

## 频率估计的一种多段同频正弦信号频谱相关算法

肖 玮\* 涂亚庆 刘良兵 莫正军  
(后勤工程学院 重庆 401311)

**摘要:** 为提高低信噪比条件下正弦信号的频率估计精度, 针对多段同频正弦信号, 该文提出一种基于频谱相关的频率估计算法。首先, 构造加权因子对多段同频正弦信号频谱进行加权积累, 得到最优加权积累频谱; 然后, 将多段同频正弦信号的最优加权积累频谱和累加频谱进行相关运算, 得到频谱相关谱; 最后, 谱峰搜索频谱相关谱, 实现频率的精确估计。模拟结果验证了该文算法的有效性。

**关键词:** 信号处理; 频率估计; 频谱相关; 多段同频正弦信号; 低信噪比

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)03-0564-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.00665

## A Frequency Estimation Algorithm Based on Spectrums Correlation of Multi-section Co-frequency Sinusoids

Xiao Wei Tu Ya-qing Liu Liang-bing Mo Zheng-jun  
(Logistical Engineering University, Chongqing 401311, China)

**Abstract:** For improving the sinusoidal signal frequency estimation at low Signal-to-Noise Ratio (SNR), a frequency estimation algorithm based on spectrums correlation of Multi-Section Co-Frequency (MSCF) sinusoids signal is proposed. Firstly, the Optimization Weighted-Accumulation (OW-A) spectrum is gained through weighted-accumulating spectrums of the MSCF sinusoids signal by the weighted factor. Secondly, the correlation spectrum is constructed by correlating the OW-A spectrum and the accumulation spectrum of the MSCF sinusoids signal. Consequently, frequency estimation can be obtained through spectral peak searching of the correlation spectrum. Simulation results demonstrate the superior performance of the proposed algorithm.

**Key words:** Signal processing; Frequency estimation; Spectrum correlation; Multi-Section Co-Frequency (MSCF) sinusoids signal; Low Signal-to-Noise Ratio (SNR)

### 1 引言

正弦信号的频率估计问题是信号处理的重要研究内容之一。低信噪比条件下短时正弦信号频率估计在电子对抗、电力系统、医学、工业测量及雷达等诸多领域具有重要意义, 是国内外的研究热点和难点<sup>[1-6]</sup>。短时正弦信号因时宽短, 导致频谱主瓣较宽、频谱泄漏严重、抗噪性差<sup>[7]</sup>。现有针对短时正弦信号的估计方法有3类: (1)硬件改造法。如提高采样频率, 降低电子噪声等。该方法实时性好, 但精度有限, 且与硬件成本相关<sup>[8]</sup>。(2)单段信号分析法。该类方法主要利用常规频谱分析方法辅以数学手段对单段正弦信号进行频谱分析<sup>[3-6]</sup>。从信息论角度来看, 由于短时正弦信号时宽短, 包含的信息量有限, 因此即使采用频谱校正法也难以克服信息

量不足、频谱泄漏严重对频率估计精度的影响。(3)多段信号融合法。该方法主要利用多段信号间的内在联系, 如频率相等、相位关联等对多段短时正弦信号进行融合, 使其近似达到成倍延长被测信号持续时间的效果, 从而弥补短时正弦信号包含信息量不足的缺陷, 从源头上为获得高精度的频率估计值提供良好的条件<sup>[9]</sup>。虽然该类方法的频率估计精度较前两类方法有较大提高, 但也存在一些问题: 部分算法普适性差, 需要添加一些在工程中较难满足的条件, 如基于Yule-Walker方程法<sup>[10]</sup>, 要求各段信号满足特定迭代关系; 频谱积累法<sup>[11]</sup>, 要求各段信号的相位连续; 如多段同频等长信号融合算法<sup>[12]</sup>, 要求各段信号长度相等; 直接相位积累法<sup>[13]</sup>, 要求各段信号间的起始采样时刻已知; 部分算法抗噪性差, 精度较低, 如旋转相位积累法<sup>[13]</sup>等。

本文为解决频率估计的多段信号融合法中存在的主要问题, 针对多段同频正弦信号, 提出一种基于频谱相关的频率估计算法。

2011-06-30 收到, 2011-10-11 改回

国家自然科学基金(60871098)和重庆市重点自然科学基金(CSCT, 2011BA2015)资助课题

\*通信作者: 肖玮 wzwy@163.com

## 2 信号模型

多段同频正弦信号是指以单段正弦采样信号为元素构成的一个集合, 该集合的特征是其元素个数  $M \geq 2$ , 每个元素的信号频率和采样频率相同, 信号长度为任意值, 相邻元素的相位一般不连续。按每个元素的信号长度是否相等进行分类, 可将多段同频正弦信号分为多段同频等长正弦信号和多段同频不等长正弦信号。图1以  $M = 4$  进行举例说明。多段同频正弦信号是多段同频等长正弦信号的一种推广形式, 更容易获取, 具有更广泛的应用范围和更重要的研究价值。

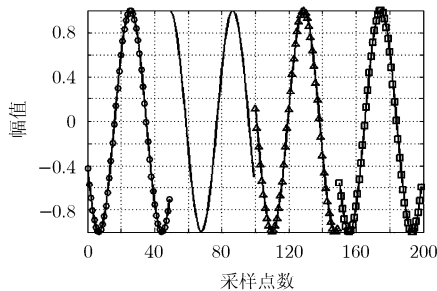
$x$  表示  $M$  段同频正弦信号,  $x_m (m \in [1, M])$  表示  $x$  中第  $m$  段采样信号, 则

$$x_m(n_m) = \cos[\theta(m) + 2\pi n_m f_0 / f_s], \quad n_m \in [1, N_m] \quad (1)$$

其中  $f_0$ ,  $f_s$ ,  $N_m$  和  $\theta(m)$  分别表示  $x_m$  的信号频率(即待估频率)、采样频率、采样点数和初相, 则  $x$  的采样点数为  $N = \sum_{m=1}^M N_m$ 。

工程应用中易知待估频率  $f_0$  的大致取值范围  $f_{\text{scope}} = [f_{\text{min}}, f_{\text{max}}]$ 。将  $f_{\text{scope}}$  线性等分, 分别构成一个长度为  $A$  的序列  $f_A$  和一个长度为  $B$  的序列  $f_B$ ;  $f_A(a)$  表示  $f_A$  中第  $a$  个元素,  $a \in [1, A]$ ;  $f_B(b)$  表示  $f_B$  中第  $b$  个元素,  $b \in [1, B]$ ;  $f_A(a_b)$  表示  $f_A$  中与  $f_B(b)$  最接近的元素, 即  $f_A(a_b) \approx f_B(b)$ ,  $a_b \in [1, A]$ 。由于实信号的频谱为共轭对称, 剔除负频率部分不会造成任何信息损失, 也不会带来虚假信息<sup>[7]</sup>, 故本文均只考虑频谱的正频率部分。计算  $x_m$  在频率点  $f_A(a)$  的 DTFT(Discrete Time Fourier Transform), 记其正频率部分为  $X_m[f_A(a)]$ ,

$$\begin{aligned} X_m[f_A(a)] &= 0.5 \sum_{n_m=1}^{N_m} e^{j[\theta(m)+2\pi n_m f_0 / f_s]} e^{-j2\pi n_m f_A(a) / f_s} \\ &= 0.5 \sum_{n_m=1}^{N_m} e^{j\{\theta(m)+2\pi n_m [f_0 - f_A(a)] / f_s\}} \\ &= \frac{\sin[N_m g_0(a)]}{2 \sin g_0(a)} e^{j\theta(m)} \end{aligned} \quad (2)$$



(a) 多段同频等长正弦信号示意图

其中  $g_0(a) = \pi[f_0 - f_A(a)] / f_s$ 。

不失一般性, 考虑噪声对信号的影响,  $\theta_z(m, a)$  表示考虑噪声后  $X_m[f_A(a)]$  的相位特性, 则

$$\theta_z(m, a) = \text{angle}\{X_m[f_A(a)] + W_m[f_A(a)]\} \quad (3)$$

其中  $\text{angle}(t)$  表示计算复数  $t$  相位的函数,  $W_m[f_A(a)]$  表示随机噪声对  $X_m[f_A(a)]$  的影响。

$f_A(a_0)$  表示  $f_0$  的一个估计值, 即  $f_A(a_0) \approx f_0$ , 故有  $\theta_z(m, a_0) \approx \theta(m)$ , 因此在考虑随机噪声情况下, 可以用  $\theta_z(m, a_0)$  代替式(2)中的  $\theta(m)$ 。

$s$  表示与  $x$  信号长度相同的相位连续正弦采样信号,

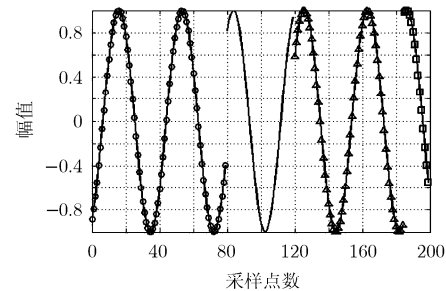
$$s(n_s) = \cos[\theta(1) + 2\pi f_0 n_s / f_s], \quad n_s \in [1, N] \quad (4)$$

将  $s$  分为  $M$  段采样点数依次为  $N_m (m \in [1, M])$  的相位连续信号, 记  $s$  在频率点  $f_A(a)$  的 DTFT 的正频率部分为  $S[f_A(a)]$ ,

$$\begin{aligned} S[f_A(a)] &= \sum_{m=1}^M \sum_{n_m=1}^{N_m} 0.5 e^{j\{\theta(1)+2\pi g_0(a)[(m-1)N_m+n_m]\}} \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{\sin[N_m g_0(a)]}{2 \sin g_0(a)} e^{j\{\theta(1)+g_0(a)[(2m-1)N_m+1]\}} \end{aligned} \quad (5)$$

## 3 算法原理

算法的基本思想如图 2 所示: 首先, 根据多段同频正弦信号频谱不同的泄漏程度, 构造加权因子对其进行加权积累, 得到最优加权积累频谱, 解决因多段同频正弦信号中各段采样信号相位不连续、时宽不等导致的频谱泄漏严重程度不同、主瓣较宽、抗噪性差等问题; 然后, 将多段同频正弦信号的最优加权积累频谱与其累加频谱进行相关运算, 得到频域相关谱, 在有效保留最优加权积累频谱主瓣窄而高特性的基础上, 充分利用累加频谱的噪声对消特性, 抑制虚假谱峰和噪声干扰; 最后, 谱峰搜索频谱相关谱, 实现频率的精确估计。以下重点阐述与推导最优加权积累频谱的生成和频谱相关处理的原理。在算法验证中设置多种应用环境参数与精度较高的文献[12]方法进行定量对比。



(b) 多段同频不等长正弦信号示意图

图 1 多段同频正弦信号示意图

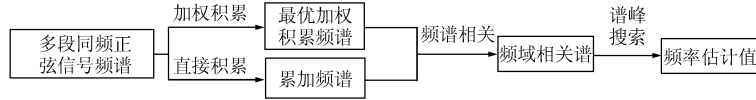


图2 算法基本思想

### 3.1 最优加权积累频谱

由于各  $x_m$  信号长度不同, 任意相邻段的相位一般不连续, 因此导致各  $X_m[f_A(a)]$  的泄漏程度不同、主瓣较宽、抗噪性较差。为此, 本文根据各  $X_m[f_A(a)]$  不同的泄漏程度, 设计加权因子对  $X_m[f_A(a)]$  进行加权积累, 得到最优加权积累频谱, 以达到减小主瓣宽度、增大主瓣高度、抑制频谱泄漏、增强抗噪性的目的。

#### 3.1.1 加权因子设计

$s_b$  表示正弦采样信号,

$$s_b(n_s) = \cos[\theta_z(1, a_b) + 2\pi f_B(b)n_s / f_s], \quad n_s \in [1, N] \quad (6)$$

将  $s_b$  分为  $M$  段采样点数依次为  $N_m$  ( $m \in [1, M]$ ) 的相位连续信号, 计算  $s_b$  在频率点  $f_A(a)$  的 DTFT, 记其正频率部分为  $S_b[f_A(a)]$ ,

$$\begin{aligned} S_b[f_A(a)] &= \sum_{m=1}^M \sum_{n_m=1}^{N_m} 0.5 e^{j\{\theta_z(1, a_b) + 2g_b(a)[(m-1)N_m + n_m]\}} \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{\sin[N_m g_b(a)]}{2 \sin g_b(a)} e^{j\{\theta_z(1, a_b) + g_b(a)[(2m-1)N_m + 1]\}} \quad (7) \end{aligned}$$

其中  $g_b(a) = \pi[f_B(b) - f_A(a)] / f_s$ 。

$y_b$  表示  $M$  段同频正弦信号, 其中每段信号的频率均为  $f_B(b)$ 、长度分别为  $N_m$  ( $m \in [1, M]$ ),  $y_{mb}$  表示  $y_b$  中第  $m$  段信号,

$$y_{mb}(n_m) = \cos\{\theta_z(m, a_b) + 2\pi n_m f_B(b) / f_s\} \quad (8)$$

计算  $y_{mb}$  在频率点  $f_A(a)$  的 DTFT, 记其正频率部分为  $Y_{mb}[f_A(a)]$ ,

$$\begin{aligned} Y_{mb}[f_A(a)] &= \sum_{n_m=1}^{N_m} e^{j\{\theta_z(m, a_b) + 2\pi n_m f_B(b) / f_s\}} e^{-j2\pi n_m f_A(a) / f_s} \\ &= \frac{\sin[N_m g_b(a)]}{2 \sin g_b(a)} e^{j\theta_z(m, a_b)} \quad (9) \end{aligned}$$

由于各  $y_{mb}$  的信号长度不等, 导致  $Y_{mb}[f_A(a)]$  的泄漏程度不同。直接对多段  $Y_{mb}[f_A(a)]$  进行累加, 虽然能从一定程度上实现噪声对消, 提高频谱抗噪性, 但难以达到与  $y_b$  信号长度相等的相位连续信号  $s_b$  的频谱分析效果, 因此设计加权因子  $e^{-jD(m, a, b)}$  对  $Y_{mb}[f_A(a)]$  进行加权积累, 得到  $y_b$  的加权积累频谱矩阵  $\mathbf{Y}'_b[f_A(a)]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'_b[f_A(a)] &= \sum_{m=1}^M \{e^{-jD(m, a, b)} Y_{mb}[f_A(a)]\} \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{\sin[N_m g_b(a)]}{2 \sin g_b(a)} e^{j\{\theta_z(m, a_b) - D(m, a, b)\}} \quad (10) \end{aligned}$$

欲使  $\mathbf{Y}'_b[f_A(a)]$  达到与  $y_b$  信号长度相同的相位连续信号频谱  $S_b[f_A(a)]$  的分析效果, 必有式(11)成立。

$$\mathbf{Y}'_b[f_A(a)] = S_b[f_A(a)] \quad (11)$$

据式(11)即可生成  $e^{-jD(m, a, b)}$ , 其计算如式(12)所示。

$$e^{-jD(m, a, b)} = e^{-j\{\theta_z(m, a_b) - \theta_z(1, a_b) - g_b(a)[(2m-1)N_m + 1]\}} \quad (12)$$

**3.1.2 最优加权积累频谱生成** 利用加权因子  $e^{-jD(m, a, b)}$  对  $X_m[f_A(a)]$  进行加权积累, 得到  $x$  的加权积累频谱矩阵  $\mathbf{X}'_b[f_A(a)]$ ,

$$\mathbf{X}'_b[f_A(a)] = \sum_{m=1}^M \{e^{-jD(m, a, b)} X_m[f_A(a)]\} \quad (13)$$

**性质 1** 序列  $f_B$  中必存在一元素  $f_B(b_0)$ , 其在加权因子中的对应值  $e^{-jD(m, a, b_0)}$  对  $X_m[f_A(a)]$  加权积累后, 必有式(14)成立。

$$X'_{b_0}[f_A(a)] = \sum_{m=1}^M \{e^{-jD(m, a, b_0)} X_m[f_A(a)]\} \approx S[f_A(a)] \quad (14)$$

即  $X'_{b_0}[f_A(a)]$  近似于与  $x$  信号长度相等的相位连续信号频谱  $S[f_A(a)]$ 。

**证明** 因为  $f_B$  由  $f_{\text{scope}}$  线性等分生成, 因此  $f_B$  中必存在一元素  $f_B(b_0)$ , 有  $f_B(b_0) \approx f_0$ 。又因为  $f_A(a_{b_0}) \approx f_B(b_0)$ ,  $f_A(a_0) \approx f_0$ , 所以  $f_A(a_0) \approx f_B(b_0) \approx f_A(a_{b_0}) \approx f_0$ ,  $\theta_z(m, a_0) \approx \theta_z(m, a_{b_0}) \approx \theta(m)$ , 所以

$$\begin{aligned} X'_{b_0}[f_A(a)] &= \sum_{m=1}^M \{e^{-jD(m, a, b_0)} X_m[f_A(a)]\} \\ &\approx \sum_{m=1}^M \{e^{-jD(m, a, b_0)} Y_{mb_0}[f_A(a)]\} \approx Y'_{b_0}[f_A(a)] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S[f_A(a)] &= \sum_{m=1}^M \frac{\sin[N_m g_0(a)]}{2 \sin g_0(a)} e^{j\{\theta(1) + g_0(a)[(2m-1)N_m + 1]\}} \\ &\approx \sum_{m=1}^M \frac{\sin[N_m g_{b_0}(a)]}{2 \sin g_{b_0}(a)} e^{j\{\theta_z(1, a_{b_0}) + g_{b_0}(a)[(2m-1)N_m + 1]\}} \\ &\approx S_{b_0}[f_A(a)] \quad (16) \end{aligned}$$

因为式(11)对任意  $b, b \in [1, B]$  成立, 所以

$$Y'_{b_0}[f_B(b)] = S_{b_0}[f_A(a)] \quad (17)$$

联立式(15)-式(17), 必有式(14)成立, 即  $X'_{b_0}[f_A(a)]$  近似于与  $x$  信号长度相同的相位连续信号频谱  $S[f_A(a)]$ 。证毕

图 3 给出了  $S[f_A(a)]$ ,  $\mathbf{X}'_b[f_A(a)]$ ,  $X'_{b_0}[f_A(a)]$  和  $X_m[f_A(a)]$  的示意图。

由图 3 可知,  $X'_{b_0}[f_A(a)]$  的主瓣宽度较任意  $X_m[f_A(a)]$  的都窄, 主瓣高度较任意  $X_m[f_A(a)]$  的都高,

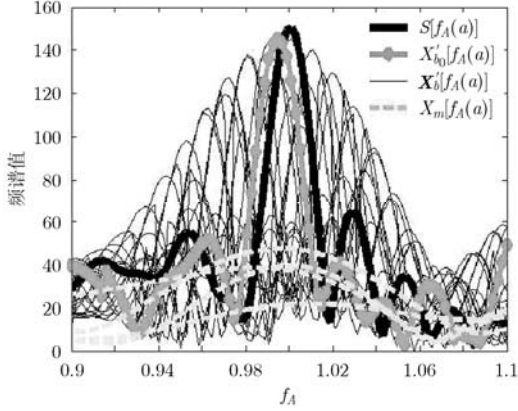


图 3  $S[f_A(a)]$ ,  $X'_b[f_A(a)]$ ,  $X'_m[f_A(a)]$  和  $X_m[f_A(a)]$  示意图

能量较为集中, 达到  $X'_b[f_A(a)]$  的峰值, 与  $S[f_A(a)]$  相当。因此谱峰搜索  $X'_b[f_A(a)]$  的绝对值, 其峰值元素所在列即为  $X'_b[f_A(a)]$ , 本文称其为最优加权积累频谱。

### 3.2 频谱相关谱

信号的时域相关主要是指通过衡量两个信号的相似度来实现信号的检测、识别与提取。而本文采用的频谱相关技术主要通过检测同一信号的两个不同类型频谱的相似性, 来抑制虚假谱峰和噪声干扰, 提高信号参数估计精度。

由图 3 可知,  $X'_b[f_A(a)]$  的主瓣窄而高, 能量较为集中, 频谱泄漏明显减弱, 较为接近  $S[f_A(a)]$ , 但由于  $X'_b[f_A(a)]$  是由多段相位不连续的同频不等长正弦信号频谱加权积累而成, 因此相对  $S[f_A(a)]$  而言,  $X'_b[f_A(a)]$  抗噪性仍较弱, 频谱分析精度有待进一步提高。所有  $X_m[f_A(a)]$  的累加频谱, 虽然能增大主瓣高度, 从一定程度上实现噪声对消, 提高信噪比, 但由于各  $x_m$  的信号长度不同, 导致各  $X_m[f_A(a)]$  频谱泄漏程度不同, 其累加频谱存在主瓣较宽、频谱泄漏严重等问题。本文通过对多段同频正弦信号的最优加权积累频谱和累加频谱进行相关处理, 在有效继承最优加权积累频谱主瓣窄而高特性的基础上, 充分利用累加频谱的噪声对消特性, 抑制虚假谱峰和噪声干扰, 提高频谱分析精度。

将  $M$  段  $X_m[f_A(a)]$  进行累加, 得到其累加频谱  $X[f_A(a)]$ ,

$$X[f_A(a)] = \sum_{m=1}^M \text{abs}\{X_m[f_A(a)]\} \quad (18)$$

其中  $\text{abs}(t)$  表示求复数  $t$  模的函数。

将  $X'_b[f_A(a)]$  和  $X[f_A(a)]$  进行相关运算, 得到频谱相关谱  $r_{XX_b}[f_A(a)]$ ,

$$\begin{aligned} r_{XX_b}[f_A(a)] &= \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \{X[f_A(a)] + W[f_A(a)]\} \\ &\quad \times \{X'_b[f_A(a)] + W_b[f_A(a)]\} \\ &= \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \{X[f_A(a)]W_b[f_A(a)] \\ &\quad + X'_b[f_A(a)]W[f_A(a)]\} \\ &\quad + \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \{W_b[f_A(a)]W[f_A(a)]\} \\ &\quad + \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \{X[f_A(a)] + X'_b[f_A(a)]\} \quad (19) \end{aligned}$$

其中  $W[f_A(a)]$  和  $W_b[f_A(a)]$  分别表示随机噪声对  $X[f_A(a)]$  和  $X'_b[f_A(a)]$  影响。由于噪声的随机性, 一般认为  $X[f_A(a)]$  和  $W_b[f_A(a)]$ ,  $X'_b[f_A(a)]$  和  $W[f_A(a)]$  完全无关。由于  $W_b[f_A(a)]$  受加权因子的影响, 可以认为其与  $W[f_A(a)]$  相关性很小。因此式(19)主要考虑无噪声干扰情况下  $X'_b[f_A(a)]$  和  $X[f_A(a)]$  的相关性。因为  $X[f_A(a)]$  和  $X'_b[f_A(a)]$  均由同一采样信号产生, 由 DTFT 频率估计原理可知, 在无噪声干扰情况下,  $X[f_A(a)]$  和  $X'_b[f_A(a)]$  在最接近信号真实频率的离散频率点达到峰值, 由相关原理可知,  $r_{XX_b}[f_A(a)]$  当且仅当  $X[f_A(a)]$  和  $X'_b[f_A(a)]$  在同一频率点具有最相近的值时, 达到峰值。因此  $r_{XX_b}[f_A(a)]$  谱峰对应的频率即为信号的最优频率估计值。

### 4 算法流程

基于上文理论推导和证明, 可得基于多段同频正弦信号频谱相关的频率估计算法如下:

(1) 分别根据式(2), 式(3), 式(12), 式(13)和式(18)生成  $X_m[f_A(a)]$ ,  $\theta_z(m, a)$ ,  $e^{-jD(m, a, b)}$ ,  $X'_b[f_A(a)]$  和  $X[f_A(a)]$ ;

(2) 谱峰搜索  $\text{abs}\{X'_b[f_A(a)]\}$  得到最优加权积累频谱  $X'_b[f_A(a)]$ ;

(3) 根据式(19)得到频域相关谱  $r_{XX_b}[f_A(a)]$ ;

(4) 谱峰搜索  $r_{XX_b}[f_A(a)]$  得到  $f_0$  的最优估计值  $\hat{f}$ 。

算法流程框图如图 4 所示。

### 5 算法验证

为验证本文算法, 在 MATLAB 中对本文算法

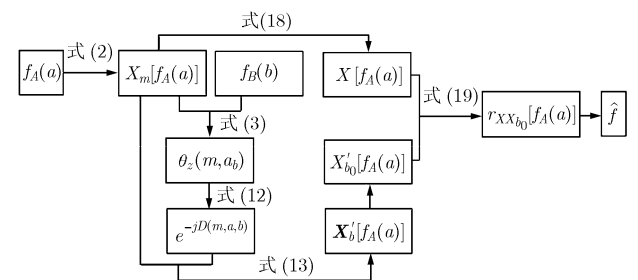


图 4 算法流程图

和精度较高的文献[12]算法进行对比实验。实验参数设置如表1所示。本文算法的频率估计对象  $M$  段同频正弦信号, 具体包括  $M$  段同频等长正弦信号  $b_1$  和  $M$  段同频不等长正弦信号  $b_2$ 。  $b_1$  和  $b_2$  的待估信号频率均为  $f_0$ 、采样频率均为  $f_s$ ,  $b_1$  和  $b_2$  中第  $m$  ( $m \in [1, M]$ ) 段信号的采样点数分别为  $N_{b_{1m}}$  和  $N_{b_{2m}}$ , 且

$\sum_{m=1}^M N_{b_{1m}} = \sum_{m=1}^M N_{b_{2m}} = N$ , 相位均为  $\theta(m)$  ( $\theta(m)$  满足幅度为  $2\pi$  的高斯分布)。实验中所加噪声均为加性高斯白噪声。由于文献[12]算法只能处理多段同频等长正弦信号, 因此只在估计  $b_1$  频率时与本文算法比较。

表1 实验参数设置值

参数	SNR	$f_0$	$f_s$	$f_{\min}$	$f_{\max}$	$M$	$[N_{q_1}, N_{q_2}, N_{q_3}, N_{q_4}]$	$[N_{b_{21}}, N_{b_{22}}, N_{b_{23}}, N_{b_{24}}]$	$A$	$B$
设定值	-5 dB	10 MHz	40 MHz	9 MHz	11.5 MHz	4	[50, 50, 50, 50]	[5, 10, 90, 95]	150	150

### 5.1 低信噪比条件下的验证实验

为验证本文算法在 SNR = -5 dB 低信噪比条件下的性能, 进行 1000 次 Monte\_Carlo 实验, 实验结果如图 5 所示。在估计  $b_1$  的频率时, 本文算法和文献[12]算法的频率估计均方误差 (Mean Square Error, MSE) 分别为 [60.35, 14.13] kHz, 前者较后者降低约 76.59%。在估计  $b_2$  的频率时, 本文算法的 MSE 为 13.93 kHz。无论是估计  $M$  段同频等长正弦信号  $b_1$ , 还是估计  $M$  段同频不等长正弦信号  $b_2$ , 本文算法的 MSE 均十分接近与  $b_1$  或  $b_2$  信号长度相等的相位连续正弦信号的克拉美罗下限 13.86 kHz。这是因为本文采用的频谱相关技术既能有效保持最优加权积累频谱的主瓣窄而高的特性, 又能充分利用累加频谱的噪声对消特性, 因此能够有效抑制虚假谱峰和噪声干扰, 提高频谱分析精度。

### 5.2 不同信噪比条件下的验证实验

为验证本文算法在不同信噪比条件下的性能, 进行 10 组实验, 每组包括 1000 次 Monte\_Carlo 实

验。各组实验的信噪比设置如图 6 横坐标所示, 其余参数见表 1。

由图 6 可知, 在信噪比为 -13 ~ 5 dB 的实验范围内, 随着信噪比的线性递增, 本文算法和文献[12]算法的 MSE 都不断降低, 但前者一直低于后者; 且本文算法在估计  $b_2$  时的 MSE 低于估计  $b_1$ 。这是因为当信噪比和采样频率一定的情况下, 信号长度 (即采样点数) 是决定频谱分析精度的主要因素, 信号长度越长, 包含的信息量越大, 频谱分析精度越好。虽然  $b_2$  中部分信号的长度较短, 抗噪性较差, 但由于本文算法具有较强的抗噪性, 在保持最优加权积累频谱的主瓣窄而高的特性的基础上, 继承累加频谱的噪声对消特性, 因此  $b_2$  中长度较短的信号的抗噪性能得到较大改善。此外, 由于  $b_2$  中还包含部分长度较长的信号, 这部分信号的长度均大于  $b_1$  中各段信号, 因此本文算法估计  $b_2$  频率的性能优于估计  $b_1$  频率。同时, 为低信噪比条件下正弦信号的频率估计提供一条新思路, 即将待估正弦信号分为多段不等长信号, 再运用本文算法进行频率估计。

### 5.3 不同单段信号长度条件下的验证实验

为验证本文算法的普适性, 进行 10 组实验, 每组包括 1000 次 Monte\_Carlo 实验, 每组  $b_1$  和  $b_2$  中第  $m$  ( $m \in [1, M]$ ) 段信号的长度  $N_{b_{1m}}$  和  $N_{b_{2m}}$  设置如表 2 所示, 其余参数参见表 1。由图 7 可知, 随着  $b_1$  和  $b_2$  中单段信号长度  $N_{b_{1m}}$  和  $N_{b_{2m}}$  的线性递增, 本文算法和文献[12]算法的 MSE 都有所下降, 但前者一直低于后者, 且本文算法能够更准确地估计出多段同频不等长正弦信号的频率。

## 6 结论

针对多段同频正弦信号, 本文提出一种基于频谱相关的高精度频率估计算法。根据多段同频正弦信号频谱不同的泄漏程度, 设计加权因子对其加权积累, 以达到减小主瓣宽度, 增大主瓣高度, 抑制频谱泄漏, 增强抗噪性的目的; 通过频谱相关技术

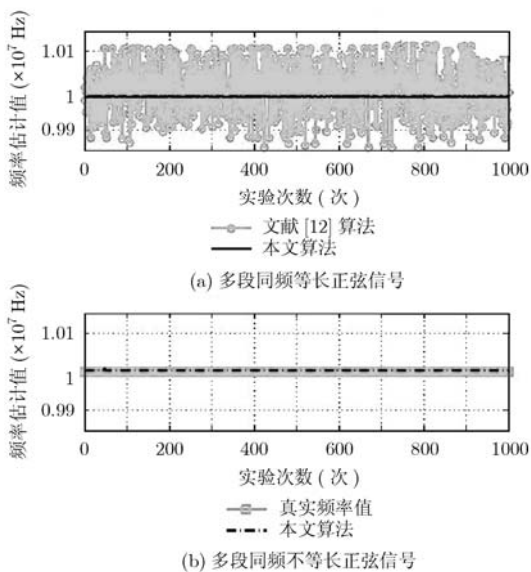


图5 低信噪比条件下算法频率估计结果对比图

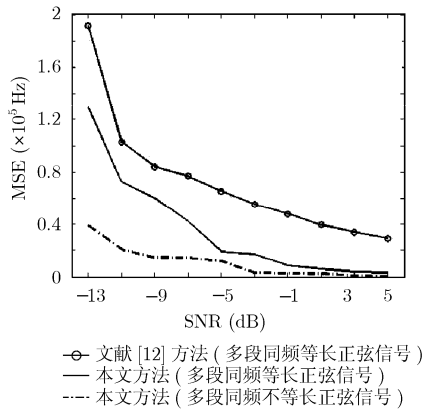


图 6 不同信噪比条件下算法频率估计均方根误差对比图

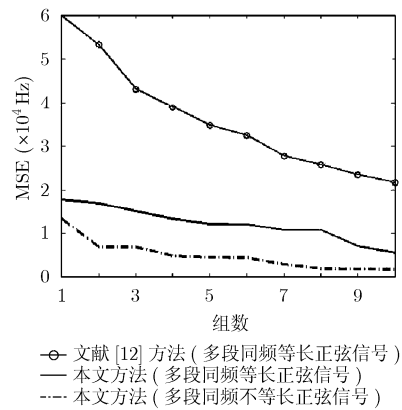


图 7 不同单段信号长度条件下的算法频率估计均方根误差对比图

表 2 多段同频正弦信号中单段信号长度设置表

组数	$[N_{b1}, N_{b2}, N_{b3}, N_{b4}]$	$[N_{b1}, N_{b2}, N_{b3}, N_{b4}]$	组数	$[N_{b1}, N_{b2}, N_{b3}, N_{b4}]$	$[N_{b1}, N_{b2}, N_{b3}, N_{b4}]$
第 1 组	50, 50, 50, 50	5, 10, 90, 95	第 6 组	75, 75, 75, 75	30, 35, 115, 120
第 2 组	55, 55, 55, 55	10, 15, 95, 100	第 7 组	80, 80, 80, 80	35, 40, 120, 125
第 3 组	60, 60, 60, 60	15, 20, 100, 105	第 8 组	85, 85, 85, 85	40, 45, 125, 130
第 4 组	65, 65, 65, 65	20, 25, 105, 110	第 9 组	90, 90, 90, 90	45, 50, 130, 135
第 5 组	70, 70, 70, 70	25, 30, 110, 115	第 10 组	95, 95, 95, 95	50, 55, 135, 140

对多段同频正弦信号的最优加权积累频谱和累加频谱进行相关处理，在有效继承最优加权积累频谱主瓣窄而高特性的基础上，充分利用累加频谱的噪声对消特性，抑制虚假谱峰和噪声干扰，大幅度提高频谱分析精度。本文算法能够弥补现有方法不能估计多段同频不等长正弦信号的不足，极大拓展频率估计的多段信号融合法的适用范围。研究表明有如下结论：

(1)算法精度较高。在  $SNR = -5$  dB 的低信噪比条件下，本文算法估计多段同频等长正弦信号  $b_1$  频率的 MSE 为 14.13 kHz，较文献[12]算法(其 MSE 为 60.35 kHz)降低约 70.84%；估计多段同频不等长正弦信号  $b_2$  频率的 MSE 为 13.93 kHz，均十分接近与  $b_1$  或  $b_2$  信号长度相等的相位连续正弦信号的克拉美罗下限 13.86 kHz。

(2)算法抗噪性较好。在信噪比为  $-13 \sim 5$  dB 的实验范围内，本文算法估计多段同频不等长正弦信号  $b_2$  频率的 MSE 低于估计多段同频等长正弦信号  $b_1$  频率的 MSE；估计  $b_1$  频率的 MSE 低于文献[12]方法的 MSE。

(3)算法普适性较好。本文算法无需任何额外的辅助条件，适用于多段同频正弦信号(包括多段同频等长正弦信号和多段同频不等长正弦信号)，且估计多段同频不等长正弦信号的性能优于估计相同总长

度的多段同频等长正弦信号，极大拓展频率估计的多段信号融合法的适用范围。同时为低信噪比条件下的正弦信号的频率估计提供一条新思路，即将待估信号分为多段不等长信号，再运用本文算法进行频率估计。

### 参 考 文 献

- [1] Vizireanu D N. A simple and precise real-time four point single sinusoid signals instantaneous frequency estimation method for portable DSP based instrumentation [J]. *Measurement*, 2011, 44(2): 500-502.
- [2] So H C, Chan F K W, and Sun W. Subspace approach for fast and accurate single-tone frequency estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 827-831.
- [3] Adanir T. Extremely Short Term Frequency Estimation (ESTFE) algorithm for underfrequency protection[J]. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2007, 29(4): 329-337.
- [4] Chen K F, Cao X, and Li Y F. Sine wave fitting to short records initialized with the frequency retrieved from hanning windowed FFT spectrum[J]. *Measurement*, 2009, 42(1): 127-135.
- [5] Candan C. A method for fine resolution frequency estimation from three DFT samples[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(6): 351-354.
- [6] 罗丰, 段沛沛, 吴顺君. 基于 Burg 算法的短序列谱估计研究

- [J]. 西安电子科技大学学报, 2010, 32(5): 724-728.
- Luo Feng, Duan Pei-pei, and Wu Shun-jun. Research on short sequence power spectrum estimates based on the Burg algorithm[J]. *Journal of XiDian University*, 2010, 32(5): 724-728.
- [7] Prioakis J G and Manolakis D G. *Digital Signal Processing: Principle, Algorithms, And Application* [M]. New Jersey: Prentice Hall, 2006: 112-114.
- [8] Cataliotti A, Cosentino V, and Nuccio S. A new phase locked loop strategy for power quality instruments synchronization [C]. *Proceedings of the IEEE, Instrumentation and Measurement Technology Conference, Ottawa, Ont, May 16-19, 2005*: 941-946.
- [9] 王欣, 朱齐丹, 孙书利. 带相关噪声的加权观测融合估计算法及其全局最优性[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(10): 2057-2061.
- Wang Xin, Zhu Qi-dan, and Sun Shu-li. Weighted measurement fusion estimation algorithm with correlated noises and its global optimality[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(10): 2057-2061.
- [10] Sills J A and Black Q R. Frequency estimation from short pulses of sinusoidal signals [C]. *IEEE Military Communications Conference, Conference Proceedings, McLean, VA, Oct. 21-24, 1996*, 3: 979-983.
- [11] Becker K. New algorithm for frequency estimation from short coherent pulses of a sinusoidal signal[C]. *IEE Proceedings F Radar and Signal Processing*, 1990, 137(4): 283-288.
- [12] 刘良兵, 涂亚庆, 张海涛. 频率估计的一种多段同频等长信号融合算法[J]. *系统仿真学报*, 2009, 21(1): 194-198.
- Liu Liang-bing, Tu Ya-qing, and Zhang Hai-tao. Fusion algorithm for frequency estimation of multi-section signals with same frequency and length[J]. *Journal of System Simulation*, 2009, 21(1): 194-198.
- [13] 孟建. 分段采样信号的相位关联技术[J]. *系统工程与电子技术*, 2004, 26(12): 1784-1786.
- Meng Jian. Phase association method of multisection sampled data[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(12): 1784-1786.
- 肖 玮: 女, 1982 年生, 博士生, 研究方向为数字信号处理.
- 涂亚庆: 男, 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为仪器仪表与信号处理、智能控制与自动化.
- 刘良兵: 男, 1981 年生, 博士, 讲师, 研究方向为信号处理.
- 莫正军: 男, 1986 年生, 硕士生, 研究方向为数字信号处理.