

随机间距稀疏三元循环相位掩膜矩阵可压缩成像

张成^① 程鸿^{①②} 沈川^① 韦穗^{*①} 夏云^{①③}

^①(安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室 合肥 230039)

^②(安徽省现代成像与显示技术重点实验室 合肥 230039)

^③(安徽省地方税务局 合肥 230001)

摘要: 可压缩成像是一种新兴的基于压缩感知理论的新成像技术,其核心思想是如果空间场景是稀疏或可压缩,那么它可以用远少于经典的 Nyquist 采样数目的测量值捕获的足够信息重构原场景;构建合适的测量矩阵并易于使用物理实现压缩感知理论中对于图像的随机线性测量是可压缩成像理论实用化的关键之一。该文在研究 Bernoulli 和 Circulant 矩阵的基础上,提出一种新的随机间距稀疏三元循环相位掩膜矩阵。模拟实验结果表明,在可压缩双透镜成像系统单次曝光下,与 Bernoulli 和 Bernoulli-Circulant 相位掩膜矩阵相比,新相位掩膜矩阵的成像信噪比与之相当;但是该文提出的矩阵随机独立变元个数和非零元个数显著减少,易于数据存储与传输;更重要的是物理上更容易实现,重构时间是只有原来的约 20%~50%。新的相位掩膜矩阵的研究对于可压缩成像理论的实际应用具有重要的意义。

关键词: 压缩感知; 可压缩成像; 稀疏三元循环; 相位掩膜矩阵

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)06-1374-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.00893

Sparse Tertiary Circulant Measurement Matrices with Random Spacing in Compressive Imaging

Zhang Cheng^① Cheng Hong^{①②} Shen Chuan^① Wei Sui^① Xia Yun^{①③}

^①(Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Anhui University, Hefei 230039, China)

^②(Key Laboratory of Modern Imaging and Displaying Technology of Anhui Province, Hefei 230039, China)

^③(Local Taxation Bureau of Anhui Province, Hefei 230001, China)

Abstract: Compressive imaging is a novel imaging method based on compressive sensing theory, the key idea is that it can reconstruct original scene precisely with far fewer measurements than Nyquist samples if the scene is sparse/compressible; Constructing an appropriate measurement matrix easy to realize random linear measurement of an image is one of the key points of practical compressive sensing. In this paper, analyzing the existing Bernoulli and Circulant matrices, a novel sparse tertiary circulant measurement matrix with random spacing for phase mask is proposed. Simulation results show that novel phase mask matrices, compared to Bernoulli and Bernoulli-Circulant (BC) phase mask matrices, have the same signal-to-noise ratio; But with the number of independent random variables and the number of non-zeros entries a dramatically reduction, which is more conducive to data transmission and storage; more importantly that is easy to hardware implementation and the reconstructed time is only about 20%~50% of that of original matrices, which has a significance effects on practical compressive sensing.

Key words: Compressive Sensing (CS); Compressive imaging; Sparse tertiary circulant; Phase mask matrix

1 引言

可压缩感知(Compressive Sensing, CS)是一种新的在亚-奈奎斯特采样率下的信号获取和处理的

理论。Shannon/Nyquist 采样定理表明,一个模拟信号可以在其带宽的两倍采样速率下被完全重构。对于许多信号,如音频信号,具有稀疏先验,那么可压缩感知方法可以在远少于 Nyquist 采样测量次数下完全重构该信号。可压缩感知理论应用在成像领域,由此产生可压缩成像(Compressive Imaging, CI),其最重要的优点是利用自然界中图像自身所普

2011-08-31 收到, 2012-03-28 改回

国家自然科学基金(20113401130001), 安徽高校省级自然科学基金项目(KJ2011B131)和安徽大学青年基金(kjqn1010)资助课题

*通信作者: 韦穗 swei@ahu.edu.cn

遍具有的结构稀疏性，精确重构图像只需要少得多的测量值。

测量矩阵是压缩感知理论的三大主要研究内容之一，Candès 等人^[1-4]指出可以采用高斯或 Bernoulli 矩阵并给出其满足的限制等距性质(Restricted Isometric Property, RIP)的证明。虽然上述矩阵有较好的理论保证，但在实际应用中，由于物理条件以及成本的限制，在测量矩阵中降低随机性的要求非常迫切。文献[5-8]提出了几种有效的随机性较低的确定性测量矩阵可以作为压缩感知测量矩阵，并给出相应理论保证。Stern 等人^[9]首先提出基于相位掩膜的单次曝光可压缩成像方法，是目前许多压缩成像方法中比较重要的一种^[9-14]。文献[10]在文献[9]的基础上提出新的循环-循环块相位掩膜矩阵，主要可以应用于多通道成像领域^[10]。

本文在文献[9]和 Circulant 矩阵的基础上，在独立元素中随机地引入零元，提出随机间距稀疏三元循环相位掩膜矩阵。新矩阵的随机独立变元个数可以减少到原有的 1/2~1/16，矩阵非零元个数同样大大减少，有利于数据传输和存储。如在数据保密传输中，为了加强保密性能，除了利用现有的技术进行加密以外，我们还可以将测量数据 y 看成是一种数据加密后得到的，此时，为了便于解码，我们往往需要将测量矩阵同样传输到解码方以方便解码。至于需要观测矩阵的存储的场合，比如在无线传感器网络，单个传感器中需要测量基对相关信号或场景进行测量，此时向每个传感器发送传感矩阵是不切实际的，因此测量矩阵必然事先存储在传感器的存储空间中，此时需要降低存储量。模拟实验结果表明该文提出的新相位掩膜矩阵的重构效果与 Bernoulli 和 Bernoulli-Circulant(BC)相当，但重构时间只有原来的 20%~50%。此外，新相位掩膜矩阵只有 3 个不同的元素值，比高斯相位掩膜矩阵更易于物理实现，可进一步减少实现成本，对可压缩成像理论走向实际应用具有重要意义。

2 可压缩双透镜相位掩膜成像

假定图像 f 在稀疏基 Ψ 上是 K -稀疏的，噪声条件下的 ℓ_1 范数最小化问题获得系数 θ 的估计为

$$\hat{\theta} = \arg \min \|\theta\|_1, \|g - \Phi\Psi\theta\|_2 \leq \varepsilon \quad (1)$$

其中 $\|\theta\|_1 = \sum_{i=1}^N |\theta_i|$ ， Φ 是测量矩阵， Ψ 是稀疏基， g 是测量值， ε 是误差上限。

图1给出基于光学相位掩膜的单次曝光可压缩成像方法，其核心思想是通过透镜 L_1 和 L_2 之间的光学相位掩膜对不同位置处物光波相位的不同延时来实现物体信息的随机调制^[4,5]。

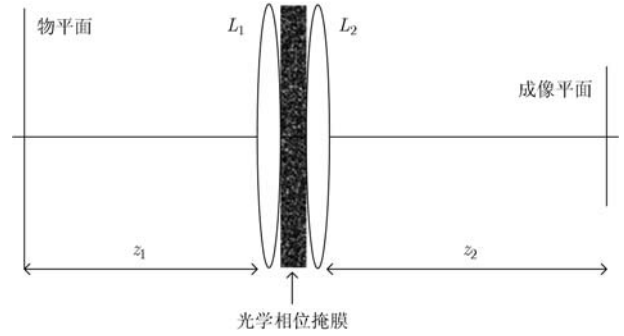


图 1 CS 图像采集的光学系统

物平面上的任一点 r_o 与成像平面上的采样点 r_i 之间的关系可以用

$$u(r_i, r_o) = \kappa_0 \int \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z_1} (r_o - r_\varphi)^2\right] \exp\left[-j \frac{\pi}{\lambda f_{L_1}} r_\varphi^2\right] \cdot \exp[j\phi(r_\varphi)] \exp\left[-j \frac{\pi}{\lambda f_{L_2}} r_\varphi^2\right] \cdot \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z_2} (r_i - r_\varphi)^2\right] dr_\varphi \quad (2)$$

描述。其中 λ 是物光波的中心波长，光学相位掩膜 $\varphi(r_\varphi)$ 具有某种概率分布，透镜 L_1 焦距是 f_{L_1} ，而 f_{L_2} 是透镜 L_2 的焦距， κ_0 是一个常数。式(2)定义了输入输出场之间的对应关系。文献[9]表明如果随机高斯相位掩膜的相关长度 ρ 满足一定条件，那么离散算符 $u(r_i, r_o)$ 可以满足可压缩成像随机投影要求。

对上面的系统进行离散化，物体上的离散点 $f(n\Delta_o)$ 和成像平面上离散点 $g(m\Delta_i)$ 之间的对应关系可以用式(2)描述 $g(m\Delta_i) = \Phi f(n\Delta_o)$ 。 Φ 中的元素

$$\Phi_{m,n} = K_0 \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z_1} (n\Delta_o - \xi)^2\right] \cdot \exp\left[-j \frac{\pi}{\lambda f_{L_1}} \xi^2\right] \exp[j\phi(\xi)] \cdot \exp\left[-j \frac{\pi}{\lambda f_{L_2}} \xi^2\right] \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z_2} (m\Delta_i - \xi)^2\right] d\xi \quad (3)$$

式中 $-N/2 \leq n \leq N/2 - 1$ ， $-M/2 \leq m \leq M/2 - 1$ ， L 是光学相位掩膜的大小。

3 随机间距稀疏三元循环矩阵

目前可压缩感知理论常用的 Bernoulli (或 Gauss) 测量矩阵有 MN 个自由元素，文献[11]-文献[14]提出的循环矩阵 ϕ_C ，有 $\mathcal{O}(N)$ 个自由元素。虽然 Bernoulli(Gauss)矩阵具有良好的理论实现保证，但其缺点是加工实现成本太高，不利于广泛使用。因此研究具有较低随机性的相对“确定”的测量矩阵且易于物理实现，满足特定分布的光学相位掩膜成了人们的新方向。本文在研究现有的 Bernoulli 和

Circulant 测量矩阵的基础上, 将二者结合形成 BC 矩阵, 再在其独立元素中随机地引入零元, 由此提出随机间距稀疏三元循环(sparse trinary **C**irculant measurement matrices with **R**andom spacing, CR) 矩阵, 其具体形式如式(4)所示:

$$\Phi_C = \begin{pmatrix} a_N & a_{N-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_N & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M-1} & a_{M-2} & \cdots & a_M \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中, 独立变量 $a_i, i = 1, \dots, N$ 满足 Bernoulli 分布。

本节以间距 $\Delta = 2$ 的随机间距稀疏三元循环矩阵为例, 给出随机间距稀疏三元循环矩阵的构造方法。该文在式(4)的基础上做出一些改进, 对于一般的 BC 矩阵, 对由其第 1 行所构成的向量 $\mathbf{C}_1 = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_N]$ 做出随机间距稀疏的变化。我们知道, 向量 \mathbf{C}_1 包含了式(4)Circulant 矩阵中的所有独立元素。下面对向量 \mathbf{C}_1 进行赋值, 其元素 $a_i (i \in \Lambda, \Lambda$ 是从 $1 \sim N$ 索引序列中随机选取的 $[N/\Delta]$ 个索引) 值服从独立同分布的随机 Bernoulli 分布, \mathbf{C}_1 向量中其它元素全部赋值为 0。然后根据 Circulant 矩阵的特点构造随机间距稀疏三元循环矩阵, 第 k 行采用对 \mathbf{C}_1 作循环移位

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_1 \rightarrow (k-1) \quad (5)$$

表示第 k 行是第 1 行表示的向量 \mathbf{C}_1 向右循环移位 $k-1$ 个位置, 构造出新的循环矩阵。

比较不同测量矩阵的恢复概率的实验如图 2 和图 3 所示, 其中图 2 信号长度 N 和稀疏度 K 固定为 256 和 30, K 个非零值位置是随机的, 大小是 ± 1 , 测量次数 $M = 80 \sim 140$, 测量次数步长为 3。图 3 中信号长度 N 和测量次数 M 固定为 256 和 128, 稀疏度 $K = 20 \sim 60$, 稀疏度步长为 2。每组参数 (N, M, K) 分别测试 1000 次, 计算其重构成功率。重构算法选用子空间追踪(Subspace Pursuit, SP)算法^[15], 其在重构概率和重构时间方面都有较大的优势。

图 2 和图 3 的实验结果表明本文提出的改进矩阵 CR 矩阵在成功恢复百分比方面和 Bernoulli 矩阵以及一般 BC 矩阵相当, 但是其独立元素个数分别只有 BC 矩阵独立元素个数的 $1/2, 1/3, \dots, 1/16$ (其中, CR- Δ 表示向量 \mathbf{T}_1 中有 $[(N+M-1)/\Delta]$ 个元素赋值为随机 Bernoulli 值, 其余全为 0)。图中只给出了 $\Delta = 4, 8, 16$ 时的曲线, 其它间距 Δ 的结果与此类似, 本文后面的实验结果都以此 3 个 Δ 为例来说明。

从图 2 和图 3 中的对应曲线可以看出, 本文提出的 CR 矩阵的在重建成功率方面与 Bernoulli 和

BC 矩阵基本一致。但是, 其独立元数目和非零元数目分别为 $[N/\Delta], M[N/\Delta]$, 相比一般的 BC 矩阵, 二者显著降低。只有原 BC 矩阵存储空间的 $1/2 \sim 1/16$, 大大地降低了存储成本以及物理实现的难度。

4 模拟实验

根据 Fresnel 理论采用 Matlab 软件模拟实现 2D 场从物体平面到图像平面的传播。假定物体的像素大小为 1 mm, 成像阵列 CCD 像素大小为 100 μm , 物光波中心波长为 $\lambda_0 = 0.55 \mu\text{m}$, 距离 $z_1 = z_2 = 140 \text{ mm}$, 焦距 $f_{L_1} = f_{L_2} = 280 \text{ mm}$ 。各种类型的光学相位掩膜相干波长为 $\rho = 5 \mu\text{m}$; 透镜直径 D_1 和 D_2 都是 50 mm。上述条件满足文献[1]中所列的要求。受限于计算机资源, 限定物体有 64×64 像素。此时测量矩阵 Φ 和稀疏基 Ψ 的大小都是 4096×4096 。该文直接选用 Φ 的前 M 行作为测量矩阵, Φ 的每行的对应一个大小为 4096 的移变点扩散函数。对于本文的光学成像系统, 在满足本文给定的条件下, 可以保证它对应的测量矩阵的列是非相关的, 该非相关性在某种程度上近似与 RIP 条件的要求一致。本文在参考文献[6]的基础上, 推导出本文的系统满足矩阵 Φ 的列非相关所需的条件, 具体推导过程略, 推导的结论如式(6)-式(8)所示:

$$5 \times 10^{-6} = \rho \ll 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \left(\frac{1}{f_{L_1}} + \frac{1}{f_{L_2}} \right) \right)}} = 5.55 \times 10^{-4} \quad (6)$$

$$1 \times 10^{-3} = \Delta_o \gg \Delta_o \gg 2\lambda z_1 / L = 3.08 \times 10^{-6} \quad (7)$$

$$1 \times 10^{-3} = \Delta_o \gg \rho z_1 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \left(\frac{1}{f_{L_1}} + \frac{1}{f_{L_2}} \right) \right) = 5 \times 10^{-6} \quad (8)$$

因此, 本文的测量矩阵 Φ 的列是非相关的, 满足测量矩阵相关随机性要求^[6]。

实际应用中由于各种因素的影响, 往往会引入诸多误差。图 4 和图 5 是 Lena 图像和 Cameraman 图像在图 1 所示的光学采样系统中获得的测量值在噪声方差 $\sigma^2 = 0.5$ 的情况下采用不同的相位掩膜矩阵的重构结果。图像的像素灰度值归一化, 测量值 $M = 3000$, 测量矩阵 Φ 的每一行的 ℓ_2 范数为 1, 噪声向量的 ℓ_2 范数为 1。

图 4 是 Lena 图像重构结果, 其中图 4(a)是标准 Lena 图像(图像大小为 64×64 像素), 稀疏基 Ψ 为 Daubechies5 小波基, 稀疏度 $K = 868$, 测量次数 $M = 3000$, 是原有总像素数目的 73.24%。图 4(b)-4(f)分别是采用 Bernoulli, BC, CR4, CR8 和 CR16

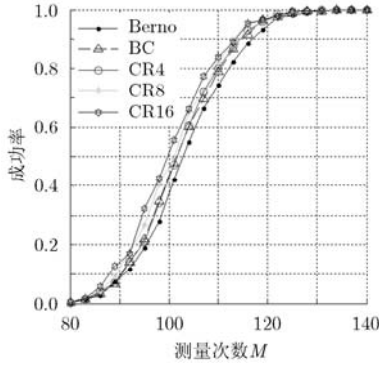


图 2 成功率与测量次数关系

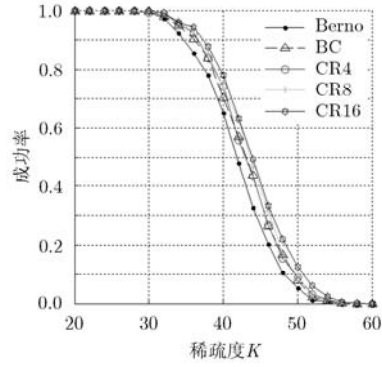


图 3 成功率与稀疏度关系



图 4 Lena 图像重构

测量矩阵的重构结果。

图 5 是 Cameraman 图像重构结果,其中图 5(a)是标准 Cameraman 图像(图像大小为 64×64 像素),稀疏基 Ψ 为 Daubechies1 小波基,稀疏度 $K = 734$,测量次数 $M = 3000$,是原有总像素数目的 73.24%。图 5(b)-5(f)分别是采用 Bernoulli, BC, CR4, CR8 和 CR16 测量矩阵的重构结果。

从图 4 和图 5 中 Lena 和 Cameraman 图像的重构结果来看, Lena 图像的重构效果要差于 Cameraman 图像,这是因为 Lena 图像的稀疏度 K 比 Cameraman 图像的稀疏度大得多,所以同样的测量次数下, Cameraman 图像的效果要好一些。

下面测试 CR 相位掩膜矩阵的鲁棒性;为了统

一测试,对数据进行归一化处理,如测量矩阵的每一行和噪声向量的每一行向量的 l_2 范数为 1 等。高斯噪声的方差 $\sigma^2 = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$ 。每一种方差噪声下测试 10 次,取其信噪比和重构时间的均值,结果如图 6 和图 7 所示。

图 6(a)和图 6(b)分别是 Lena 图像在不同方差下图像重构的平均信噪比和平均时间随噪声方差增加的变化曲线。图 7(a)和图 7(b)分别是 Cameraman 图像重构的平均信噪比和平均重构时间的曲线。

从图 6 和图 7 实验结果曲线可以看出,和现有的 Bernoulli 和 BC 测量矩阵相比,该文提出的随机间距稀疏三元循环测量矩阵在保证重构质量的情况下,在编码和存储、实现成本以及提高传感器的使

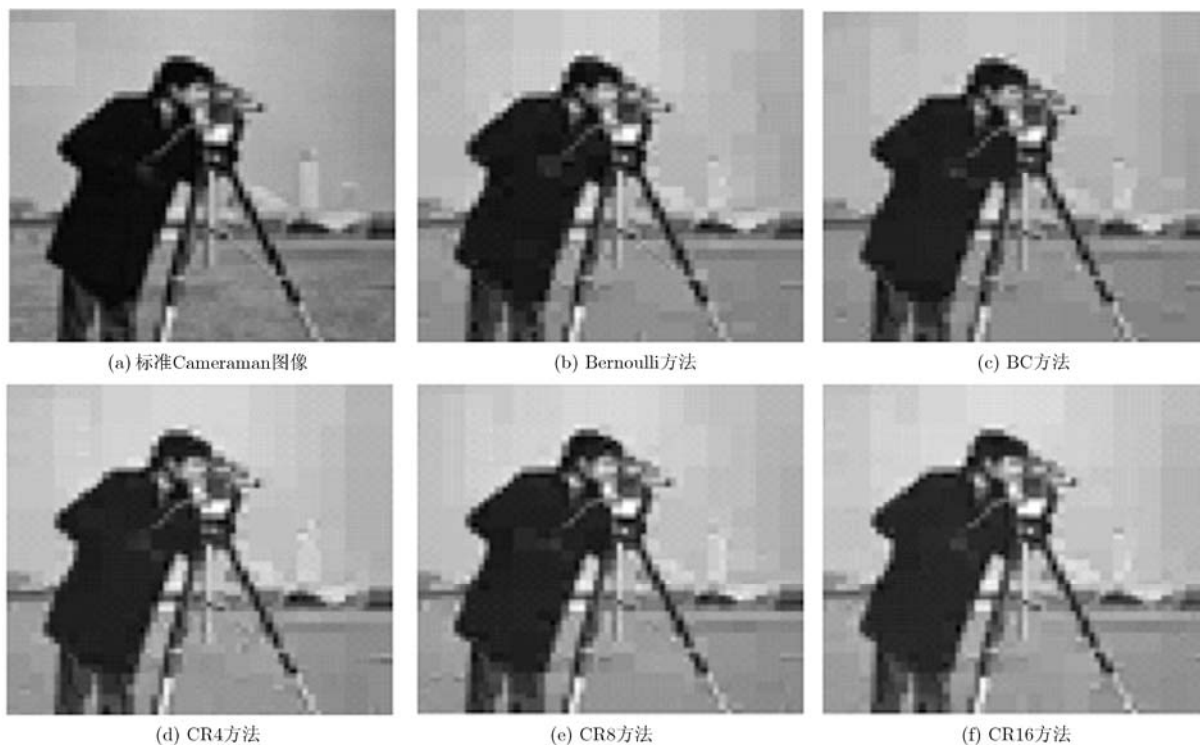


图 5 Cameraman 图像重构

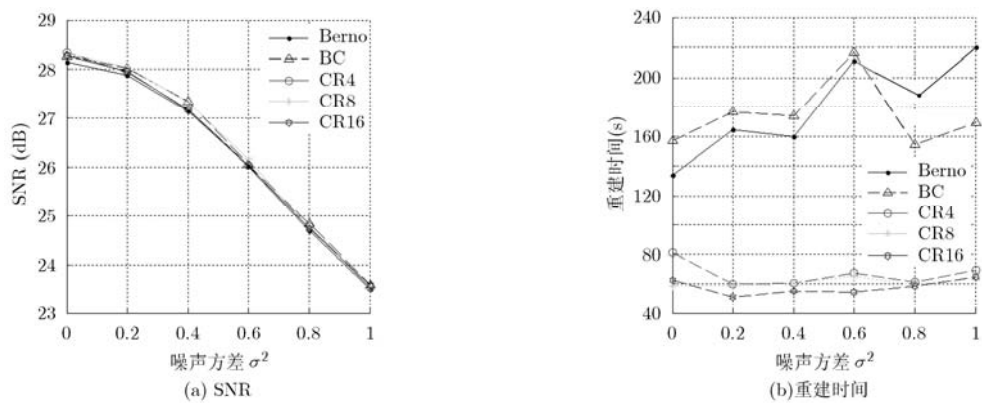


图 6 不同噪声方差下 Lena 图像重构

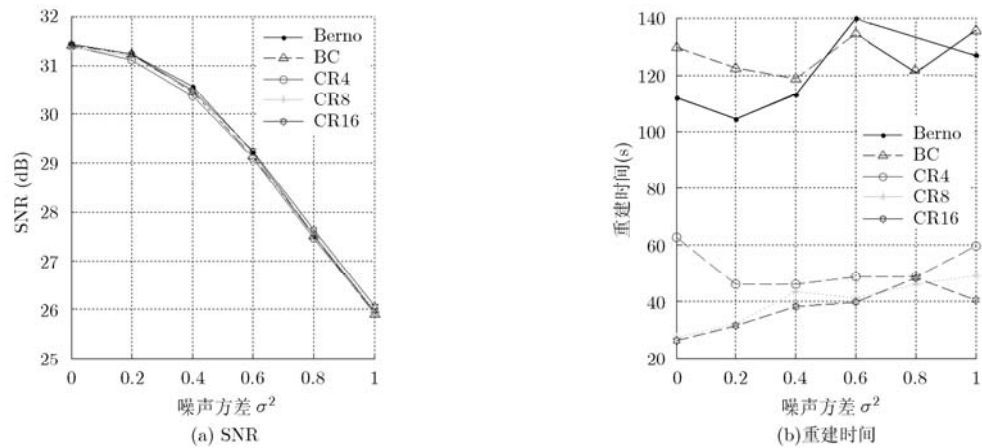


图 7 不同噪声方差下 Cameraman 图像重构

用寿命上有着较大的优势。此外, 随机间距稀疏三元循环测量矩阵在重构时间上大大下降, 这是因为在重构算法中, 需要进行多次 Ax 和 $A^T y$ 的乘法, 该文提出的测量矩阵中有大量零元素, 导致乘法运算大大下降, 比原 Bernoulli 和 BC 矩阵的重构时间节约了 50%–80% 时间, 甚至更多。对于 CS 理论走向实际应用具有重要的意义。

5 结论

本文给出一种随机间距稀疏三元循环相位掩膜矩阵, 在可压缩双透镜相位掩膜成像系统下测试该文提出的相位掩膜矩阵重建图像的效果。模拟实验结果表明对于稀疏或可压缩图像, 该文提出的相位掩膜矩阵在单次曝光下获得的压缩测量值中准确的重构原图像的成像效果与 Bernoulli 以及 BC 相位掩膜矩阵相当; 但是, 该文提出的相位掩膜矩阵在数据存储与传输时更有优势, 物理上更容易实现; 最后, 采样新的相位掩膜矩阵在后端的重构时间是 Bernoulli 和 BC 相位掩膜矩阵重构时间的 20%~50%。

参考文献

- [1] Candès E, Romberg J, and Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509.
 - [2] Candès E J, Romberg J K, and Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207–1223.
 - [3] Candès E J and Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling[J]. *Inverse Problems*, 2007, 23(3): 969–985.
 - [4] Candès E J and Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21–30.
 - [5] Bajwa W U, Haupt J D, Raz G M, *et al.* Toeplitz-structured compressed sensing matrices[C]. Proceedings of the 2007 IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing, Madison, Wisconsin, 2007: 294–298.
 - [6] Rauhut H. Circulant and Toeplitz matrices in compressed sensing[C]. Proceedings of the 2009 Workshop on Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations, Saint-Malo, France, 2009.
 - [7] DeVore R. Deterministic constructions of compressed sensing matrices[J]. *Journal of Complexity*, 2007, 23(4–6): 918–925.
 - [8] Haupt J, Bajwa W U, Raz G, *et al.* Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(11): 5862–5875.
 - [9] Stern A and Javidi B. Random projections imaging with extended space-bandwidth product[J]. *Journal of Display Technology*, 2007, 3(2): 315–320.
 - [10] 张成, 杨海蓉, 韦穗. 循环-循环块相位掩膜可压缩双透镜成像[J]. *光学学报*, 2011, 31(8): 811001.
Zhang Cheng, Yang Hai-rong, and Wei Sui. Compressive double-lens imaging using circulant-toeplitz-block phase mask[J]. *Acta Optica Sinica*, 2011, 31(8): 811001.
 - [11] Duarte M F, Davenport M A, Takhar D, *et al.* Single-Pixel Imaging via Compressive Sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 83–91.
 - [12] Marcia R F and Willett R M. Compressive coded aperture superresolution image reconstruction[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing 2008 (ICASSP 2008), Las Vegas, 2008: 833–836.
 - [13] Baraniuk R and Steeghs P. Compressive radar imaging[C]. 2007 IEEE Radar Conference, Boston, 2007: 128–133.
 - [14] Brady D J, Choi K, Marks D L, *et al.* Compressive Holography[J]. *Optics Express*, 2009, 17(15): 13040–13049.
 - [15] Dai W and Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5): 2230–2249.
- 张成: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为信号与信息处理、相位检索和压缩成像。
程鸿: 女, 1981年生, 博士生, 研究方向为相位检索和信号处理。
沈川: 男, 1986年生, 硕士生, 研究方向为全息显示。
韦穗: 女, 1946年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算机视觉、图像处理、全息显示。
夏云: 男, 1983年生, 硕士生, 研究方向为图谱匹配。