

## 水下目标方位估计的克拉美-罗界研究

曾雄飞\* 孙贵青 黄海宁  
(中国科学院声学研究所 北京 100190)

**摘要:** 该文首次给出了任意平面离散阵列对水下窄带源和宽带源进行近场测距的克拉美-罗界(CRB), 并进一步全面地推导了相应远场测向的CRB表达式。由此揭示了近场测距和远场测向的CRB的影响因素和特点: (1)两者的影响因素均可分为两部分: 阵列相关因素, 如阵列结构和阵列孔径等; 目标信号相关因素, 如目标的相对方位、信号频率、带宽和信噪比等。(2)两者均与信号带宽和谱密度函数构成的一个联合量成反比。(3)近场测距的CRB与目标距离的四次方成正比。(4)近场测距的CRB与基阵参考点的选择有关, 而远场测向的CRB则与其无关。(5)对于均匀直线阵, 近场测距CRB大致与阵列孔径的五次方成反比, 而远场测向CRB则大致与阵列孔径的三次方成反比; 对于均匀圆周阵, 两者均与阵列孔径成反比, 且与目标的相对方位无关。Monte-Carlo仿真结果验证了理论分析和上述结论的正确性。该文CRB不仅给出了近场测距和远场测向的最佳估计性能, 而且为阵列及信号的设计提供了理论指导, 以达到最优的测距和测向效果。

**关键词:** 水声信号处理; 近场测距; 远场测向; 窄带信号; 宽带信号; 克拉美-罗界

中图分类号: TB566

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)01-0092-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.01224

## Craomér-Rao Bound of Position Estimation for Underwater Source

Zeng Xiong-fei Sun Gui-qing Huang Hai-ning  
(Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** The Craomér-Rao Bound (CRB) expression of near-field distance estimation for underwater source is first presented. Furthermore, the CRB of far-field Direction-Of-Arrival (DOA) estimation is deduced. The characteristics and factors of CRB results are shown as following: (1)Both of the distance estimation CRB and the DOA estimation CRB can be divided into two items, one of which is relative to the geometry of array, including array manifold and array aperture, while the other one depends on the signal characteristics, containing source direction, frequency, bandwidth and SNR etc; (2)Both of them are inversely proportional to an item which is composed of bandwidth and spectrum density function; (3)The distance estimation CRB is directly proportional to the forth power of distance; (4)The distance estimation CRB is relative to the position of reference point, while the DOA estimation CRB is not; (5)For Uniform Linear Array (ULA), the distance estimation CRB is close to be inversely proportional to the fifth power of array aperture, and the DOA estimation CRB is close to be inversely proportional to the cube of array aperture; for Uniform Circle Array (UCA), both of them is inversely proportional to the array aperture and independent of source direction. The Monte-Carlo simulation results validate the theoretical analysis and the conclusions. This paper not only presents the best performance of distance estimation and DOA estimation, but also provides the theoretical guidance of array and signal design to achieve the optimum estimation.

**Key words:** Underwater signal processing; Near-field distance estimation; Far-field DOA estimation; Narrowband signal; Wideband signal; Craomér-Rao Bound (CRB)

### 1 引言

在参数估计理论中, 克拉美-罗下界(CRB)是统计学中最重要的定理之一, 它给出了一定条件下

未知参数的无偏估计量的方差极限<sup>[1]</sup>。因此, CRB广泛应用于雷达、声呐、无线通信和卫星定位等领域的参数估计性能的评价<sup>[2-5]</sup>, 尤其是在水声阵列信号处理方面, 研究一定条件下参数估计的CRB具有十分重要的意义<sup>[6-13]</sup>。

Stoica等人<sup>[6]</sup>给出了窄带源波达方向(DOA)估计的CRB解析式, 以此为基础, 后续的宽带源DOA估

2011-11-25 收到, 2012-11-28 改回

国家自然科学基金(10904160)资助课题

\*通信作者: 曾雄飞 zengxf2004@126.com

计的CRB研究也逐渐展开。文献[7]推导了宽带源DOA估计的CRB，但表达式繁琐而难于计算，没能得到简洁明确的解析式。文献[8]根据水下阵列样本数据的联合概率密度函数和Fisher信息矩阵，推导得到了较为明确的宽带源DOA估计CRB的表达式。文献[9]推导了多源情形下宽带DOA估计的CRB，给出了任意阵列情形下Fisher信息矩阵元素的直接计算公式。文献[10]也推导出了任意平面阵、多源方位估计的宽带CRB，其中定义的频率二阶矩将信号带宽和谱密度函数融合在一起，恰当地解释了下述现象：信号带宽越大，CRB越小；信号在高频部分的能量越多，CRB越小。但该文得到的结论——对均匀直线阵(ULA)，基阵参考点的选择会对远场条件下DOA估计的CRB产生影响——还值得商榷。文献[11]则给出了声矢量传感器线阵DOA估计的CRB表达式，包括窄带和宽带情形。上述所列文献均是对DOA估计的CRB方面的研究，从窄带源到宽带源，从单源到多源，从声压传感器阵列到声矢量传感器阵列。实际上，在阵列信号处理中，另一重要内容就是目标距离的估计。针对中远场目标的检测和测量，常用的水下被动定位法有3点测距<sup>[1]</sup>和匹配场处理(MFP)等。对于近场目标的精确测距，聚焦波束形成定位法<sup>[13,14]</sup>则较为适用，同样还有最大似然法(ML)定位<sup>[12]</sup>等等。Chen等人<sup>[12]</sup>在单源情况下推导了一种针对近场目标定位和测向的宽带CRB表达式，指出定位的CRB可分为两个独立部分：信号特性和阵型。但表达式不简约，不能直接计算出结果，也没能全面分析相应CRB的特性和具体影响因素。文献[13]中给出了ULA近场测距的CRB表达式，包括窄带情形和宽带情形，但对CRB的进一步分析不够全面，且没有将其推广到平面任意离散阵列的情形。

本文首次给出了任意平面离散阵列对水下窄带源和宽带源进行近场测距的CRB结果，并进一步推导了相应远场测向的CRB表达式。在水下窄带和宽带阵列数学模型的基础上，首先推导基于窄带模型的近场测距的Fisher矩阵，得到任意平面离散阵列在近场条件下对窄带源进行测距的CRB解析式，然后根据宽带信号可以划分为若干个窄带的特点，推导出基于宽带模型的近场测距的Fisher矩阵并得到相应CRB解析式。接着，本文以同样的思路推导出任意平面离散阵列在远场条件下对窄带源和宽带源进行测向的CRB解析式。根据近场测距和远场测向的CRB结果，详细分析了CRB的影响因素，清楚地揭示了近场测距和远场测向的性能与基阵参考点的选择、阵列的几何形状、阵列的孔径、目标信号的特性以及目标方位或距离等之间的关系。最后通过计

算机仿真实验验证了理论推导和分析的正确性，为阵列及信号的设计提供了理论指导，以达到最优的测距和测向效果。

## 2 信号模型

任意平面离散阵列近场测距模型如图1所示。阵元数为 $M$ ，各阵元的位置矢量在极坐标下可表示为 $\mathbf{r}_i = [r_i \cos \varphi_i, r_i \sin \varphi_i]^T$ ，式中 $\varphi_i$ 和 $r_i$ 分别为第 $i$ 个阵元极角和到参考点(坐标原点)的距离， $i = 0, 1, \dots, M-1$ 。 $J$ 个信号源从不同方向入射，波达方向为 $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_J]^T$ ，其中第 $j$ 个信号源 $\mathbf{s}_j$ 入射方位的单位矢量可以表示为 $\mathbf{u}_j = [\sin \phi_j, \cos \phi_j]^T$ ， $j = 1, 2, \dots, J$ 。

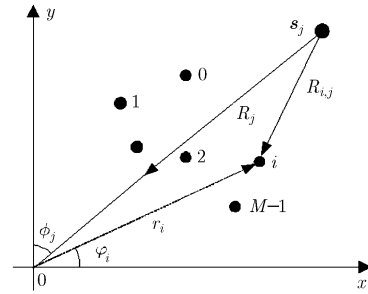


图1 任意平面离散阵列近场测距模型

考虑 $N$ 个快拍数据，阵列接收信号的复包络可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^J [\mathbf{a}(\phi_j) \otimes \mathbf{s}_j(t)] + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{a}(\phi_j)$ 为阵列对 $\phi_j$ 方向入射信号的方向矢量(响应矢量)，或称导引矢量(steering vector)，如式(2)所示； $\mathbf{s}_j(t)$ 为参考点接收到的第 $j$ 个信号源 $\mathbf{s}_j$ 的 $N$ 个快拍数据； $\mathbf{A}$ 为由 $J$ 个方向矢量构成的方向矢量矩阵，如式(3)所示； $\mathbf{n}(t)$ 为接收的零均值、空间不相关高斯噪声。

$$\mathbf{a}(\phi_j) = [\dots, e^{-i w \tau_{i,j}}, \dots]^T, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\phi_1), \mathbf{a}(\phi_2), \dots, \mathbf{a}(\phi_J)] \quad (3)$$

其中 $w = 2\pi c / \lambda_j$ 为相应信号的角速度，第 $j$ 个信号源 $\mathbf{s}_j$ 到第 $i$ 个阵元与到参考点的延时差 $\tau_{i,j} \triangleq d_{i,j} / c$ ， $d_{i,j}$ 表示第 $j$ 个信号源 $\mathbf{s}_j$ 到第 $i$ 个阵元与到参考点的距离差。

根据余弦定理，第 $j$ 个信号源 $\mathbf{s}_j$ 到第 $i$ 个阵元的距离为

$$R_{i,j} = \sqrt{R_j^2 + r_i^2 - 2R_j r_i \sin(\phi_j + \varphi_i)} \quad (4)$$

其中 $R_j$ 为第 $j$ 个信号源 $\mathbf{s}_j$ 到参考点的距离。

根据 $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots, |x| \ll 1$ ，当

$R_j \gg r_i$  时, 第  $j$  个信号源  $\mathbf{s}_j$  到第  $i$  个阵元与到参考点的距离差为

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \sqrt{R_j^2 + r_i^2 - 2R_j r_i \sin(\phi_j + \varphi_i)} - R_j \\ &= R_j \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{r_i^2}{R_j^2} - 2 \frac{r_i}{R_j} \sin(\phi_j + \varphi_i) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left( \frac{r_i^2}{R_j^2} - 2 \frac{r_i}{R_j} \sin(\phi_j + \varphi_i) \right)^2 + \dots \right] - R_j \\ &\approx -r_i \sin(\phi_j + \varphi_i) + \frac{r_i^2}{2R_j} \cos^2(\phi_j + \varphi_i) \end{aligned} \quad (5)$$

那么延时差可近似表示为

$$\tau_{i,j} \approx -\frac{r_i}{c} \sin(\phi_j + \varphi_i) + \frac{r_i^2}{2cR_j} \cos^2(\phi_j + \varphi_i) \quad (6)$$

如果只有一个入射角为  $\phi$  的信号源  $\mathbf{s}$ , 定义

$$\tau_{st} \triangleq \tau_s - \tau_t = -\frac{\Delta_{s,t}}{c} + \frac{\Lambda_{s,t}}{2cR} \quad (7)$$

其中  $R$  为信号源与参考点的距离, 且

$$\Delta_{s,t} \triangleq r_s \sin(\phi + \varphi_s) - r_t \sin(\phi + \varphi_t) \quad (8)$$

$$\Lambda_{s,t} \triangleq r_s^2 \cos^2(\phi + \varphi_s) - r_t^2 \cos^2(\phi + \varphi_t) \quad (9)$$

### 3 距离估计的克拉美-罗界

只有一个入射角为  $\phi$  的信号源  $\mathbf{s}$  时,  $N$  个快拍情形下的信号与噪声协方差矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s &= E[(\mathbf{a} \otimes \mathbf{s})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{s})^H] = E[\mathbf{a}\mathbf{a}^H \otimes \mathbf{s}\mathbf{s}^H] \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{a}\mathbf{a}^H \otimes \mathbf{I}_N \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{I}_N = \mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{I}_N \quad (11)$$

其中  $\sigma_n^2$  为噪声功率谱,  $\sigma_s^2$  为信号功率谱,  $\mathbf{R}_1 = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$ 。

数据协方差矩阵

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n = (\sigma_s^2 \mathbf{a}\mathbf{a}^H + \mathbf{R}_1) \otimes \mathbf{I}_N \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} &= \left( \mathbf{R}_1^{-1} - \frac{\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{a}\mathbf{a}^H \mathbf{R}_1^{-1}}{\sigma_s^{-2} + \mathbf{a}^H \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{a}} \right) \otimes \mathbf{I}_N \\ &= \left( \mathbf{R}_1^{-1} - \frac{\sigma_s^{-2} \cdot \mathbf{a}\mathbf{a}^H}{\text{SNR}^{-2} + M \cdot \text{SNR}^{-1}} \right) \otimes \mathbf{I}_N \end{aligned} \quad (13)$$

其中信噪比  $\text{SNR} \triangleq \sigma_s^2 / \sigma_n^2$ 。

有信号时的似然函数为

$$F_1(\mathbf{r}) = (\pi^M |\mathbf{R}|)^{-1} \exp(-\mathbf{r}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}) \quad (14)$$

根据克拉美-罗定理<sup>[1,15]</sup>, 对于无偏估计量  $R$ , 其克拉美-罗下界(CRB)由式(15)给出:

$$\text{CRB}_R = \mathbf{J}^{-1} = \left\{ -E \left[ \frac{\partial^2 \ln F_1(\mathbf{r})}{\partial R^2} \right] \right\}^{-1} \quad (15)$$

式[15]中大括号内矩阵即  $\mathbf{J}$  通常称为 Fisher 信息阵(或 FIM)<sup>[15]</sup>。将式(13), 式(14)代入式(15)得

$$\begin{aligned} \text{CRB}_R &= - \left\{ N \frac{\partial^2}{\partial R^2} E \left[ \frac{\sigma_s^{-2}}{\text{SNR}^{-2} + M \cdot \text{SNR}^{-1}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (\mathbf{r}^H \mathbf{a}\mathbf{a}^H \mathbf{r}) - \mathbf{r}^H \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{r} \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

其中, 第 2 项与  $R$  和  $\phi$  均无关, 因此, 式(16)可以写为

$$\begin{aligned} \text{CRB}_R &= - \left\{ \frac{N \sigma_s^{-2}}{\text{SNR}^{-2} + M \cdot \text{SNR}^{-1}} \right. \\ &\quad \left. \cdot \text{tr} \left[ \frac{\partial^2}{\partial R^2} (\mathbf{a}\mathbf{a}^H) E(\mathbf{r}\mathbf{r}^H) \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\text{tr}(\bullet)$  表示求矩阵的迹。

定义  $\mathbf{D} \triangleq \frac{\partial^2}{\partial R^2} \mathbf{a}\mathbf{a}^H$ ,  $\mathbf{S}_x \triangleq E(\mathbf{r}\mathbf{r}^H)$ ,  $\mathbf{F} \triangleq \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}_x$ , 则

$$\mathbf{D}_{s,t} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} e^{-iw\tau_{st}} = \left[ -iw \frac{A_{s,t}}{cR^3} - w^2 \left( \frac{A_{s,t}}{2cR^2} \right)^2 \right] e^{-iw\tau_{st}} \quad (18)$$

$$[\mathbf{S}_x]_{s,t} = e^{-iw\tau_{st}} \cdot \sigma_s^2 + \delta_{s,t} \cdot \sigma_n^2 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{F}) &= \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \sigma_s^2 \left[ -iw \frac{A_{s,t}}{cR^3} - w^2 \left( \frac{A_{s,t}}{2cR^2} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{\sigma_s^2 w^2}{4c^2 R^4} \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \Lambda_{s,t}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

到目前为止, 可得较为简洁的近场测距的窄带 CRB 表达式如式(21)所示:

$$\text{CRB}_{R,\text{窄}} = \frac{Mc^2 R^4}{N\pi^2} \cdot \left( \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \Lambda_{s,t}^2 \right)^{-1} \cdot P_{\text{窄}}^{-1} \quad (21)$$

其中

$$P_{\text{窄}} = \frac{Mf^2 \text{SNR}^2}{1 + M \cdot \text{SNR}} \quad (22)$$

对于宽带信号, 将其划分为若干个窄带区域  $[f_L, f_L + \Delta f, f_L + 2\Delta f, \dots, f_H]$ , 则似然函数

$$F_1(\mathbf{r}) = \prod_{i=\text{ind}(f_L)}^{\text{ind}(f_H)} (\pi^M |\mathbf{R}|)^{-1} \exp(-\mathbf{r}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}) \quad (23)$$

其中  $\text{ind}(f_i)$  表示  $f_i$  的下角标  $i$ 。

结合式(14)-式(22)的推导过程, 可得近场测距的宽带 CRB 表达式如式(24)所示:

$$\text{CRB}_{R,\text{宽}} = \frac{Mc^2 R^4}{N\pi^2} \cdot \left( \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \Lambda_{s,t}^2 \right)^{-1} \cdot P_{\text{宽}}^{-1} \quad (24)$$

其中

$$P_{\text{宽}} = \sum_{i=\text{ind}(f_L)}^{\text{ind}(f_H)} \frac{Mf_i^2 \text{SNR}_i^2}{1 + M \cdot \text{SNR}_i} \quad (25)$$

$\text{SNR}_i$  为中心频率为  $f_i$  的窄带上的频域信噪比。

#### 3.1 均匀直线阵(ULA)

如果阵列是均匀直线阵, 不失一般性, 设阵列

都在  $x$  轴上, 0 号阵元位于 0 点, 参考点设为  $(X, 0)$ , 即

$$\varphi_i = 0, r_i = (i - X)d \text{ 或 } \varphi_i = \pi, r_i = -(i - X)d \quad (26)$$

其中  $i = 0, 1, \dots, M-1$ 。则

$$\sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \mathcal{A}_{s,t}^2 = \frac{2d^4 \cos^4 \phi}{3} (M^2 - 1)M^2 \cdot \left[ \left( X - \frac{M-1}{2} \right)^2 + \frac{M^2 - 4}{60} \right] \quad (27)$$

对于中心频率为  $f$  的窄带信号和频带范围为  $[f_L, f_H]$  的宽带信号, CRB 表达式分别为

$$\text{CRB}_{R, \text{ULA}, \text{窄}} = \frac{3c^2 R^4}{2N\pi^2 d^4 \cos^4 \phi (M^2 - 1)M \left[ \left( X - \frac{M-1}{2} \right)^2 + \frac{M^2 - 4}{60} \right]} \cdot P_{\text{窄}} \quad (28)$$

$$\text{CRB}_{R, \text{ULA}, \text{宽}} = \frac{3c^2 R^4}{2N\pi^2 d^4 \cos^4 \phi (M^2 - 1)M \left[ \left( X - \frac{M-1}{2} \right)^2 + \frac{M^2 - 4}{60} \right]} \cdot P_{\text{宽}} \quad (29)$$

### 3.2 均匀圆周阵(UCA)

如果阵列是均匀圆周阵, 为方便起见, 设阵列都在以原点为圆心,  $r$  为半径的圆周上, 且 0 号阵元位于  $x$  轴上, 选取原点为参考点, 则

$$\varphi_i = i \frac{2\pi}{M}, \quad r_i = r \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \mathcal{A}_{s,t}^2 \\ &= \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \left\{ \left[ \cos^2 \left( \phi + s \frac{2\pi}{M} \right) - \cos^2 \left( \phi + t \frac{2\pi}{M} \right) \right] r^2 \right\}^2 \\ &= \frac{M^2 r^4}{4} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{CRB}_{R, \text{UCA}, \text{窄}} = \frac{4c^2 R^4}{NM\pi^2 r^4 P_{\text{窄}}} \quad (32)$$

$$\text{CRB}_{R, \text{UCA}, \text{宽}} = \frac{4c^2 R^4}{NM\pi^2 r^4 P_{\text{宽}}} \quad (33)$$

## 4 DOA估计的克拉美-罗界

第 3 节对任意平面离散阵列近场测距模型进行了克拉美-罗界的理论推导, 实际上其推导过程也适用于任意平面离散阵列远场波达方向(DOA)估计模型, 不同之处在于距离差和延时差有所改变。

任意平面离散阵列远场 DOA 估计模型中,  $\mathbf{s}_j$  到第  $i$  个阵元与到参考点的延时差为

$$\tau_{i,j} = -\frac{r_i}{c} \sin(\phi_j + \varphi_i) \quad (34)$$

在只有一个入射角为  $\phi$  的信号源的情形下,

$$\tau_{st} \triangleq \tau_s - \tau_t = -\frac{\Delta_{s,t}}{c} \quad (35)$$

$$\mathbf{D}_{s,t} = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} e^{-i\omega\tau_{st}} = \left[ -\frac{w^2 \Gamma_{s,t}^2}{c^2} - i \frac{w}{c} \Delta_{s,t} \right] e^{-i\omega\tau_{st}} \quad (36)$$

其中

$$\Gamma_{s,t} \triangleq r_s \cos(\phi + \varphi_s) - r_t \cos(\phi + \varphi_t) \quad (37)$$

则

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{F}) &= \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \sigma_s^2 \left[ -\frac{w^2 \Gamma_{s,t}^2}{c^2} - i \frac{w}{c} \Delta_{s,t} \right] \\ &= -\frac{\sigma_s^2 w^2}{c^2} \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \Gamma_{s,t}^2 \end{aligned} \quad (38)$$

将式(38)代入式(17)可得远场测向的窄带 CRB 表达式如式(39)所示:

$$\text{CRB}_{\phi, \text{窄}} = \frac{Mc^2}{4N\pi^2} \cdot \left( \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \Gamma_{s,t}^2 \right)^{-1} \cdot P_{\text{窄}}^{-1} \quad (39)$$

依据第 3 节中由窄带 CRB 推导出宽带 CRB 的思路, 不难得到远场测向的宽带 CRB:

$$\text{CRB}_{\phi, \text{宽}} = \frac{Mc^2}{4N\pi^2} \cdot \left( \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{M-1} \Gamma_{s,t}^2 \right)^{-1} \cdot P_{\text{宽}}^{-1} \quad (40)$$

如果阵列是 ULA, 则窄带和宽带信号 DOA 估计的 CRB 结果分别如式(41)和式(42)所示:

$$\text{CRB}_{\phi, \text{ULA}, \text{窄}} = \frac{3c^2}{2NM(M^2 - 1)\pi^2 d^2 \cos^2 \phi} \cdot P_{\text{窄}}^{-1} \quad (41)$$

$$\text{CRB}_{\phi, \text{ULA}, \text{宽}} = \frac{3c^2}{2NM(M^2 - 1)\pi^2 d^2 \cos^2 \phi} \cdot P_{\text{宽}}^{-1} \quad (42)$$

如果阵列是 UCA, 则窄带和宽带信号 DOA 估计的 CRB 结果分别如式(43)和式(44)所示:

$$\text{CRB}_{\phi, \text{UCA}, \text{窄}} = \frac{c^2}{4NM\pi^2 r^2 P_{\text{窄}}} \quad (43)$$

$$\text{CRB}_{\phi, \text{UCA}, \text{宽}} = \frac{c^2}{4NM\pi^2 r^2 P_{\text{宽}}} \quad (44)$$

## 5 CRB分析

从推导的以上各式可以看出, 不管是近场测距还是远场测向, CRB的影响因素均可分为两部分: 阵列相关因素, 包括阵列结构和阵列孔径等; 目标信号相关部分, 包括目标的相对方位、信号频率的二阶矩和信噪比等。

由式(21)和式(24)可以看出, 对于任意平面离散阵列, 近场测距的CRB与目标距离的四次方成正比。

由第4节的结果可以看出, 远场测向的CRB与基阵参考点的选择无关。其实这不难理解, 因为在远场条件下, 目标距离不予考虑, 目标方位角也没有变化, 且对不同的基阵参考点, 目标信号到达各阵

元与到达其的时延差的相对差量是固定的。简言之,在序号  $s$  和  $t$  确定后,式(35)中的  $\tau_{st}$  是不随基阵参考点的改变而改变的,所以远场测向CRB也不随基阵参考点的改变而改变。

但是,对于近场测距来说,基阵参考点的改变影响了目标的相对距离、相对方位以及各阵元相对于参考点的距离和方位,而目标对于各阵元的入射方向并不是平行的,这使得式(7)中的  $\tau_{st}$  随基阵参考点的改变而改变,具体如式(26)~式(29)所示。

相关CRB解析式的信号频率二阶矩和信噪比部分可做如下近似:

窄带源情形下,当  $M \cdot \text{SNR} \gg 1$  时,

$$P_{\text{窄}} \approx f^2 \text{SNR} \quad (45)$$

宽带源情形下,当  $M \cdot \text{SNR}_i \gg 1$  时,

$$P_{\text{宽}} \approx \sum_{i=\text{ind}(f_L)}^{\text{ind}(f_H)} (f_i^2 \text{SNR}_i) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=\text{ind}(f_L)}^{\text{ind}(f_H)} (f_i^2 G_s(f_i)) \quad (46)$$

其中  $G_s(f_i)$  是入射信号  $s$  的功率谱。

以上分析说明,对于宽带信号源,近场测距和远场测向的CRB与信号带宽和谱密度函数构成的联合量  $P_{\text{宽}}$  成反比关系。且信号在高频部分分布的能量越多,近场测距和远场测向的CRB越小,如果信号谱密度不变,则带宽越大,CRB越小。

经过式(45)和式(46)的近似后,可以看出:ULA近场测距CRB大致与阵列孔径的五次方成反比,而ULA远场测向CRB大致与阵列孔径的三次方成反比,且两者均与目标相对方位有关;UCA近场测距和远场测向CRB均与阵列孔径成反比,但两者均与目标相对方位无关。

## 6 计算机仿真

上文从理论方面推导和分析了基于任意平面离散阵列进行近场测距和远场测向CRB的特性,给出了ULA和UCA这两种典型阵形相应结果的具体表达式。下面首先就这两种典型阵形进行近场测距仿真。ULA阵元数为200,阵元间距为1m;UCA阵元数也为200,半径为32m,阵元间距约为1m。

信号取带宽为130~140Hz的带限白噪声,背景噪声取高斯白噪声,时域信噪比为0dB,ULA以0号阵元为基阵参考点,UCA以圆心为基阵参考点。进行100次Monte-Carlo仿真实验(下同)。得到随目标距离变化的近场测距CRB如图2所示,其中方位角恒定为 $0^\circ$ ;得到随目标方位角变化的近场测距CRB如图3所示,其中距离恒定为10km。可以看出:近场测距CRB随目标距离的增大而增大;对于ULA,其还与目标方位角有关,对于UCA,则无关。

针对ULA近场测距,改变基阵参考点进行仿真

比较。将基阵参考点取为阵中心,得到ULA近场测距的CRB,与图2中相应结果进行对比,如图4所示。可以看出:对于ULA近场测距,选择0号节点为参考点的CRB要小于选择阵中心为参考点的CRB。这说明近场测距CRB与基阵参考点的选取有关。其中需要说明的是:图4中,在目标距离较近时,仿真结果曲线偏离了理论曲线,这是因为目标距离太近以至于不满足式(5)所成立的条件。

图5是ULA远场测向CRB随方位角变化的结果。考虑到是远场条件,故选取较小的阵元数,这里取为16,阵元间距为1m,信号和背景噪声不变。可以看出:ULA远场测向性能随目标方位角的变大而下降( $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内);ULA远场测向性能与基阵参考点的选取无关。

针对ULA,选取不同的信号进行仿真比较。前述信号为信号1;信号2的带宽设为430~440Hz,其它条件与信号1相同,且仍以0号阵元为基阵参考点。得到ULA近场测距的CRB,与图2中相应结果进行对比,如图6所示;得到ULA远场测向的CRB,与图5中相应结果进行对比,如图7所示。可以看出:对于近场测距和远场测向的CRB来说,信号2的结果都要优于信号1。这说明:信号在高频部分分布的能量越多,近场测距和远场测向的CRB越小;两者均与信号带宽和谱密度函数构成的联合量  $P_{\text{宽}}$  成反比关系。

## 7 结论

本文以频域阵列模型为基础,分别推导了近场测距和远场测向的克拉美-罗性能下界,既有窄带模型,也有宽带情形,得到的CRB解析式适用于任意平面离散阵列。其中,近场测距结果是首次以精确而简洁的形式给出。并详细分析了各CRB结果的物理意义,清楚地揭示了近场测距和远场测向的克拉美-罗性能下界与基阵参考点的选择、阵列的几何形状、阵列的孔径、目标信号的特性以及目标方位或距离等之间的关系。得到的主要结论如下:(1)近场测距和远场测向的性能影响因素均可分为两部分:阵列相关因素,如阵列结构和阵列孔径等;目标信号相关因素,如目标的相对方位、信号频率、带宽和信噪比等;(2)两者均与信号带宽和谱密度函数构成的联合量  $P_{\text{宽}}$  成反比关系;(3)近场测距的CRB与目标距离的四次方成正比;(4)近场测距的CRB与基阵参考点的选择有关,具体如式(28)和式(29)所示,而远场测向的CRB则与其无关;(5)对于均匀直线阵,近场测距的CRB大致与阵列孔径的五次方成反比,而远场测向的CRB则大致与阵列孔径的三

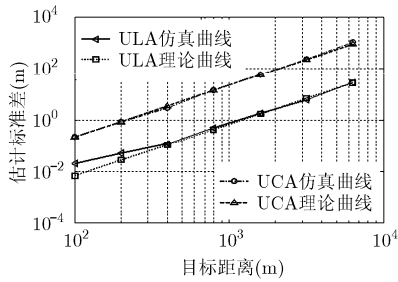


图 2 距离变化时的近场测距 CRB

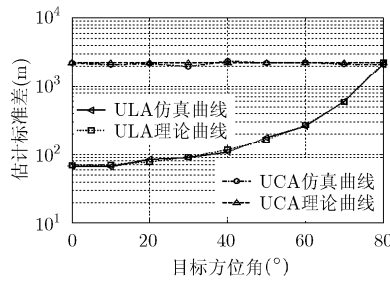


图 3 方位角变化时的近场测距 CRB

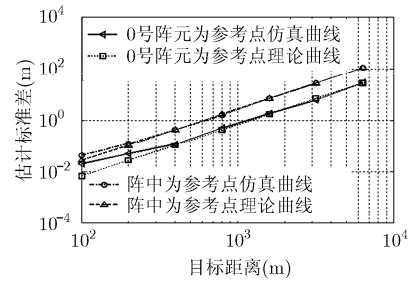


图 4 不同基阵参考点得到的 ULA 近场测距 CRB

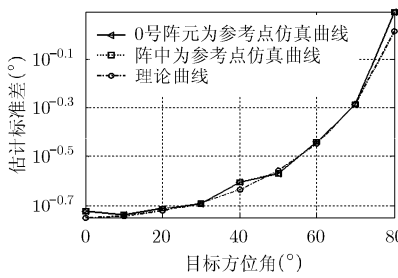


图 5 方位角变化时的 ULA 远场测向 CRB

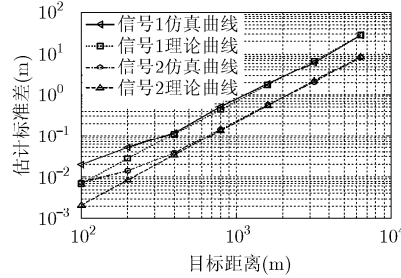


图 6 不同信号的 ULA 近场测距 CRB

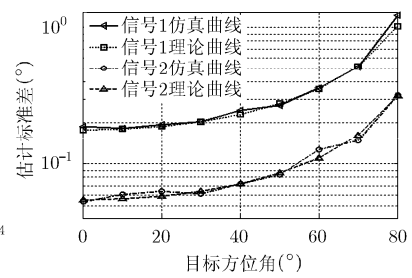


图 7 不同信号的 ULA 远场测向的 CRB

次方成反比，两者均与目标的相对方位有关；对于均匀圆周阵，两者均与阵列孔径成反比，且与目标的相对方位无关。

Monte-Carlo 仿真试验验证了理论分析和上述结论的正确性。本文 CRB 给出了近场测距和远场测向的最佳估计性能，而且为阵列及信号的设计提供了理论指导，以便在实际工程应用中达到最优的测距或测向效果。

### 参 考 文 献

[1] 李启虎. 数字式声纳设计原理[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 2002: 109-111, 350-359.  
Li Qi-hu. Digital Sonar Design Theory[M]. Hefei: Anhui Education Press, 2002: 109-111, 350-359.

[2] 李磊, 任丽香, 包云霞, 等. 宽带频率步进信号参数估计的克拉美罗界研究[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(4): 982-986.  
Li Lei, Ren Li-xiang, Bao Yun-xia, et al. On the Cramer-Rao bound of parameter estimation for wideband stepped frequency signal[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(4): 982-986.

[3] 黄雄飞, 苑秉成. 宽带多普勒声纳信号波形设计[J]. 兵工学报, 2010, 31(9): 1193-1199.  
Huang Xiong-fei and Yuan Bing-cheng. Waveform design of broadband Doppler sonar[J]. *Acta Armamentarii*, 2010, 31(9): 1193-1199.

[4] Navarro M and Najar M. Frequency domain joint TOD and DOA estimation in IR-UWB[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2011, 10(10): 3174-3183.

[5] 束锋, 朱伟强, 陆锦辉, 等. 基于最大比合并的最大似然

TDOA/FDOA 联合定位方法[J]. 宇航学报, 2010, 31(4): 1143-1148.

Shu Feng, Zhu Wei-qiang, Lu Jin-hui, et al. Maximum ratio combining based maximum likelihood TDOA/FDOA joint localization[J]. *Journal of Astronautics*, 2010, 31(4): 1143-1148.

[6] Stoica P and Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(5): 720-741.

[7] Zatman M. Properties and applications of wideband Cramer-Rao bounds[C]. Ninth IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing, Portland, 1998: 41-44.

[8] 冯国安, 黄建国. 水下宽带目标方位估计的克拉美-罗界[J]. 兵工学报, 2007, 28(3): 291-295.

Feng Guo-an and Huang Jian-guo. Cramer-Rao bound of DOA estimation for underwater wide band sources[J]. *Acta Armamentarii*, 2007, 28(3): 291-295.

[9] 刘云, 李志舜. 宽带波达方向估计的克拉美-罗界研究[J]. 声学学报, 2006, 31(2): 126-131.

Liu Yun and Li Zhi-shun. On the Craomer-Rao bound of wideband direction of arrival estimation[J]. *Acta Acoustics*, 2006, 31(2): 126-131.

[10] 刘建国, 苑秉成, 严胜刚, 等. 水下宽带源方位估计的克拉美-罗界研究[J]. 声学学报, 2010, 35(5): 539-546.

Liu Jian-guo, Yuan Bing-cheng, Yan Sheng-gang, et al. The CRB of sirecion estimation for underwater wideband sources[J]. *Acta Acoustics*, 2010, 35(5): 539-546.

[11] 孙贵青. 声矢量传感器及其在均匀线列阵声纳中的应用[D].

- [博士论文], 北京: 中国科学院声学研究所, 2003.
- Sun Gui-qing. Acoustic vector sensor and its application on uniform linear array sonar[D]. [Ph.D. dissertation], Beijing: Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, 2003.
- [12] Chen J C, Hudson R E, *et al.* Maximum-likelihood source localization and unknown sensor location estimation for wideband signals in the near-field[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(8): 1843-1854.
- [13] Zeng Xiong-fei, Li Zheng, Sun Gui-qing, *et al.* Focused passive synthetic aperture[C]. Youth Conference on Information, Computing and Telecommunications, Beijing, 2010: 158-161.
- [14] 惠娟, 胡单, 惠俊英, 等. 聚焦波束形成声图测量原理研究[J]. *声学学报*, 2007, 32(4): 356-361.
- Hui Juan, Hu Dan, Hui Jun-ying, *et al.* Researches on the measurement of distribution image of radiated noise using focused beamforming[J]. *Acta Acoustics*, 2007, 32(4): 356-361.
- [15] Van Trees H L. Optimum Array Processing Part IV of Detection Estimation and Modulation Theory[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002, Chapter 8.
- 曾雄飞: 男, 1986 年生, 博士生, 研究方向为矢量信号处理、阵列信号处理.
- 孙贵青: 男, 1971 年生, 博士, 副研究员, 研究方向为矢量水听器阵列处理、水声信号处理.
- 黄海宁: 男, 1969 年生, 博士, 研究员, 博士生导师, 研究方向为水声信号处理、水声通信、非线性信号处理.