

模型噪声中的稀疏恢复算法研究

韩学兵^{*①} 张 颖^②

^①(空军空降兵学院 桂林 541003)

^②(清华大学电子工程系 北京 100084)

摘要: 针对观测和传感矩阵都存在噪声扰动的欠定线性系统的稀疏恢复问题, 该文基于 FOCUSS(FOCaI Underdetermined System Solver)算法提出了一种改进算法——SD(Synchronous Descending)-FOCUSS。文中由 MAP(最大后验)估计方法推导出系统模型的目标函数, 应用松弛迭代算法对其进行优化从而找到近似最优的稀疏解。SD-FOCUSS 算法可应用于 MMV(多观测向量)模型。可证明 SD-FOCUSS 是收敛算法; 最后用仿真实验展示了与其他算法相比时, 新算法在准确性、稳定性等方面的优越性。

关键词: 信号处理; 稀疏恢复; 模型噪声; SD-FOCUSS; 收敛性

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)08-1813-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.01234

Research of Sparse Recovery Algorithm Based on Model Noise

Han Xue-bing^① Zhang Hao^②

^①(Air Force Airborne Academy, Guilin 541003, China)

^②(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: For sparse recovery of underdetermined linear systems where noise perturbations exist in both the measurements and sensing matrix, based on FOCaI Underdetermined System Solver (FOCUSS) algorithm, an improved algorithm, named Synchronous Descending (SD) -FOCUSS, is proposed. The objective function of system model is deduced through a Maximum *A Posteriori* (MAP) estimation; then approximate optimum sparse-solution can be found while optimizing objective function using iterative relaxation algorithm. Another breakthrough of SD-FOCUSS is that the new algorithm can be applied to Multiple Measurement Vector (MMV) models. The convergence of SD-FOCUSS algorithm can be established with mathematical proof. The simulation results illustrate advantages of the new algorithm on accuracy and stability compared with other algorithms.

Key words: Signal processing; Sparse recovery; Model noise; Synchronous Descending-FOCaI Underdetermined System Solver (SD-FOCUSS); Convergence

1 引言

由于在信号处理、信息编码、医学成像等众多领域的广泛应用,以CS(压缩感知/压缩采样)理论^[1,2]为支撑的稀疏恢复成为学者们日益关注的热点问题。目前求解欠定线性系统稀疏解的算法大多都是针对无噪声或观测有噪声的系统提出的,如凸优化方法^[3,4],贪婪算法(包含匹配追踪 MP, 正交匹配追踪 OMP^[5], 正则化正交匹配追踪 ROMP^[6], 压缩采样匹配追踪 CoSaMP^[7]等),以及与本文密切相关的 FOCUSS(FOCaI Underdetermined System Solver)算法^[8-10]等。这些算法对传感矩阵中存在噪声的情况(模型噪声)未加考虑。目前,只有一小部分研究

关注了线性回归模型中传感矩阵受扰的情况。Herman 等人^[11]分析了模型噪声存在对 BP(Basis Pursuit)算法^[12]的性能影响,并给出了 BP 算法稳定恢复的条件;Zhu 等人^[13]把 TLS 方法应用于处理矩阵扰动情况,基于 Lasso 算法^[14]提出了新算法 S-TLS。但是,文献[11]只是从理论上分析了存在模型噪声时稀疏解的界的问题;文献[13]的研究局限于凸优化方法(Lasso 算法属凸优化范畴),不适用于大规模运算;作为可求解较大规模稀疏恢复问题的 FOCUSS 算法,文献[15,16]提出了 TLS(Total Least Squares)-FOCUSS 算法,但在求解过程中需要进行 EVD(特征值分解)运算,运算速度受到一定程度的限制。

本文的主要创新是基于总体最小二乘模型扩展了 FOCUSS 算法,提出了 SD(Synchronous

2011-11-25 收到, 2012-05-16 改回

*通信作者: 韩学兵 thuhxb@gmail.com

Descending)-FOCUSS 算法。新算法具备 FOCUSS 算法收敛快速、适应性强等优点,在对存在模型噪声的系统进行稀疏恢复时,比同类算法 S-TLS, TLS-FOCUSS 恢复成功效率更高,结果更精确,计算速度更快。此外,SD-FOCUSS 算法解决存在模型噪声的情况下同类算法无法应用于 MMV(多观测向量)模型的问题,进一步延伸了新算法的应用领域。

2 受扰动的线性回归模型

考虑欠定线性系统 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$, 其中 \mathbf{x} 为待重构的 $n \times 1$ 维未知向量, \mathbf{y} 为已知的 $m \times 1$ 维观测向量, Φ 为已知的 $m \times n$ 维基(传感)矩阵。若已知 \mathbf{x} 是稀疏的,即 $n \times 1$ 维向量 \mathbf{x} 中至少有 $n - m$ 个项的值为 0, 根据 CS 理论, \mathbf{x} 可以通过解决 $\min \|\mathbf{x}\|_1$ s.t. $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ 这个凸优化问题精确重构出来。当观测中存在噪声时,即 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e}$ 时,相应的求解方法可表达为一个拉格朗日形式的凸优化问题^[12,17]: $\min \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{x}\|_1$ 。对存在模型噪声的系统又该如何重构稀疏向量 \mathbf{x} 呢? 受扰动的线性回归模型可表述为^[13,15]

$$\mathbf{y} = (\Phi + \mathbf{E})\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (1)$$

其中 \mathbf{E} 为模型噪声矩阵, \mathbf{e} 为观测噪声向量。 \mathbf{e}, \mathbf{E} 都属白噪声且相互独立,假设 $\mathbf{e} \sim N(0, \sigma_1^2 \mathbf{I}_1)$, $\text{vec}(\mathbf{E}) \sim N(0, \sigma_2^2 \mathbf{I}_2)$ 。 \mathbf{e}, \mathbf{E} 的 PDF(概率密度函数)分别为

$$\left. \begin{aligned} P_e(\mathbf{e}) &= \exp\left[-\frac{\mathbf{e}^H \mathbf{e}}{2\sigma_1^2} + C_1\right] \\ P_E(\mathbf{E}) &= \exp\left[-\frac{\text{vec}(\mathbf{E})^H \text{vec}(\mathbf{E})}{2\sigma_2^2} + C_2\right] \\ &= \exp\left[-\frac{\|\mathbf{E}\|_F^2}{2\sigma_2^2} + C_2\right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

C_1, C_2 是常数。本文认为 \mathbf{x} 是 k -稀疏的。如何找出式(1)的稀疏解是本文的目的。

针对式(1)的稀疏恢复算法,文献[13]和文献[15]分别提出了 S-TLS 算法和 TLS-FOCUSS 算法。为了优化所构建的目标函数, S-TLS 采用迭代交替下降法,把 \mathbf{x} 和 \mathbf{E} 都作为变量来处理,先假设估计值 $\hat{\mathbf{E}}$ 已知找出 \mathbf{x} 的估计值 $\hat{\mathbf{x}}$, 再假设估计值 $\hat{\mathbf{x}}$ 已知找出 \mathbf{E} 的估计值 $\hat{\mathbf{E}}$, 如此交替迭代使用 Lasso 方法,直到找到一个收敛解。在最终收敛前, S-TLS 每次迭代都需进行一个完整的凸优化运算,因此计算复杂度和运算时间极大地限制了该算法的推广应用。TLS-FOCUSS 的复杂度和运算时间都得到了很大改善,但每次迭代中都需进行 EVD 运算,使其不能很好地应用于超大规模计算。此外,上述算法都不是针对 MMV 模型提出的算法,因此不适用于 DOA 估计、源定位、脑磁成像等领域。本文提出的

SD-FOCUSS 算法在每步迭代中同时估计 \mathbf{x} 和 \mathbf{E} , 完成运算只需一个收敛过程,计算复杂度显著降低,计算速度更快,可适用于超大规模计算问题;同时,该算法是针对 MMV 模型提出的有效恢复算法。

3 SD-FOCUSS 算法

3.1 算法推导

把模型式(1)中的 \mathbf{x} 和 \mathbf{E} 都作为随机变量,由贝叶斯理论可得到 \mathbf{x}, \mathbf{E} 的联合 MAP 估计为

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}}, \hat{\mathbf{E}}_{\text{MAP}}] &= \arg \max_{\mathbf{x}, \mathbf{E}} \ln P_{\mathbf{x}, \mathbf{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{E} | \mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}, \mathbf{E}} [\ln P_y(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{E}) \\ &\quad + \ln P_x(\mathbf{x}) + \ln P_E(\mathbf{E})] \end{aligned} \quad (3)$$

可知 $\ln P_y(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{E}) = (1/\sigma_1^2) \|\mathbf{y} - (\Phi + \mathbf{E})\mathbf{x}\|_2^2 + C_1$ 。要进一步讨论,必须得到稀疏向量 \mathbf{x} 的先验分布情况。文献[9]中已证明用广义高斯分布来近似逼近 \mathbf{x} 的 PDF 是合理的,即

$$P_x(\mathbf{x}) = C_3 \exp\left[-\frac{1}{2\beta^p} \sum_{k=1}^m |x[k]|^p\right] \quad (4)$$

其中 $p \in (0, 1]$ 是可设置的范数因子(p 越小,结果越精确,计算量越大), C_3 是一个常数, $\beta^2 = 2^{-p/2} \frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(3/p)}$ [9] ($\Gamma(\cdot)$ 代表标准 Gamma 分布函数),

由式(3), 式(4)可得 \mathbf{x}, \mathbf{E} 为变量的目标函数

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = \|\mathbf{y} - (\Phi + \mathbf{E})\mathbf{x}\|_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^{-2} \text{tr}(\mathbf{E}^H \mathbf{E}) + \gamma \|\mathbf{x}\|_p^p \quad (5)$$

其中 $\gamma = \sigma_1^2 / \beta^p$, $\|\mathbf{x}\|_p^p = \sum_{k=1}^m |x[k]|^p$, $\text{tr}(\cdot)$ 代表矩阵的迹,且有 $\text{tr}(\mathbf{E}^H \mathbf{E}) = \|\mathbf{E}\|_F^2$ 。最优解需满足的必要条件是 $J(\mathbf{x}, \mathbf{E})$ 对分量 \mathbf{x}, \mathbf{E} 的偏导都等于 0, 即

(1) $\nabla_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}, \mathbf{E}_*) = 0$ 。由 $\nabla_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = \mathbf{E} \mathbf{x} \mathbf{x}^H - (\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}) \mathbf{x}^H + \sigma_1^2 \sigma_2^{-1} \mathbf{E}$, 可得到

$$\mathbf{E}_*(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}) \mathbf{x}^H}{\sigma_1^2 \sigma_2^{-2} + \mathbf{x}^H \mathbf{x}} \quad (6)$$

式(6)推导中用到了矩阵求逆引理的扩展形式,即 $(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{F}^H \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^H = \mathbf{F}^H (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{F} \mathbf{F}^H)^{-1}$ 。

(2) $\nabla_{\mathbf{E}} J(\mathbf{x}_*, \mathbf{E}) = 0$ 。我们有

$$2(\Phi + \mathbf{E})^H (\Phi + \mathbf{E}) \mathbf{x}_* - 2(\Phi + \mathbf{E})^H \mathbf{y} + 2\alpha \Pi(\mathbf{x}_*) \mathbf{x}_* = 0$$

其中 $\alpha = p\gamma/2$, $\Pi(\mathbf{x}) = \text{diag}\left(\left[|x[i]|^{p-2}\right]_{i=1, \dots, n}\right)$ 。令

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{x}) &= \mathbf{W}^{-2}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{A} = \Phi + \mathbf{E}, \quad \text{有} \\ &\left((\mathbf{A} \mathbf{W}(\mathbf{x}_*))^H \mathbf{A} \mathbf{W}(\mathbf{x}_*) + \alpha \mathbf{I}\right) \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}_*) \mathbf{x}_* \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{W}(\mathbf{x}_*))^H \mathbf{y} \end{aligned}$$

因此, \mathbf{x} 的局部最优解满足

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_* &= \mathbf{W}(\mathbf{x}_*) \left((\mathbf{A} \mathbf{W}(\mathbf{x}_*))^H \mathbf{A} \mathbf{W}(\mathbf{x}_*) + \alpha \mathbf{I} \right)^{-1} \\ &\quad \cdot (\mathbf{A} \mathbf{W}(\mathbf{x}_*))^H \mathbf{y} \end{aligned} \quad (7)$$

把式(6)代入式(7), 可知式(7)左右两边都是关于的 \mathbf{x}_k 的表达式。应用迭代松弛算法, 可得递推求解公式 $\mathbf{x}_k = \mathbf{W}_k(\mathbf{A}_k^H \mathbf{A}_k + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_k^H \mathbf{y}$, 其中 $\mathbf{A}_k = (\Phi + \mathbf{E}_k(\mathbf{x}_{k-1})) \mathbf{W}_k$, $\mathbf{W}_k = \text{diag}\left(\left[|x_{k-1}[i]|^{1-p/2}\right]_{i=1,\dots,n}\right)$ 。

由矩阵求逆引理,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{A}_k^H (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^H + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y} \quad (8)$$

随着 k 的增加, 当 \mathbf{x}_k 或 \mathbf{E}_k 的值不再变化或变化很小时, 结束迭代得到收敛解。

以下是 SD-FOCUSS 算法步骤:

初始化: \mathbf{y} , \mathbf{x}_0 , \mathbf{E}_0 , Φ , σ_1 , σ_2 , p , ϵ (ϵ 为预设的收敛参数)

(1) 令 $\mathbf{W}_k = \text{diag}\left(\left[|x_{k-1}[i]|^{1-p/2}\right]_{i=1,\dots,n}\right)$;

(2) 计算 $\mathbf{E}_k = \frac{(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_{k-1}) \mathbf{x}_{k-1}^H}{\sigma_1^2 \sigma_2^{-2} + \|\mathbf{x}_{k-1}\|_2^2}$, $\mathbf{A}_k = (\Phi + \mathbf{E}_k) \mathbf{W}_k$;

(3) 计算 $\mathbf{x}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{A}_k^H (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^H + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y}$, 其中, $\alpha = \frac{\sigma_1^2 p}{2\beta^p}$;

(4) 如果 $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_2 / \|\mathbf{x}_{k-1}\|_2 < \epsilon$, 算法结束, 输出结果; 否则转到步骤(1)。

3.2 算法收敛性证明

由式(8), 令 $\mathbf{x}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{b}_k$, 其中 \mathbf{b}_k 可看成优化问题 $\mathbf{b}_k = \arg \min \|\mathbf{y} - \mathbf{A}_k \mathbf{W}_k \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{b}\|_2^2$ 的解。等价地, \mathbf{x}_k 可看成是优化问题 $\mathbf{x}_k = \arg \min_x Q_k(\mathbf{x})$ ($Q_k(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}_k \mathbf{x}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{x}\|_2^2$) 的解。可知 SD-FOCUSS 算法可看成一个迭代加权最小 ℓ_2 -范数方法, 这与 FOCUSS 方法本质上是一样的^[8,9]。因为 \mathbf{x}_k 是令 $Q_k(\mathbf{x})$ 最小的值, 所以当 $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_{k-1}$ 时有 $Q_k(\mathbf{x}_k) \leq Q_k(\mathbf{x}_{k-1})$ 。文献[9]证明了以下结论

$$\sum (|x_2[i]|^p - |x_1[i]|^p) \leq \frac{p}{2} (\mathbf{x}_2^T \Pi(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1^T \Pi(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}_1)$$

所以有

$$\begin{aligned} & J(\mathbf{x}_k, \mathbf{E}_k) - J(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{E}_k) \\ &= \left[\|\mathbf{y} - (\Phi + \mathbf{E}_k) \mathbf{x}_k\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{x}_k\|_p^p \right] \\ &\quad - \left[\|\mathbf{y} - (\Phi + \mathbf{E}_k) \mathbf{x}_{k-1}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{x}_{k-1}\|_p^p \right] \\ &\leq \left[\|\mathbf{y} - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k\|_2^2 + \alpha \mathbf{x}_k^T \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{x}_k \right] \\ &\quad - \left[\|\mathbf{y} - \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1}\|_2^2 + \alpha \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{x}_{k-1} \right] \\ &= Q_k(\mathbf{x}_k) - Q_k(\mathbf{x}_{k-1}) < 0 \end{aligned}$$

因为 \mathbf{E}_k 是 $J(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{E})$ 的最小值, 有 $J(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{E}_k) \leq J(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{E}_{k-1})$ 。所以 $J(\mathbf{x}_k, \mathbf{E}_k) \leq J(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{E}_{k-1})$, 且 $J(\mathbf{x}, \mathbf{E}) \geq 0$, 可知 SD-FOCUSS 是一个收敛算法。

4 MMV 模型下的 SD-FOCUSS

除了低计算量, SD-FOCUSS 的另一优点是可

应用于 MMV 模型, 这是 S-TLS 和 TLS-FOCUSS 未能处理的。假设 $\mathbf{y}^{(l)} = (\Phi + \mathbf{E}) \mathbf{x}^{(l)} + \mathbf{e}^{(l)}$, $l=1, \dots, L$, 其中 $\mathbf{y}^{(l)} \in \mathbf{C}^m$, $\mathbf{x}^{(l)} \in \mathbf{C}^n$, L 为观测的快拍数; $\mathbf{x}^{(l)}$, $l=1, \dots, L$ 都是稀疏的且稀疏基坐标相同。令 $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(L)}]$, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(L)}]$ 。可称 \mathbf{X} 是行稀疏的矩阵。

MMV 模型的优化目标函数表示为^[10,17]

$$J(\mathbf{X}, \mathbf{E}) = \|\mathbf{Y} - (\Phi + \mathbf{E}) \mathbf{X}\|_F^2 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \|\mathbf{E}\|_F^2 + \gamma \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=1}^L \mathbf{x}^{(l)}[i]^2 \right)^{p/2} \quad (9)$$

权重矩阵 \mathbf{W}_k 的表达式为^[10]

$$\mathbf{W}_k = \text{diag}\left(c_k[i]^{1-p/2}\right), \text{ 其中 } c_k[i] = \left(\sum_{l=1}^L \left(x_{k-1}^{(l)}[i]\right)^2 \right)^{1/2}$$

式(8)可重写为 $\mathbf{X}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{A}_k^H (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^H + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Y}$ 。对于 $\nabla_{\mathbf{E}} J(\mathbf{X}, \mathbf{E}_k) = 0$, 可更新式(6)为

$$\mathbf{E}_k = (\mathbf{Y} - \Phi \mathbf{X}_{k-1}) \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \mathbf{I} + \mathbf{X}_{k-1}^H \mathbf{X}_{k-1} \right)^{-1} \mathbf{X}_{k-1}^H \quad (10)$$

MMV 模型的 SD-FOCUSS 算法步骤总结如下:

初始化: \mathbf{X}_0 , \mathbf{E}_0 , Φ , σ_1 , σ_2 , p

(1) 令 $\mathbf{W}_k = \text{diag}\left(\left[c_k[i]^{1-p/2}\right]_{i=1,\dots,n}\right)$, 其中, $c_k[i] =$

$$\left(\sum_{l=1}^L \left(x_{k-1}^{(l)}[i]\right)^2 \right)^{1/2};$$

(2) 计算 $\mathbf{E}_k = (\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{X}_{k-1}) [\sigma_1^2 \sigma_2^{-2} \mathbf{I} + \mathbf{X}_{k-1}^H \mathbf{X}_{k-1}]^{-1} \cdot \mathbf{X}_{k-1}^H$, 及 $\mathbf{A}_k = (\Phi + \mathbf{E}_k) \mathbf{W}_k$;

(3) 计算 $\mathbf{X}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{A}_k^H (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^H + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Y}$;

(4) 如果 $\|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_2 / \|\mathbf{X}_{k-1}\|_2 < \epsilon$, 算法结束, 输出结果; 否则转到步骤(1)。

5 算法仿真与性能分析

仿真中的参数设置如下: 范数因子 $p = 0.5$, 收敛门限 $\epsilon = 0.01$; 在 Monte Carlo 仿真中, 进行 1000 次独立实验; $m \times n$ 维的传感矩阵 Φ 为高斯随机矩阵, Φ 中各项服从独立同分布的正态分布。仿真中恢复结果的 k 个非零项位置(前 k 个最大值点)与实际位置完全匹配, 则认为算法成功; 否则认为算法失败。

5.1 SMV 仿真实验

本节用数字仿真实验说明 SD-FOCUSS 算法对观测向量和传感矩阵都受扰动的系统的稀疏恢复性能。仿真中, \mathbf{x} 是 k -稀疏的随机输入向量, 且 \mathbf{x} 的能量幅度是归一化的, 即 $\sum |x_i|^2 = 1$; 各次实验中, \mathbf{e} 中各项服从独立同分布的均值为 0、方差为 σ_1^2 的随机高斯分布, \mathbf{E} 中各项服从独立同分布的均值为 0, 方差为 σ_2^2 的随机高斯分布, \mathbf{e} 和 \mathbf{E} 互相独立;

系统中关于信号与观测噪声的能量比记为 SN(M)R, 关于信号与基矩阵噪声的能量比记为 SN(D)R, 则 $\text{SN(M)R} = -10 \lg \sigma_1^2$, $\text{SN(D)R} = -10 \lg \sigma_2^2$; 非零项坐标集 \mathbf{T} 中各项(无重复地)服从 $1 \sim n$ 的离散均匀分布。接下来的单快拍(SMV)模型仿真中, 与 SD-FOCUSS 进行对比的算法包括: 标准 FOCUSS 算法, S-TLS 算法及 TLS-FOCUSS 算法。

图 1 涉及的实验中, 信号稀疏度 $k = 3$, SN(M)R = 15 dB, 传感矩阵的行数和列数分别为: $m = 20$, $n = 0$ 。针对不同的 SN(D)R, 图 1(a)给出了各算法稀疏恢复成功率的统计曲线; 图 1(b)给出了在算法正确找出信号非零项位置 \mathbf{T} 前提下, 幅度恢复的均方误差(MSE)曲线。从图 1 可看出, 在模型噪声和观测噪声同时存在的环境中, 与其他算法相比, SD-FOCUSS 算法稳健性更好, 恢复的精度也更高。

针对不同的稀疏率(k/n), 图 2 给出了各算法稀疏恢复成功率的曲线图, 仿真设置为: $m = 20$, $n = 30$, $k = 1, \dots, 10$, SN(M)R=SN(D)R=15 dB。图 2(a)中 \mathbf{x}_T 各分量幅度服从正态分布; 图 2(b)中 \mathbf{x}_T 各分量幅度均为 1。从图 2 中可看出, SD-FOCUSS 和 TLS-FOCUSS 的稳健性, 要优于传统稀疏恢复算法(以 FOCUSS 为例), 以及同样能够抑制模型噪声的 S-TLS 算法; SD-FOCUSS 的稳健性稍逊于 TLS-FOCUSS, 但其在计算速度上的优势足以弥补其相对于 TLS-FOCUSS 的劣势。

表 1 给出了各算法在同等条件下的运行时间, 仿真条件为: 仿真软件为 Matlab 7.9, 计算机配置为 Core2 1.8 GHz, 2 G 内存, $m = 128$, $n = 512$ 。其中, S-TLS 算法的运行时间最长; TLS-FOCUSS 算法在运算速度上有一定提高, 但远不如 SD-FOCUSS 算法; SD-FOCUSS 算法在可处理模型噪声的同类稀疏算法中, 运算速度是最快的, 已接近基本 FOCUSS 算法的运算速度。

通过本小节仿真实验, 可得出 SD-FOCUSS 算法无论是在恢复成功率、恢复精度, 还是运算速度方面, 与同类算法相比, 其性能都是较优的。

5.2 MMV 模型中的稀疏恢复

本仿真主要考察在 MMV 模型中 SD-FOCUSS 稀疏恢复的性能。 \mathbf{X} 是一个 $n \times L$, k 行稀疏的输入信号矩阵, \mathbf{Y} 为 $m \times L$ 的观测矩阵, L 为快拍数。每次实验中, \mathbf{X} 的非零行坐标 \mathbf{T} 服从离散的均匀分布; 非零行中各项均由服从标准正态分布的函数随机独立产生; 观测噪声矩阵 $[\mathbf{e}^{(l)}]_{l=1, \dots, L}$ 中各分量均服从独立同分布的、均值为 0 方差为 σ_1^2 高斯随机分布, 模型噪声矩阵 \mathbf{E} 中各分量均服从独立同分布的、均

表 1 各类算法运行时间(ms)

SNR(dB)	FOCUSS	TLS-FOC	S-TLS	SD-FOC
10	3.6	102.4	353.4	12.1
11	3.1	87.8	284.4	9.5
12	2.9	87.7	270.4	9.6
13	2.7	87.6	262.9	9.2
14	2.7	87.8	257.7	8.7
15	2.7	87.7	252.1	8.7
16	2.7	87.7	249.7	8.3
17	2.6	87.8	248.4	8.1
18	2.6	87.8	246.5	7.8
19	3.2	103.2	268.3	9.6
20	2.6	88.0	246.2	7.4

值为 0 方差为 σ_2^2 高斯随机分布, 且 $[\mathbf{e}^{(l)}]_{l=1, \dots, L}$ 和 \mathbf{E} 相互独立。系统模型可表述为 $\mathbf{Y} = (\mathbf{\Phi} + \mathbf{E})\mathbf{X} + [\mathbf{e}^{(l)}]_{l=1, \dots, L}$ 。真值和估计值的相对 MSE 定义为^[10]:
$$\text{MSE} = \mathbf{E} \left(\frac{\|\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|_F^2}{\|\mathbf{X}\|_F^2} \right)$$
。仿真中除了 MMV SD-FOCUSS 算法, 其他算法还包括^[10]: MMV FOCUSS, Regularized MMV FOCUSS 及 MMV OMP。

仿真参数设置如下: 矩阵维度 $m = 20$, $n = 30$, 稀疏度 $k = 7$ 。信噪比 SNR 和快拍数 L 根据仿真背景不同会产生一些变化。图 3 与图 4 分别给出了当 $L = 2, 5, 6$ 时算法成功率曲线和恢复幅度 MSE 曲线, 可发现随着 L 的增大, 各算法的成功率都有所上升, 而 SD-FOCUSS 的成功率一直是最高的, 并且恢复精度也一直是最好的。

6 结束语

本文针对观测向量和传感矩阵都受到扰动的欠定系统, 通过扩展 FOCUSS 算法, 提出了新的稀疏恢复算法——SD-FOCUSS 算法。新算法通过数学证明是可收敛的, 且可应用于具有行稀疏结构的 MMV 模型。仿真实验表明, 与未考虑矩阵扰动的 FOCUSS 算法及同类算法中的 S-TLS 算法, TLS-FOCUSS 算法相比, 无论是恢复成功率还是恢复精度, 新算法的恢复性能都具有明显的优势; 同时, 新算法又大大提升了模型噪声下稀疏恢复的运算速度。SD-FOCUSS 对于实际应用问题, 如 DOA 估计, 频率估计, 认知无线电传感等方面, 有着广泛的应用前景。

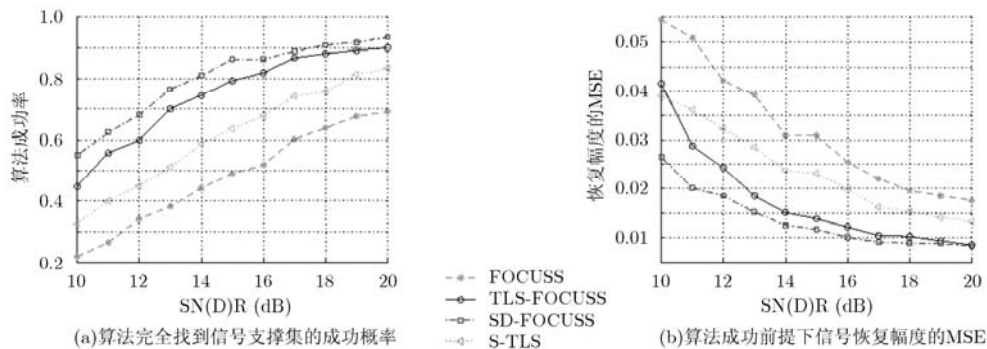


图 1 稀疏度 $k = 3$ 时各类算法性能比较 ($m = 20, n = 30$)

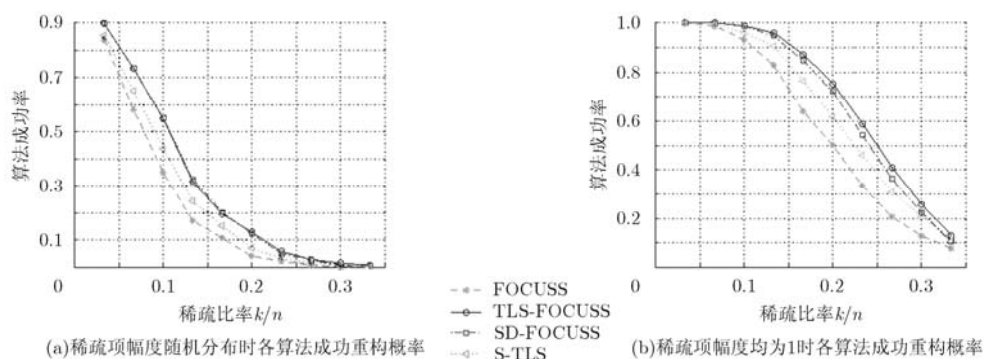


图 2 不同 k/n 时各类算法成功率比较 ($m = 20, n = 30$)

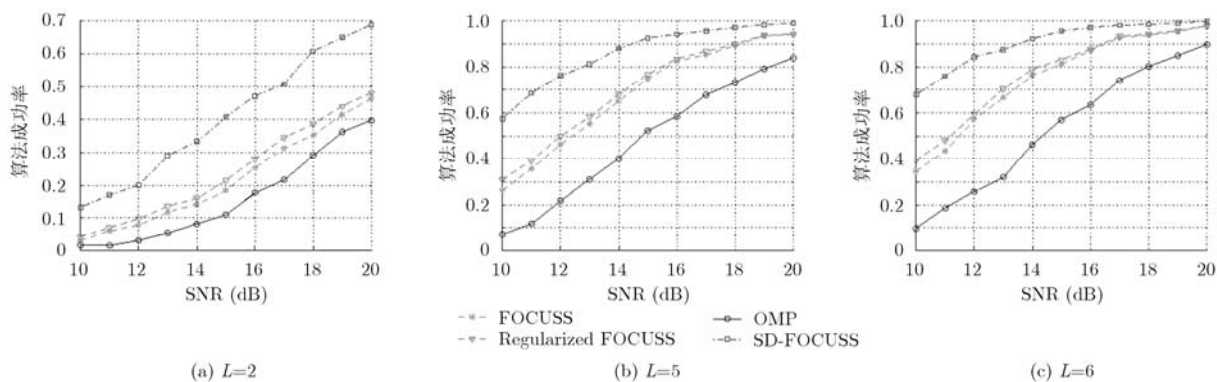


图 3 不同 L 值时各算法的成功率

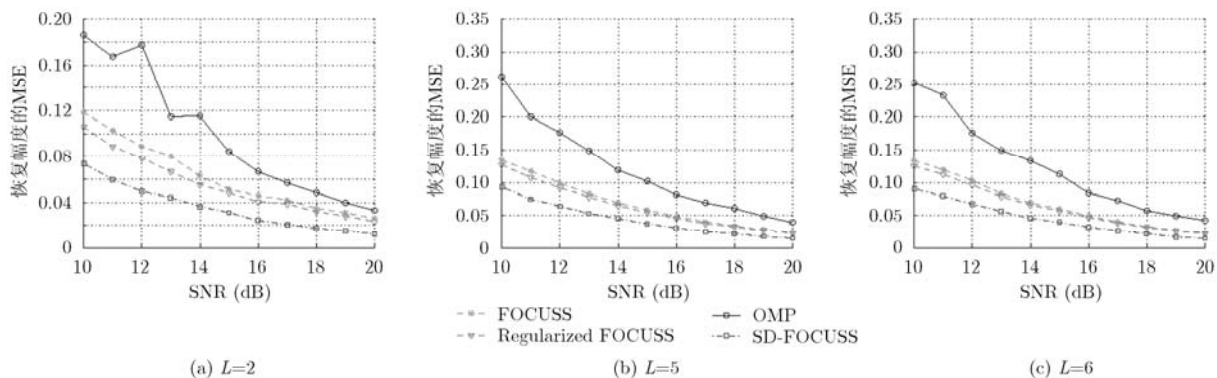


图 4 不同 L 值时各算法恢复结果的 MSE

参考文献

- [1] Candès E J. Compressive sampling[C]. Proceedings of International Congress of Mathematicians, European Mathematical Society, Zurich, 2006: 1433–1452.
- [2] Candès E J and Tao T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203–4215.
- [3] Donoho D L and Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, 2003, 100(5): 2197–2202.
- [4] Xu W, Khajehnejad M A, Avestimehr A S, *et al.* Breaking through the thresholds: an analysis for iterative reweighted minimization via the grassmann angle framework[C]. Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Dallas, 2010: 5498–5501.
- [5] Tropp J A and Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655–4666.
- [6] Needell D and Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Journal of Selected Topics Signal Processing*, 2010, 4(2): 310–316.
- [7] Needell D and Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 26(3): 301–321.
- [8] Gorodnitsky I F and Rao B D. Sparse signal reconstructions from limited data using FOCUSS: a re-weighted minimum norm algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(3): 600–616.
- [9] Rao B D, Engan K, Cotter S F, *et al.* Subset selection in noise based on diversity measure minimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(3): 760–770.
- [10] Cotter S F, Rao B D, Engan K, *et al.* Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2477–2488.
- [11] Herman M A and Strohmer T. General deviants: an analysis of perturbations in compressed sensing[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 342–349.
- [12] Chen S, Donoho D L, and Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Journal Scientific Computing*, 1998, 20(1): 33–61.
- [13] Zhu H, Leus G, and Giannakis G B. Sparsity-cognizant total least-Squares for perturbed compressive sampling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(5): 2002–2016.
- [14] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the Lasso[J]. *Journal of Royal Statistical Society Series B(Methodological)*, 1996, 58(1): 267–288.
- [15] Han X, Zhang H, and Meng H. TLS-FOCUSS for sparse recovery with perturbed dictionary[C]. Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Prague, 2011: 3952–3955.
- [16] 韩学兵. 稀疏恢复算法研究及其在DOA估计中的应用[D]. [硕士学位论文], 清华大学电子工程系, 2011.
- [17] Malioutov D, Cetin M, and Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022.

韩学兵: 男, 1982年生, 讲师, 研究方向为稀疏信号处理.

张颢: 男, 1972年生, 副教授, 博士生导师, 研究方向为雷达信号处理、复杂随机信号分析.