

不同延迟下离散多智能体系统的一致性

朱旭 闫建国 屈耀红*
(西北工业大学自动化学院 西安 710129)

摘要: 移动多智能体系统的一致性问题是非常有现实意义的问题。针对有向通信拓扑网络下具有不同延迟的一阶和二阶离散系统, 该文提出一种一致性的协议, 并进一步得到该系统离散域的传递函数。接着利用广义 Nyquist 判据和盖尔圆方法, 对系统进行频域分析, 推导出了传递函数一致性收敛的充分条件, 给出了通信延迟的具体约束范围。最后给出数值算例, 仿真结果验证了结论的正确性。

关键词: 多智能体系统; 一致性协议; 离散系统; 通信延迟; 广义 Nyquist 判据

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)06-1516-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.01114

Consensus for the Discrete-time Multi-agent System with Diverse Delays

Zhu Xu Yan Jian-guo Qu Yao-hong

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: Consensus problems for mobile multi-agent systems are very practically significant in complicated kinetics systems. A consensus protocol for the first-order and the second-order discrete-time system with diverse delays in directed communication network topology is proposed. Based on the protocol, the discrete transfer function is obtained. Then generalized Nyquist criterion and Gershgorin disc method is applied to analysis the system in frequency domain. A sufficient condition is deduced for consistency convergence of the transfer function, and concrete constraint range of communication delays is given out. The simulation results show the correctness of the proposed ideas.

Key words: Multi-agent system; Consensus protocol; Discrete-time system; Communication delays; Generalized Nyquist criterion

1 引言

随着多智能体系统协同技术的快速发展, 协同信息流一致性问题引起了国内外研究人员的强烈关注^[1-3]。信息流一致性可使多智能体的目标达到一致, 适用于分布式协同系统, 例如无线传感网络通信、无人机编队控制和水下自治机器人作业等。多智能体系统通信过程中存在延迟, 对一致性有较大影响。通信延迟不仅会降低一致性的收敛速度, 而且增大到一定程度后, 信息流会发散。

对于单一通信延迟问题的研究成果已有很多^[4,5], 也有不少方法可推得其一致性收敛条件, 比如频域分析法^[6]、李亚普诺夫法^[7]和分层图法^[8]等, 而不同通信延迟下的研究还不够深入。同时, 由于分析离散系统比较复杂, 大部分研究都是针对连续

系统进行的。而事实上, 多智能体通信系统都是离散系统, 因此, 如何对不同延迟下的离散系统作一致性分析是一个主要困难。用广义 Nyquist 判据分析一致性可以得到其充分条件^[9], 该方法简单可行, 能够对不同延迟作解析分析, 现在应用于连续系统的延迟研究。但是由于在离散域中同样可以作频域分析, 广义 Nyquist 判据不失为解决离散系统延迟问题一条有效思路。

本文针对离散多智能体系统, 研究不同延迟下的一致性算法。提出了带不同延迟的一阶和二阶离散系统模型, 作频域分析后, 利用广义 Nyquist 判据和盖尔圆理论得到系统一致性的充分条件, 并进一步给出了延迟的具体有效范围。最后通过仿真算例证明了结论的可行性。

2 问题描述

2.1 代数图论

设系统中有 n 个智能体, 以每个智能体为节点构成有向图。令 $G = V, E, \mathbf{A}$ 表示 n 个节点的有向加权图, 其中 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示节点的集合, 边的集

2011-10-28 收到, 2012-03-09 改回

国家自然科学基金(60974146), 陕西省自然科学基金研究计划(2011GQ8005)和西北工业大学基础研究基金(NPU-FFR-JC20100216)资助课题

*通信作者: 屈耀红 qyh0809@nwpu.edu.cn

合 $E \subseteq V \times V$ ，每条边用 $e_{ij} = (i, j)$ 表示，节点的下标集合为 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ 。加权邻接矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ 。有向加权图 G 中，节点 i 的入度和出度分别表示为： $\text{deg}_{\text{in}}(i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}$ ， $\text{deg}_{\text{out}}(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 。令 \mathbf{D} 为图 G 的出度矩阵， \mathbf{D} 是对角矩阵，每个对角元素为相应节点的出度。 N_i 为向节点 i 通信的所有节点的集合。有向图 G 的 Laplace 矩阵定义为 $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$ 。其中， l_{ij} 表示为

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \in N_i \\ \sum_{j \in N_i} a_{ij}, & j = i \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

2.2 一致性模型

具有自延迟的一阶离散系统模型为

$$x_i[k+1] = x_i[k] - T \sum_{j \in N_i} a_{ij}[k](x_i[k - \tau_{ij}] - x_j[k - \tau_{ij}]), \quad i \in I \quad (1)$$

其中，系统状态用 $x_i[k]$ 表示， k 是离散时间序列， T 是采样周期。 τ_{ij} 为信息从节点 i 传到节点 j 所耗掉的采样周期数， τ_{ij} 为非负整数。 τ_{ij} 在 $x_i[k - \tau_{ij}]$ 中被称为自延迟。若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i[k - \tau_{ij}] - x_j[k - \tau_{ij}]\| \rightarrow 0$ ，则系统式(1)一致收敛。

带自延迟的二阶离散系统模型为

$$\begin{aligned} x_i[k+1] &= x_i[k] + T v_i[k], \\ v_i[k+1] &= v_i[k] - T \sum_{j \in N_i} a_{ij}[k]((x_i[k - \tau_{ij}] - x_j[k - \tau_{ij}]) + \gamma(v_i[k - \tau_{ij}] - v_j[k - \tau_{ij}])), \quad i \in I \end{aligned} \quad (2)$$

一、二阶状态分别用 $x_i[k]$ 和 $v_i[k]$ 表示。 γ 为权重系数，它的值不能太小，通常取 $\gamma > 1$ 。若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i[k - \tau_{ij}] - x_j[k - \tau_{ij}]\| \rightarrow 0$ ，且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i[k - \tau_{ij}] - v_j[k - \tau_{ij}]\| \rightarrow 0$ ，则系统式(2)一致收敛。

3 一致性分析

下面对一致性算法式(1)，式(2)作收敛分析。定理 1 和定理 2 分别给出了一阶和二阶离散系统一致性的充分条件。在对其进行推导之前，先给出所要用的引理。

如果系统的广义 Nyquist 特性曲线不环绕点 $(-1, j0)$ ，特征根将全部位于复平面左半平面，那么该系统就是稳定的。假定离散系统的开环传递函数为 $G(z)$ ，在频率域中令 $z = e^{j\omega}$ ， $\omega \in [-\pi, \pi]$ ，则有 $G(z) = G(e^{j\omega})$ 。 $\lambda(G(e^{j\omega}))$ 为系统的广义 Nyquist 特性曲线，令 $G(e^{j\omega}) = c + jd$ ， $c, d \in R$ 。

引理 如果系统的 $\lambda(G(e^{j\omega}))$ 在圆形区域 $\lambda(G(e^{j\omega})) \in \{\eta : \eta \in C, |\theta - (c + jd)| \leq |c + jd|\}$ 内，那么它不环绕点 $(-1, j0)$ 的充分必要条件为：当 ω 在 $[-\pi, \pi]$ 上变化时，总有 $c > -1/2$ 。

证明 假设复平面内有一点 $(-b, j0)$ ， $b \in R$ 且 $b \geq 1$ ，如果开环系统的广义 Nyquist 特性曲线不环绕点 $(-1, j0)$ ，那么也不环绕点 $(-b, j0)$ 。换句话说，点 $(-b, j0)$ 在圆 $\{\eta : \eta \in C, |\theta - (c + jd)| \leq |c + jd|\}$ 的外部，即 $|-b + j0 - (c + jd)| > |c + jd|$ ，可以得到： $b(b + 2c) > 0$ 。又因为 $b \geq 1$ ，所以 $1 + 2c > 0$ ， $c > -1/2$ 。证毕

3.1 一阶系统一致性分析

基于广义 Nyquist 稳定性判据和盖尔圆理论，推导出如下定理 1。

定理 1 一阶带自延迟离散系统式(1)实现一致性收敛的充分条件为

$$\tau_{ij} < \frac{2 - 2T \sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\pi^2 T \sum_{j \in N_i} a_{ij}} \quad (3)$$

证明 考虑到系统式(1)可以用频域分析法简单有效地分析，对其进行双边 Z 代换，令 $X_i(z)$ 为 $x_i[k]$ 的 Z 变换，得到

$$\left. \begin{aligned} zX_i(z) - zx_i(0) &= X_i(z) - T \sum_{j \in N_i} a_{ij}(X_i(z)z^{-\tau_{ij}} - X_j(z)z^{-\tau_{ij}}) \\ \frac{z-1}{T} X_i(z) &= - \sum_{j \in N_i} a_{ij}(X_i(z)z^{-\tau_{ij}} - X_j(z)z^{-\tau_{ij}}) + \frac{x_i(0)}{T} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

定义 $n \times n$ 的矩阵 $\bar{\mathbf{L}}(z) = [\bar{l}_{ij}(z)]$ ，所以 $\bar{l}_{ij}(z)$ 可以从式(4)中得到

$$\bar{l}_{ij}(z) = \begin{cases} -a_{ij}z^{-\tau_{ij}}, & j \in N_i \\ \sum_{j \in N_i} a_{ij}z^{-\tau_{ij}}, & j = i \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (5)$$

可见，当 $\tau_{ij} = 0$ 时， $\bar{\mathbf{L}}(z)$ 为系统的拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}(z)$ 。将式(4)用矩阵形式表示为

$$\left(\frac{z-1}{T} \mathbf{I} + \bar{\mathbf{L}}(z) \right) \mathbf{X}(z) = \frac{\mathbf{x}(0)}{T} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{X}(z) = [X_1(z), X_2(z), \dots, X_n(z)]^T$ ， $\mathbf{x}(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T$ 。特征方程的根决定了系统式(1)的稳定性，关于 $\mathbf{x}[k] = [x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]]^T$ 的特征方程可以表示为

$$\det \left(\mathbf{I} + \frac{T}{z-1} \bar{\mathbf{L}}(z) \right) = 0 \quad (7)$$

式(7)为系统的闭环特征方程。对特征方程作频域分析, 由式(7)得到开环传递函数。

$$G(z) = \frac{T}{z-1} \bar{L}(z) \quad (8)$$

依据广义 Nyquist 稳定性判据, 如果对于所有的 $\omega \in [-\pi, \pi]$, Nyquist 特性曲线 $\lambda(G(e^{j\omega}))$ 均不环绕点 $(-1, j0)$, 就可得到系统式(1)是稳定的。基于盖尔圆定理, 得 $\lambda(G(e^{j\omega}))$ 的所在区域为

$$\lambda(G(e^{j\omega})) \in \bigcup_{i \in I} \left\{ \theta : \theta \in C, \left| \theta - \frac{e^{-\tau_{ij}\omega} T \sum_{j \in N_i} a_{ij}}{e^{j\omega} - 1} \right| \leq \sum_{j \in N_i} \left| \frac{a_{ij} e^{-\tau_{ij}\omega} T}{e^{j\omega} - 1} \right| \right\}$$

其中

$$\frac{e^{-\tau_{ij}\omega} T \sum_{j \in N_i} a_{ij}}{e^{j\omega} - 1} = \frac{(\cos \omega \tau_{ij} - j \sin \omega \tau_{ij}) T \sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\cos \omega + j \sin \omega - 1}$$

它的实部为 $-\frac{1}{2} T \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left(\cos \omega \tau_{ij} + \frac{\sin \omega \tau_{ij} \sin \omega}{1 - \cos \omega} \right)$ 。由

引理知: 当 $-\frac{1}{2} T \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left(\cos \omega \tau_{ij} + \frac{\sin \omega \tau_{ij} \sin \omega}{1 - \cos \omega} \right)$

$> -(1/2)$ 时, 系统式(1)的广义 Nyquist 特性曲线不环绕点 $(-1, j0)$, 即达到一致性收敛。

$$\left. \begin{aligned} \therefore T \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left(\cos \omega \tau_{ij} + \frac{\sin \omega \tau_{ij} \sin \omega}{1 - \cos \omega} \right) < 1 \\ T \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left(\cos \omega \tau_{ij} + \frac{\tau_{ij}}{2} \left(\frac{\sin \omega \tau_{ij}}{\omega \tau_{ij}} \right) \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right) \right) \\ \cdot \left(\frac{\omega}{\sin(\omega/2)} \right)^2 < 1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由于 $\cos \omega \tau_{ij} < 1, \frac{\sin \omega \tau_{ij}}{\omega \tau_{ij}} < 1, \frac{\sin \omega}{\omega} < 1, \frac{\omega}{\sin(\omega/2)}$

$< \pi$ 。所以有

$$\left. \begin{aligned} T \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left(1 + \frac{\pi^2}{2} \tau_{ij} \right) < 1 \\ \tau_{ij} < \frac{2 - 2T \sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\pi^2 T \sum_{j \in N_i} a_{ij}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

如果系统式(1)满足条件式(10)时, 那么所有的特征根都位于复平面的左半平面, 并且所有智能体的状态将达到一致。证毕

3.2 二阶系统一致性分析

为了得到二阶系统一致性收敛的充分条件, 运用与一阶系统相似的方法推导出定理 2。

定理 2 二阶带自延迟离散系统式(2)实现一致性收敛的充分条件为

$$\tau_{ij} < \frac{2 - 2T\gamma \sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\pi^2 T\gamma \sum_{j \in N_i} a_{ij}} \quad (11)$$

证明 对系统式(2)进行双边 Z 代换, 得到

$$\left. \begin{aligned} zX_i(z) - zx_i(0) &= X_i(z) + TV_i(z) \\ zV_i(z) - zv_i(0) &= V_i(z) - T \sum_{j \in N_i} a_{ij} ((X_i(z)z^{-\tau_{ij}} \\ &\quad - X_j(z)z^{-\tau_{ij}}) + \gamma(V_i(z)z^{-\tau_{ij}} - V_j(z)z^{-\tau_{ij}})) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$X_i(z)$ 为 $x_i[k]$ 的 Z 变换, $V_i(z)$ 为 $v_i[k]$ 的 Z 变换。取和一阶系统一样的矩阵 $\bar{L}(z)$, 得到

$$\left(\frac{(z-1)^2}{T} \right) \mathbf{I} + (T + \gamma(z-1)) \bar{L}(z) \mathbf{X}(z) = \left(\frac{z(z-1)}{T} + \gamma z \bar{L}(0) \right) \mathbf{x}(0) + z \mathbf{v}(0) \quad (13)$$

其中 $\mathbf{x}(0)=[x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T, \mathbf{v}(0)=[v_1(0), v_2(0), \dots, v_n(0)]^T$ 。其开环传递函数为

$$G(z) = \frac{T(\gamma z + T - \gamma)}{(z-1)^2} \bar{L}(z) \quad (14)$$

控制要求较高的系统, 采样周期 T 一般在毫秒级, 而 $\gamma > 1$, 为简化计算, 本文假设 $T \ll \gamma$ 。由此可得

$$G(z) = \frac{T\gamma}{(z-1)^2} \bar{L}(z) \quad (15)$$

将式(15)与式(8)比较, 发现二者形式相似, 接下来可以用证明定理 1 的方法得到

$$\tau_{ij} < \frac{2 - 2T\gamma \sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\pi^2 T\gamma \sum_{j \in N_i} a_{ij}} \quad (16)$$

证毕

4 仿真算例

给出有向拓扑下存在不同延迟的离散系统算例, 通过这两种结构不同的拓扑来验证定理 1 和定理 2 结论的有效性。考虑两个由 5 节点组成的环形拓扑, 如图 1 和图 2 所示。

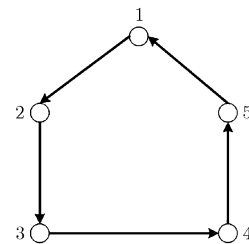


图 1 单向环形拓扑

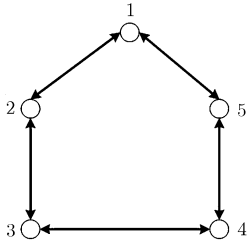


图 2 双向环形拓扑

图 1 和图 2 都是有向图，图 1 是单向环形拓扑，图 2 是双向环形拓扑。两个系统的采样周期均取 $T = 0.05 \text{ s}$ ，系统的初始状态 $x_i(0) = 120i$ 。图 1 和图 2 系统的加权邻接矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

两系统邻接矩阵 $\sum_{j \in N_i} a_{ij}$ 的最大值均为 1。因此对于一阶带自延迟离散系统，根据定理 1，求得 $\tau_{ij} < 3.85$ ，因为 τ_{ij} 为非负整数，所以可取 $\tau_{ij} \leq 3$ 。图 1 和图 2 中系统的延迟矩阵分别取：

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} & & & & 2 \\ & & & & 3 \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} & & & & 3 \\ & & & & 2 \\ & 3 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & & 2 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

图 3，图 4 分别是单向和双向环形系统的一致性仿真结果，两系统均在 100 多个采样周期后实现了一致性收敛，达到了平衡状态。

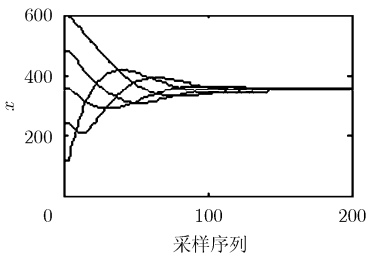


图 3 单向拓扑一阶一致性

在二阶离散系统的仿真中，权重系数取 $\gamma = 1.5$ ，采样周期仍为 $T = 0.05 \text{ s}$ ，邻接矩阵也保持不变。系统的初始状态分别为： $x_i(0) = 120i$ ， $v_i(0) = 0.7i$ 。根据定理 2，求得 $\tau_{ij} < 2.45$ ，可取 $\tau_{ij} \leq 2$ 。图 1 和图 2 中系统的延迟矩阵分别取：

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} & & & & 2 \\ & & & & 2 \\ & & & & 1 \\ & & & & 2 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \begin{bmatrix} & & & & 2 \\ & & & & 2 \\ & & & & 1 \\ & & & & 2 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

图 5(a), 5(b) 是单向环形系统的一、二阶状态仿真结果；图 6(a), 6(b) 是双向环形系统的一、二阶状态仿真结果。单向系统在接近第 800 个采样时刻时实现了一致；双向系统只用了不到 200 个采样时刻。两个系统的最终平衡状态都是：系统二阶状态 v 趋向于非零常值；系统一阶状态 x 趋向一致并逐渐增加，斜率为 v 。

二阶系统与一阶系统相比较，除了均能达到一致收敛外，还有一定差别。虽然二阶系统延迟的取值小，但是达到一致所耗时间更长，这与系统状态的阶次增加有关。另外，在二阶系统中，双向拓扑的收敛速度明显快于单向拓扑，只用了单向 1/4 的时间，体现了拓扑连通度高，收敛快的特点，这一点在一阶系统中并无明显反映。

5 结束语

本文研究了不同延迟下一、二阶离散系统的一致性问題，分别提出了带自延迟的一致性协议。基于广义 Nyquist 稳定性判据和盖尔圆理论，得到了一致性的充分条件。研究结果虽然没有得到一致性的充分必要条件，但是仿真算例显示，只要通信延

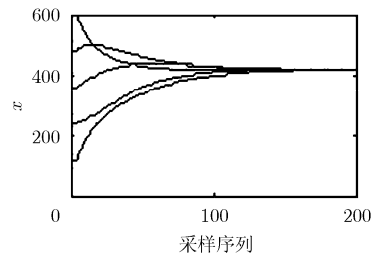


图 4 双向拓扑一阶一致性

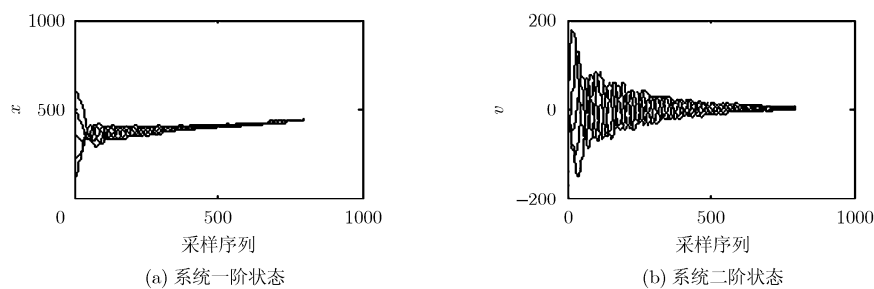


图5 单向拓扑二阶一致性

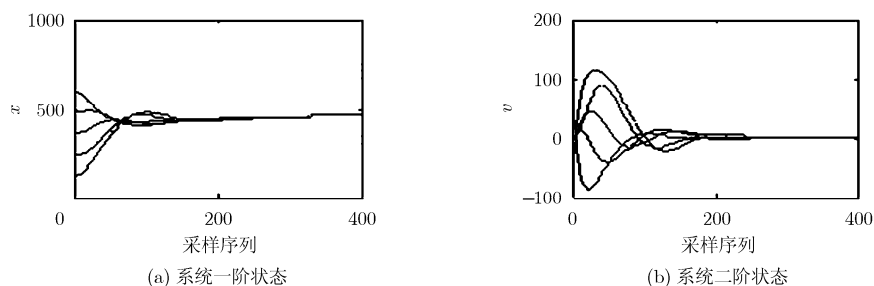


图6 双向拓扑二阶一致性

迟在本文结论范围内,就可取得较为理想的一致性收敛结果,所以仍有其工程指导意义。时变拓扑下的不同延迟问题可成为下一步的研究方向。

参考文献

- [1] Hong Y G and Hu J P. Coordination for a Group of autonomous mobile agents with multiple leaders[C]. Proceedings of the 25th Chinese Control Conference, Beijing, 2006: 18-322.
- [2] Olfati-Saber R, Fax A, and Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215-233.
- [3] Su H S, Wang X F, and Yang W. Flocking in multi-agent systems with multiple virtual leaders[J]. *Asian Journal of Control*, 2008, 10(2): 238-245.
- [4] Liu Hui-yang, Xie Guang-ming, and Wang Long. Consensus of multi-agent systems with time-varying delay[C]. Decision and Control Conference, Atlanta, United States, 2010: 3078-3083.
- [5] Wei Jia, Fang Hua-jing, and Wang H O. Consensus of multi-agent system with communication delays by self-delay PD control[C]. Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation, Jinan, 2010: 2295-2300.
- [6] Wang J and Elia N. Consensus over network with dynamic channels[C]. American Control Conference, Iowa State University, United States, 2008: 2637-2642.
- [7] Munz U, Papachristodoulou A, and Allgower F. Nonlinear multi-agent system consensus with time-varying delays[C]. International Federation of Automatic Control World Congress, Seoul, Korea, 2008: 1522-1527.
- [8] Wang L and Xiao F. A new approach to consensus problems for discrete-time multi-agent systems with time delays[C]. American Control Conference, Minneapolis, United States, 2006: 2118-2123.
- [9] Wei Yu and Fan Hong da. Consensus problems in multi-agent continuous-time systems with time-delays[C]. Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Progress in Informatics and Computing, Shanghai, 2010: 299-302.

朱 旭: 男, 1987年生, 博士生, 研究方向为控制理论与控制工程、无人机系统通信、无线传感网络等。

闫建国: 男, 1956年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算机控制与智能控制、导航制导与飞行控制、模式识别、光传飞控、鲁棒控制等。

屈耀红: 男, 1971年生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为无人机组合导航及在线风场估计、多机协同、航迹规划、飞行控制及数字滤波等。