为半波长，有 12 个目标均匀分布在空间 $[-55^\circ 55^\circ]$ 内，观测空间为 $[-60^\circ 60^\circ]$ ，谱峰搜索间隔为 0.1° 。当快拍数固定为 200 时，信噪比变化区间为 $0\sim 30$ dB，变化间隔为 2 dB；当固定信噪比为 10 dB 时，快拍数变化区间为 $10\sim 500$ ，变化间隔为 10。分别进行 100 次独立重复实验，图 3 给出当信噪比、快拍数变化时，本文方法与常规 MUSIC 算法估计成功概率、估计偏差、估计标准差的对比。

由于阵元数量为 8，目标数量为 12，直接使用 MUSIC 算法是无法进行有效估计的。为了进行对比分析，在使用 MUSIC 算法时，对比本文方法的变换区间，将 12 个目标分为 6 组，每次只对某一组的 2 个目标进行估计。仿真过程中，只有当 12 个目标全部得到有效估计时才认为估计成功；估计偏差、估计标准差为所有目标的均值。

从图 3 可以看出，与常规 MUSIC 算法相比，本文方法的统计性能有所下降，在相同信噪比、快拍数情况下，本文方法的估计成功概率比 MUSIC

算法低；随着信噪比的变化，估计偏差基本上在零值附近波动，估计标准差在 1° 附近波动；随着快拍数的增加，估计偏差和估计标准差都在减小，当快拍数达到一定数目时，偏差和标准差趋于稳定。

5 结束语

基于内插阵列变换思想，本文提出了一种基于阵列导向矢量变换的空域滤波方法。该方法利用信号源分布的先验信息，将整个观测空间内目标的 DOA 估计转化为若干次子空间内的常规 DOA 估计，从而解决了目标数量大于阵列自由度时的 DOA 估计问题。理论分析和仿真验证说明了算法的有效性。本文提出的方法是一种预处理方法，可与各种空间谱估计算法结合，适用性较广。由于变换矩阵求解存在偏差，本文进一步探讨了变换偏差与阵元数目、感兴趣观测空间大小、空间划分步长、变换区间大小和位置的关系，为实际应用中空域的划分提供参考。由于变换矩阵的求解只与阵列结构、观测空间、子空间的划分有关，因此可离线计算变换矩阵并存储起来，以提高算法的实时性。变换偏差是影响本文方法性能的主要因素，为减小变换偏差，下一步的工作重点将放在期望阵列流型 $\bar{A}(\Theta_p)$ 的优化设计和变换矩阵的求解上。

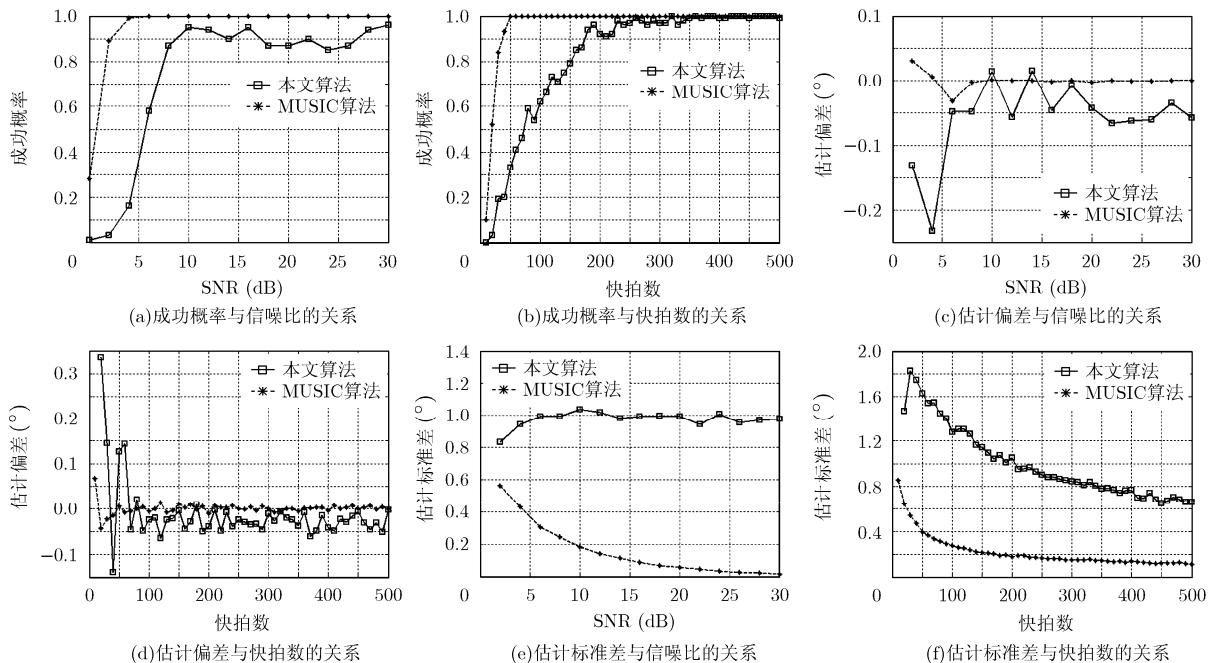


图3 本文方法的统计性能分析

参考文献

- [1] 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-11, 117-122.

- Wang Yong-liang, Chen Hui, Peng Ying-ning, *et al.* Spatial Spectrum Estimation Theory and Algorithms[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 1-11, 117-122.

- [2] Yang Zhi-fei, Wang Yan-qing, and Wang Lei. Research and simulation of spatial spectrum estimation algorithm[C]. Image Analysis and Signal Processing (IASP), Jiyuan, China, April 9–11, 2010: 532–536.
- [3] Yang Qi, Huang Deng-shan, and Jiang Wen. A modified algorithm for DOA estimation of coherent signal with SVD[C]. Computing, Control and Industrial Engineering (CCIE), Wuhan, China, June 5–6, 2010: 408–411.
- [4] Wang Su-ling and Li Ran. Algorithm of two-dimensional DOA estimation for correlative signals[C]. Intelligent System Design and Engineering Application (ISDEA), Changsha, China, Oct. 13–14, 2010: 219–221.
- [5] Dogan M C and Mendel J M. Applications of cumulants to array processing, Part I: aperture extension and array calibration [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(5): 1200–1216.
- [6] Porat B and Friedlander B. Direction finding algorithms based on higher-order statistics [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(9): 2016–2024.
- [7] 赵悦. 基于 NC-MUSIC 的实用超分辨测向算法研究[D]. [硕士学位论文], 哈尔滨工业大学, 2010.
- Zhao Yue. Research of practical superresolution algorithm based on NC-MUSIC algorithm[D]. [Master dissertation], Harbin Institute of Technology, 2010.
- [8] Shamsunder S and Giannakis G B. Signal selective location of non Gaussian cyclostationary sources[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(10): 2860–2864.
- [9] Friedlander B. Direction finding using spatial smoothing with interpolated arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1992, 28(2): 574–587.
- [10] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280.
- [11] 苏保伟. 阵列数字波束形成技术研究[D]. [博士论文], 国防科学技术大学研究生院, 2006.
- Su Bao-wei. A study of array adaptive digital beamforming [D]. [Ph.D. dissertation], Graduate School of National University of Defense Technology, 2006.
- 蒋柏峰：男，1987年生，博士生，研究领域为阵列信号处理。
- 吕晓德：男，1969年生，研究员，研究方向为基于阵列技术的新体制雷达系统及其应用。