

一种高性能全分集 LDPC 码的构造方法

郭锐^{*①} 胡方宁^① 刘济林^②

^①(杭州电子科技大学通信工程学院 杭州 310018)

^②(浙江大学信息与电子工程系 杭州 310027)

摘要: 块衰落信道上全分集 LDPC 的构造与性能分析成为近期研究的热点。ML 译码算法下全分集 LDPC 码可以通过设计列满秩的校验子矩阵来实现。然而, 基于 ML 准则的全分集码字, 采用迭代译码算法时, 不能保证全分集。因此, 该文通过设计特定结构的校验矩阵, 实现了在迭代译码算法下能取得全分集的 LDPC 码, 分析了其密度演化过程。在此基础上, 进一步研究了全分集 LDPC 码字结构与性能的关系, 提出了提高全分集 LDPC 码编码增益的方法。仿真结果表明, 该文构造的 LDPC 码不仅能够取得全分集, 并且具有较高的编码增益。

关键词: 低密度奇偶校验码; 块衰落; 全分集; 分集阶数; 编码增益

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)12-2935-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.00483

High Performance Full Diversity LDPC Codes Construction Algorithm

Guo Rui^① Hu Fang-ning^① Liu Ji-lin^②

^①(Communications College of Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

^②(Department of Information Science and Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Full diversity Low Density Parity Check (LDPC) codes construction is the hot spot in LDPC field at present. Traditional construction algorithm designs column full rank check submatrix to realize full diversity LDPC codes under ML decoding algorithm. However, under BP decoding algorithm, the LDPC codes designed based on ML principle can not guarantee full diversity. In this paper, the construction method of full diversity LDPC codes under BP decoding algorithm is first put forward by changing the structure of parity check matrix, then, density propagation process of full diversity LDPC codes is analyzed. Finally, the relationship between the structure of full diversity LDPC codes and the coding gain is researched, and the algorithm to improve coding gain is given. Simulation results show that the proposed algorithm can not only achieve full diversity, but also get better performance than random constructed LDPC codes.

Key words: Low Density Parity Check (LDPC) code; Block-fading; Full diversity; Diversity gain; Coding gain

1 引言

近年来, 块衰落信道上全分集 LDPC 码的研究引起广泛关注^[1-4]。文献[5]从多边形码的角度对全分集 LDPC 码进行了分析, 但它基于 ML 译码准则, ML 译码算法下的全分集 LDPC 码并不能保证在迭代译码算法下取得全分集^[6]。文献[7,8]提出了采用 root-LDPC 码的方法, 解决了在块衰落数目为 2 的信道上, 迭代译码时的全分集问题, 研究了 root-LDPC 码的误字率(Word Error Rate, WER)性能, 但其仅仅分析了块衰落信道数目为 2 的简单情况。

文献[9,10]分别针对 H-ARQ 和 ARQ 信道, 分析了全分集 LDPC 码的构造方法, 但 ARQ 信道不具有—般性。此外, 上述算法对构造的码字在迭代译码算法下的误码性能与码字的关系未加研究。

本文对块衰落信道上全分集 LDPC 码的构造方法以及性能进行了深入分析, 重点研究了采用迭代译码算法时, 任意数目块衰落信道上, 全分集 LDPC 码的构造方法; 推导了全分集 LDPC 的密度演化过程; 分析了全分集 LDPC 码字结构与编码增益的关系, 提出了提高全分集 LDPC 码编码增益的方法。

2 全分集 LDPC 码的构造

在 ML 译码算法下, 可以通过设计列满秩的校验子矩阵来实现^[7]。然而, 由于伪码重量的存在, 在 ML 算法下的全分集 LDPC 码在迭代译码算法下

2011-05-23 收到, 2011-09-01 改回

国家自然科学基金(60972049)和浙江省自然科学基金(Y1100579)资助课题

*通信作者: 郭锐 hbsyrgr@yahoo.com.cn

并不能保证全分集。因此，研究在迭代译码算法下的全分集 LDPC 码具有重要意义。

假设码字长度为 N ，码率为 $1/2$ ，信道块衰落数目 $n_c=2$ ，衰落系数分别记为 α_1 和 α_2 ，则信息比特和奇偶校验比特的长度均为 $N/2$ 。将信息比特分成两部分： $N/4$ bit(记为 $1i$)在 α_1 上传输， $N/4$ bit(记为 $2i$)在 α_2 上传输，奇偶校验比特也分成两部分 $1p$ 和 $2p$ 。图 1 给出了在迭代译码算法下能取得全分集的 LDPC 码 Tanner 图及校验矩阵，称为根校验全分集 LDPC 码。图中 I 为单位矩阵，其余子矩阵随机生成。其中， $1C$ ， $2C$ 为根校验节点， $1C$ 通过度数为 1 的根连接与在 α_1 上传输的信息比特 $1i$ 相连，而与在 α_2 上传输的信息比特 $2i$ ，奇偶校验比特 $2p$ 则以任意度数连接，其度数由 H_{2i} ， H_{2p} 的列重决定；同样， $2C$ 也按照相应的方式连接。连线上的数字表示连接的度数。

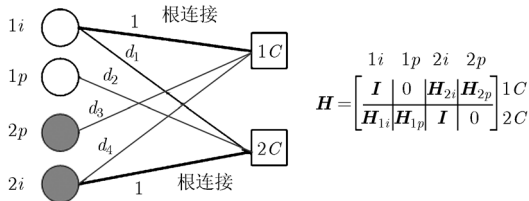


图 1 根校验全分集 LDPC 码的 Tanner 图及其校验矩阵($n_c = 2$)

假设 $A_i^\epsilon, i = 1, \dots, \delta - 1$ 为输入到度数为 δ 的根校验节点 Φ 的 LLR，则根据 LDPC 迭代译码算法，输出似然比为

$$A^\epsilon = 2 \text{th}^{-1} \left(\prod_{i=1}^{\delta-1} \text{th} \left(\frac{A_i^\epsilon}{2} \right) \right) \quad (1)$$

其中 $\text{th}(x)$ 是双曲正切函数， a 和 e 分别表示先验消息和外部消息。由于最小和译码算法是 BP 译码的近似。因此，采用最小和译码算法来简化根校验节点 Φ 输出的消息，

$$A^\epsilon = \min(|A_i^\epsilon|) \prod_{i=1}^{\delta-1} \text{sign}(A_i^\epsilon) \quad (2)$$

假设传输全 0 码字，则块衰落信道 α_j 传给另外块衰落信道的信息 ($j = 1, 2$) 为

$$\psi_j = Q(\sqrt{2\gamma\alpha_j^2}) = Q(\sqrt{2\gamma}\alpha_j) \quad (3)$$

在块衰落信道 α 上传输的先验信息为

$$A_0 = \lg \left(\frac{p(y | \vartheta = 0, \alpha)}{p(y | \vartheta = 1, \alpha)} \right) = \frac{2\alpha y}{\sigma^2} = \frac{2}{\sigma^2} (\alpha^2 + \alpha z) \quad (4)$$

其中 $y = \alpha + z$ ， $z \sim N(0, \sigma^2)$ 。在第 1 次迭代时，式 (2) 中的 A_i^ϵ 都具有式 (4) 形式。对于 $1i$ 中度数为 ξ 信息比特 θ 而言，除了先验消息外，还要接收到来自校验节点的外部消息： $A_j^\epsilon, j = 1, 2, \dots, \epsilon$ 。对于 $n_c = 2$

的块衰落信道而言， $\epsilon \geq 2$ 。 θ 分别与 $1C, 2C$ 连接。因此， θ 的后验信息为

$$A = A_0 + \sum_{j=1}^{\epsilon} A_j^\epsilon \quad (5)$$

用 A_i^ϵ 表示 $1C$ 中与 θ 相连的根校验节点产生的外部信息。 $1i$ 中的错误概率 $P_e(1i)$ 由 A 中的前两项 $A_0 + A_i^\epsilon$ 决定，因此只需考察 $A_0 + A_i^\epsilon$ ，其中 A_i^ϵ 由式 (4) 计算得到。

$$A_i^\epsilon = S_1 \frac{2}{\sigma^2} (\alpha_2^2 + \alpha_2 z_i)$$

其中

$$S_1 = \sum_{i \text{ 为偶数}} \binom{\epsilon-1}{i} \psi_2^i (1-\psi_2)^{\epsilon-1-i} - \sum_{i \text{ 为奇数}} \binom{\epsilon-1}{i} \psi_2^i (1-\psi_2)^{\epsilon-1-i}$$

则接收到的后验消息的前两项为

$$A_0 + A_i^\epsilon = \frac{2}{\sigma^2} (\alpha_1^2 + (1-2\psi_2)^{(\epsilon-1)} \alpha_2^2 + \alpha_1 z_0 + (1-2\psi_2)^{(\epsilon-1)} \alpha_2^2) \quad (6)$$

令 $T = \alpha_1^2 + (1-2\psi_2)^{(\epsilon-1)} \alpha_2^2$ ，其服从四阶 χ^2 分布。当信噪比 $E_b/N_0 \rightarrow \infty$ ， $T \rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ ，由分集阶数的定义可知，其分集阶数为 2，即取得了全分集。

当块分集数目 n_c 大于 2， $R \leq 1/n_c$ 时，将信息比特分成 n_c 部分(记为 $1i, 2i, \dots, n_c i$): $1i$ 在 α_1 上传输， $2i$ 在 α_2 上传输， $\dots, n_c i$ 在 α_{n_c} 上传输。奇偶校验比特也分成 n_c 部分。其中， $1C, 2C, \dots, n_c C$ 为根校验节点， $1C$ 通过度数为 1 的根连接与在 α_1 上传输的信息比特 $1i$ 相连，而与在 α_2 上传输的信息比特 $2i$ ，奇偶校验比特 $2p$ 则以任意度数连接，其度数由 H_{2i} ， H_{2p} 的列重决定；同样， $2C, \dots, n_c C$ 也遵从相应的规律。

3 根校验全分集 LDPC 码的密度演化过程

由 LDPC 码 Tanner 图可知，比特节点的平均度数与校验节点的平均度数表示为

$$\bar{d}_b = 1 / \sum_{i=2}^{d_b} \lambda_i / i, \quad \bar{d}_c = 1 / \sum_{j=2}^{d_c} \rho_j / j \quad (7)$$

其中 d_b 为比特节点的最大度数， d_c 为校验节点的最大度数； λ_i 表示度数为 i 的比特节点所占比例， ρ_j 表示度数为 j 的校验节点所占比例。从节点的角度，归一化的度数分布为

$$\dot{\lambda}(x) = \bar{d}_b \sum_{i=2}^{d_b} \lambda_i / i x^{i-1}, \quad \dot{\rho}(x) = \bar{d}_c \sum_{j=2}^{d_c} \rho_j / j x^{j-1} \quad (8)$$

假设从每个节点中去掉一条边，新的度数分布记为 $\tilde{\lambda}(x)$ ，新的平均度数分布记为 $\bar{d}_b - 1$ ，新的归一化度数系数记为 $\dot{\lambda}(x)/x$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda}(x) &= \frac{\bar{d}_b}{\bar{d}_b - 1} \sum_{i=1}^{d_b-1} i \lambda_{i+1} / (i+1)x^{i-1} \\ \tilde{\rho}(x) &= \frac{\bar{d}_c}{\bar{d}_c - 1} \sum_{j=1}^{d_c-1} j \rho_{j+1} / (j+1)x^{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

以块衰落数目 $n_c = 2$ 为例，如图 2 所示，假设与根校验节点 $2C$ 相连的边的集合为 S_E (除去根连接)， $S_E = S_{1i} \cup S_{1p}$ 。其中 $|S_{1i}|$ 为 $1i$ 与 $2C$ 相连的边的数量， $|S_{1p}|$ 为 $1p$ 与 $2C$ 相连的边的数量。定义 f_e 为 S_E 中 S_{1i} 所占的比例， g_e 为 S_E 中 S_{1p} 所占的比例，则有

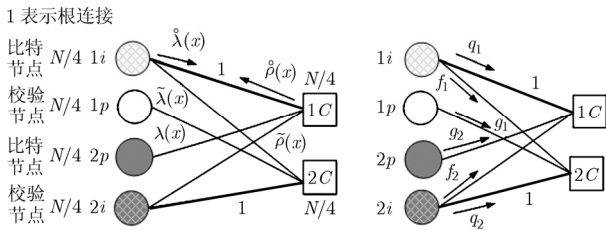


图 2 根校验全分集 LDPC 码 Tanner 以及消息传递 ($n_c = 2$)

$$\left. \begin{aligned} f_e &= \frac{|S_{1i}|}{|S_{1i}| + |S_{1p}|} = \frac{\sum_i (i-1)\lambda_i / i}{\sum_i (i-1)\lambda_i / i + 1} = \frac{\bar{d}_b - 1}{2\bar{d}_b - 1} \\ g_e &= 1 - f_e \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

全分集 LDPC Tanner 图包含 4 种类型的变量 ($1i, 1p, 2i, 2p$)，两种根校验节点 ($1C, 2C$) 和 6 个不同的边。用变量 x_1, x_2, \dots, x_e 分别表示在以下边上迭代的消息： $1i \rightarrow 1C, 2i \rightarrow 2C, 1i \rightarrow 2C, 2i \rightarrow 1C, 1p \rightarrow 2C, 2p \rightarrow 1C$ ， $q_1, q_2, f_1, f_2, g_1, g_2$ 分别为对应节点之间传递的对数似然比 (LLR)。密度演化就是研究 LLR 概率密度在节点之间迭代的过程。

假设 $X_1 \sim p_1(x), X_2 \sim p_2(x)$ 是两个独立的随机变量，其概率密度函数分别为 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ ，则 $X_1 + X_2$ 的概率密度函数为 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 的卷积，记为： $p_1(x) \otimes p_2(x)$ 。 $p(x)^{\otimes n}$ 表示 $p(x)$ 与自己卷积 n 次。从校验节点输出的变量 Y 的概率密度函数 $p(y)$ 记为 $p_1(x) \odot p_2(x)$ ，称为 R 卷积。 $p(x)^{\odot n}$ 表示 $p(x)$ 与自己 R 卷积 n 次。

图 3 为比特节点 $1i$ 局部 Tanner 图，该图详细描述了 $1i$ 向 $1C$ 消息传递的过程。全分集 LDPC 码的密度演化比传统 LDPC 码的密度演化复杂。在 Tanner 图的基础上，采用与传统 LDPC 码类似的密度演化方法，给出全分集 LDPC 的密度演化公式为

$$q_1^{m+1}(x) = \mu_1(x) \otimes \lambda(\rho(q_2^m(x) \odot (f_e f_1^m(x) + g_e g_1^m(x)))) \quad (11)$$

其中 $q_1^{m+1}(x)$ 为第 $m+1$ 次迭代， $1i \rightarrow 1C$ 的信息。同理，可得

$$\left. \begin{aligned} g_1^{m+1}(x) &= \mu_1(x) \otimes \lambda(\rho(q_2^m(x) \odot (f_e f_1^m(x) + g_e g_1^m(x)))) \\ f_1^{m+1}(x) &= \mu_1(x) \otimes \tilde{\lambda}(\rho(q_2^m(x) \odot (f_e f_1^m(x) + g_e g_1^m(x)))) \\ &\quad \otimes \tilde{\rho}(f_e f_1^m(x) + g_e g_1^m(x)) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 $\lambda(p(x))$ 表示 $\sum_i \lambda_i p(x)^{\otimes i-1}$ ， $\rho(p(x))$ 表示 $\sum_i \rho_i p(x)^{\odot i-1}$ 。

当 $n_c > 2$ 时，信息比特 $1i$ 局部 Tanner 图如图 3(b) 所示：Tanner 图包含 $2n_c$ 种类型的变量 ($1i, 1p, 2i, 2p, 3i, 3p, \dots, n_c i, n_c p$)， n_c 种根校验节点 ($1C, 2C, \dots, n_c C$) 和 $n_c(2n_c - 1)$ 条不同的边。用变量 $x_1, x_2, \dots, x_{n_c(2n_c-1)}$ 分别表示在每条边上迭代的消息， q_i, f_{ij}, g_{ij} 分别为对应节点之间传输的对数似然比 (LLR)。其中 q_i 为第 i 个根连接上传输的信息， f_{ij}

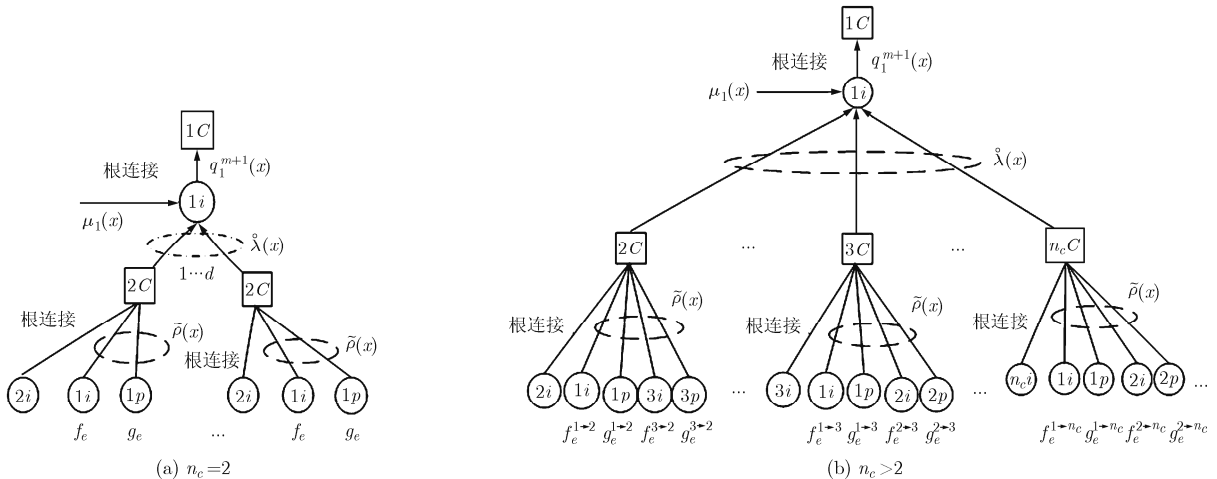


图 3 信息比特 $1i$ 局部 Tanner 图

为信息比特 ii 传递给校验节点 jC 的信息, g_{ij} 为奇偶校验比特 ip 与校验节点 jC 之间传递的信息, 其中: $i \in (1, 2, \dots, n_c), j \in (1, 2, \dots, n_c), i \neq j$ 。图 3(b) 给出了信息比特 $1i$ 的局部 Tanner 图以及 $1i$ 向 $1C$ 传递消息的过程。采用与传统 LDPC 码类似的密度演化方法, 给出全分集 LDPC 的密度演化公式:

$$q_1^{m+1}(x) = \mu_1(x) \otimes \overset{\circ}{\lambda}(\tilde{\rho}(q_2^m(x) \odot (f_e^{1 \rightarrow 2} f_{12}^m(x) + g_e^{1 \rightarrow 2} g_{12}^m(x) + \dots))) \dots \otimes \overset{\circ}{\lambda}(\tilde{\rho}(q_{n_c}^m(x) \odot (f_e^{1 \rightarrow n_c} f_{1n_c}^m(x) + g_e^{1 \rightarrow n_c} g_{1n_c}^m(x) + \dots))) \quad (13)$$

$$g_{12}^{m+1}(x) = \mu_1(x) \otimes \lambda(\tilde{\rho}(q_2^m(x) \odot (f_e^{1 \rightarrow 2} f_{12}^m(x) + g_e^{1 \rightarrow 2} g_{12}^m(x) + \dots))) \dots \otimes \lambda(\tilde{\rho}(q_{n_c}^m(x) \odot (f_e^{1 \rightarrow n_c} f_{1n_c}^m(x) + g_e^{1 \rightarrow n_c} g_{1n_c}^m(x) + \dots))) \quad (14)$$

$$f_{12}^{m+1}(x) = \mu_1(x) \otimes \overset{\circ}{\lambda}(\tilde{\rho}(q_2^m(x) \odot (f_e^{1 \rightarrow 2} f_{12}^m(x) + g_e^{1 \rightarrow 2} g_{12}^m(x) + \dots))) \dots \otimes \overset{\circ}{\lambda}(\tilde{\rho}(q_{n_c}^m(x) \odot (f_e^{1 \rightarrow n_c} f_{1n_c}^m(x) + g_e^{1 \rightarrow n_c} g_{1n_c}^m(x) + \dots))) \otimes \overset{\circ}{\rho}(f_e^{1 \rightarrow 2} f_{12}^m(x) + g_e^{1 \rightarrow 2} g_{12}^m(x) + f_e^{1 \rightarrow 3} f_{13}^m(x) + g_e^{1 \rightarrow 3} g_{13}^m(x) \dots) \quad (15)$$

其中 $f_e^{ij} = \frac{|S_{ii \rightarrow jc}|}{\sum_{i, i \neq j} (|S_{ii \rightarrow jc}| + |S_{ip \rightarrow jc}|)}$, $g_e^{ij} = \frac{|S_{ip \rightarrow jc}|}{\sum_{i, i \neq j} (|S_{ii \rightarrow jc}| + |S_{ip \rightarrow jc}|)}$, $\sum_{j=1, j \neq i}^{n_c} f_e^{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n_c} g_e^{ij} = 1$, 同理可以求出任意 q_i, f_{ij}, g_{ij} 。

4 高编码增益根校验全分集 LDPC 码构造

由式(5)可知, 在 $n_c = 2$ 的块衰落信道上, 第 l 次迭代的对数似然比 Λ_l 表示为

$$\Lambda_l \propto \xi \alpha_1^2 + \zeta \alpha_2^2 \quad (16)$$

即 Λ_l 正比于 $\xi \alpha_1^2 + \zeta \alpha_2^2$, 其中, ξ 为从 $2i \rightarrow 1C$ 的能量系数, ζ 为从 $1i \rightarrow 2C$ 的能量系数, α_1, α_2 为衰落系数。假设 $2i$ 中的信息比特 θ 在传输过程中发生错误, $2i$ 与 δ 个来自 $1C$ 和 $2C$ 校验节点相连。假设 δ 中 ξ 个来自 $1C$ 的校验节点被用来纠正 θ , ξ 被称为能量系数, 显然 ξ 越大, 纠错能力越强。如 $1C$ 中与信息比特 θ 相连的校验节点 Φ 被用来纠正 θ , 则与 Φ 相连的其它节点已知。由图 4 可知, 这些节点从 $2i$ 或 $2p$ 中选取, 这意味着 $2p$ 中的一些奇偶校验比特在若干次迭代后未被全删除(全分集奇偶校验比特)。能量系数和这些未被删除的全分集奇偶校验比特有关, 假设第 m 次迭代时全分集奇偶校验比特所占比例为 p_m 。

奇偶校验比特 $2p$ 的局部 Tanner 图如图 5 所示, $1C$ 的叶子节点随机地从 $2i$ 和 $2p$ 中选取, 其概率分

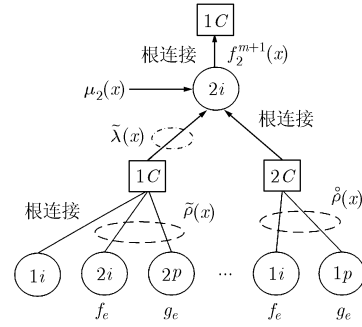


图4 信息比特 $2i$ 局部 Tanner 图

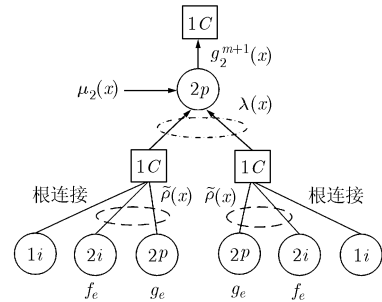


图5 奇偶校验比特 $2p$ 局部 Tanner 图

别为 f_e 和 g_e 。度数为 j 的根校验节点 $1C$ 与叶子节点之间没有奇偶校验比特相连的概率为 f_e^{j-2} , 由密度演化过程可知, 全分集奇偶校验比特所占比例的迭代公式如式(17):

$$p_{m+1} = 1 - \lambda(1 - \tilde{\rho}(f_e + (1 - f_e)p_m)) \quad (17)$$

从 $2i$ 局部 Tanner 图 4 可知, 经过大量的迭代后, 信息比特 $2i$ 全部被正确译码, 信息比特 $1i$ 以及奇偶校验比特 $1p$ 未被全删除, 奇偶校验比特 $2p$ 有 p_∞ 的概率被恢复, $1 - p_\infty$ 的概率被删除。假设信息比特 $2i$ 的度数为 $\delta + 2$, 其中 $0 \leq \delta \leq d_b - 2$ 。因此, 能量系数满足 $1 \leq \xi \leq d_b - 1$ 。考察根校验节点 $1C$, 假设 j 为根校验节点 $1C$ 的度, l 为从奇偶校验比特 $2p$ 输入的 $j - 2$ 个边中已恢复的节点。则度数为 j 的校验节点 $1C$ 产生消息 α_1^2 的概率为

$$\sum_{l=0}^{j-2} \binom{j-2}{l} f_e^{j-2-l} (1 - f_e)^l p_\infty^l = (f_e + (1 - f_e)p_\infty)^{j-2} \quad (18)$$

用 Γ_e 表示 $1C$ 发送给 $2i$ 的消息未被删除的平均概率, 用 $P_\infty(\xi, \delta)$ 表示度数为 $\delta + 2$ 比特节点 $2i$, 能量系数为 ξ 的概率质量函数, 经过通过 $\tilde{\rho}(x)$, $\tilde{\lambda}(x)$ 迭代平均后有

$$P_\infty(\xi) = \left(\frac{\Gamma_e}{1 - T_e} \right)^{\xi-1} \sum_{i=1}^{d_b-1} \binom{i-1}{\xi-1} \tilde{\lambda}(1 - \Gamma_e)^{i-1}, \quad 1 \leq \xi \leq d_b - 1 \quad (19)$$

式(19)给出了能量系数概率取值的下限与 p_∞ 的关系。可以看到 p_∞ 越大, 能量系数越大。因此可

以通过控制 p_∞ ，增加全分集奇偶校验比特的比例来提高系统性能。这里采用和信息比特相同的思想，将图 1 中的奇偶校验比特 $1p$ 进行分裂，分成两部分，分别称为“ $1pi$ ”和“ $1pp$ ”。其中，“ $1pp$ ”又可以进一步分裂成“ $1ppi$ ”和“ $1ppp$ ”。由前面的分析可知：“ $1pi$ ”和“ $1ppi$ ”的部分都获得了全分集。同样， $2p$ 也可以采用同样的方法进行处理。

重复上述分裂过程，使得 a 部分的奇偶校验比特具有 2 阶的根校验，如图 6 所示，称为 2 阶根校验全分集 LDPC 码。显然，第 1 层分裂时， $\alpha = 1/2$ ，第 2 次分裂时， $\alpha = 1/2 + 1/4$ ，第 3 次分裂时， $\alpha = 1/2 + 1/4 + 1/8$ ，因此，随着迭代分裂的增加， $\alpha = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ ，越来越趋近于 1，称为全分集奇偶校验比特。

5 仿真结果与分析

实验中，采用 BPSK 调制，噪声 $z_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = N_0/2$ ，信道的衰落 α_j 服从独立的瑞利分布，译码算法采用 BP 迭代译码算法，最大迭代次数 50 次，图 7-图 11 中码长 $N = 4000$ ，图 12 中码长 $N = 2000$ 。图 7 比较了基于 ML 算法构造的(3,6)全分集 LDPC 码采用 ML 译码，以及迭代译码时的性能，图中还给出了中断概率曲线。可以看到，采用迭代译码时，基于 ML 准则设计的码字性能较差，不能取得全分集。这主要是因为伪码重量的存在，在迭代译码时，基于块的最小伪码重量等于 0，导致迭代译码性能的下降。

图 8 给出了随机构造的(3,6)LDPC 码，规则(3,6)根校验全分集 LDPC 码(记为：root-LDPC)，以及非规则(3,6)根校验全分集 LDPC 的采用 BP 译码的 WER 性能。其中，非规则 LDPC 码的度数分布采用与文献[11]相同的度数分布。从图中可以看出，不论是非规则 root-LDPC 还是规则 root-LDPC 都能取得全分集，非规则 LDPC 码性能要略优于规则

(3,6)码性能。在 WER 为 10^{-4} 时，大概有 0.34 dB 的改善。非规则 root-LDPC 码与中断限之间的间隔为 0.67 dB。

图 9 比较了不同块衰落数目时码字的性能，仿真了块衰落数目分别为 2, 3, 4 的情况，实验中码率 $R=1/4$ ，可以看到，在码字速率与长度一定的情况下，块衰落数目的增加使得码字获得更多的分集增益，这是因为在译码过程中，信息节点和校验节点都从其它的块衰落信道上获得了更多的校验，从而获得更多的分集，并且从图上可以看出不论块衰落数目为 2, 3 还是 4，都能获得全分集。

图 10 和图 11 分别给出了采用本文算法构造的 2 阶全分集 LDPC 码字的性能。分别仿真了 2 阶全分集 LDPC 码 $a = 1/2$ ，以及没有采用 2 阶全分集 LDPC 码字的性能。其中图 10 仿真了 $n_c = 2$ ，图 11 仿真了 $n_c = 3$ 的情况下，采用上述方法构造的(3,6)全分集 LDPC 码。由图可见 2 阶全分集码字获得了一定的编码增益，具有更加优异的性能。这是因为采用了 2 阶全分集技术，增加全分集奇偶校验比特的比例，这些奇偶校验比特在迭代译码过程中向信息节点传递外部信息，增加了能量系数，从而改善了码字性能。

图 12 给出了本文所提算法与文献[9,10]算法的性能比较，实验中采用 BPSK 调制，码长 $N = 2000$ ，BP 译码的最大迭代译码次数 50 次。首先，比较了本文所提的算法在 $n_c = 2$ 时的性能与文献[9]中采用 CPC 的 H-ARQ 性能，可以看到，无论是本文所提算法还是文献[9]所提算法都能取得全分集，由于基于 CPC 的 H-ARQ 在重传过程中增加了更多的冗余信息，性能优于本文构造的根校验全分集 LDPC 码，但要稍逊于本文提出的 2 阶根校验 LDPC 码($a = 3/4$)，但是 ARQ 会导致传输延时增加。其次，比较了本文所提的算法在($n_c = 4, R = 1/4$)情况下的

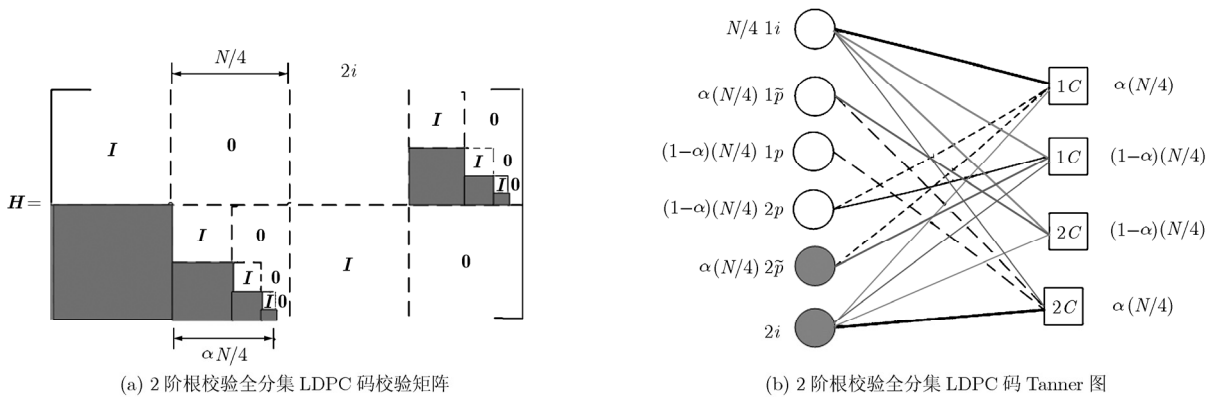


图 6 2 阶根校验全分集 LDPC 码校验矩阵及结构示意图

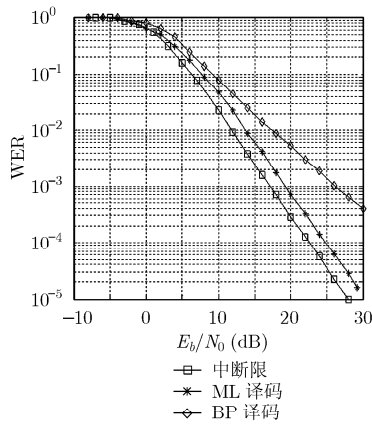


图 7 基于 ML 的全分集, LDPC 码在 ML, BP 译码算法下性能比较

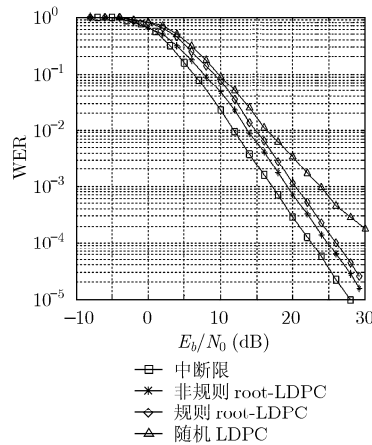


图 8 不同码字性能比较 ($n_c = 2$)

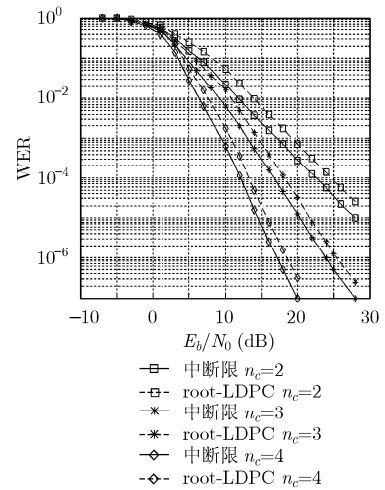


图 9 不同块衰落数目码字性能分析

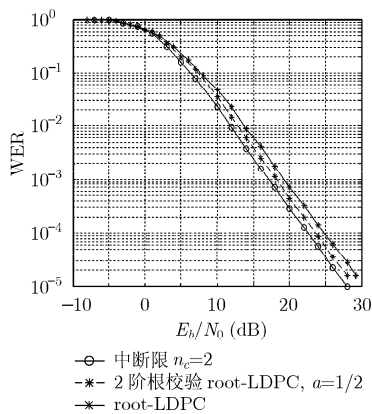


图 10 2 阶根校验全分集 LDPC 性能比较 ($n_c = 2$)

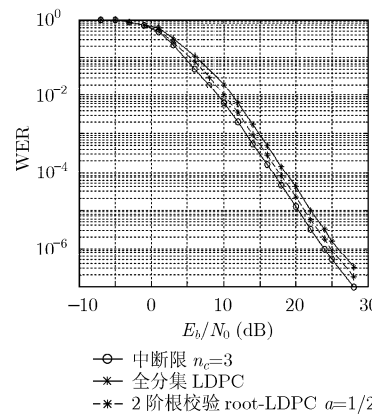


图 11 2 阶根校验全分集 LDPC 性能 ($n_c = 3$)

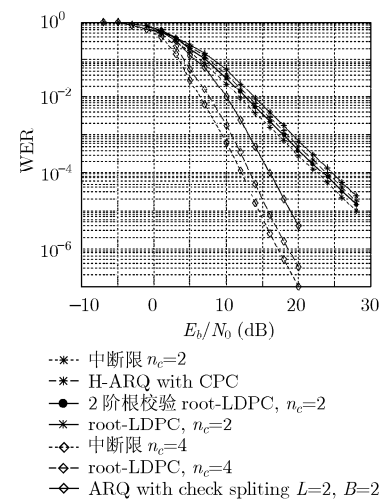


图 12 本文构造码字与文献码字性能比较

性能与文献[10]中采用校验分割的码字在块衰落数目为 2, 重传次数为 2(即 $L = 2, B = 2, R1 = 1/2$) 下的性能, 可以看到两者都能取得全分集, 分集阶数均为 4。但是由于文献[10]算法在重传过程中, 只是简单的重复编码, 并没有带来编码增益, 因此, 本文算法的性能优于文献[10]中的码字性能。

参 考 文 献

[1] Boutros J J, Fabregas A G, Biglieri E, et al. Design and analysis of low-density parity-check codes on block-fading channels. *IEEE Information Theory and Applications Workshop*, San Diego, USA, Feb. 2007: 211-215.
 [2] Li Jun, Yuan Jin hong, Azmi M H, et al. Novel LDPC code structures for the nonergodic block-fading channels. *6th IEEE International Symposium on Turbo Codes & Iterative Information Processing*, Brest, France, Sep. 2010: 209-214.

[3] Li Yue-qian and Salehi M. Quasi-cyclic LDPC code design for block-fading channels. *44th IEEE Annual Conference on Information Sciences and Systems*, Princeton, USA, March 2010: 1-5.
 [4] Andriyanova I, Biglieri E, and Boutros J J. Outage thresholds of LDPC codes over nonergodic block-fading channels. *European Wireless Conference*, Lucca, Italy, April 2010: 1011-1014.
 [5] Richardson T and Urbanke R. Multi-edge type LDPC codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(10): 4113-4127.
 [6] Kelley C A and Sridhara D. Pseudocodewords of Tanner graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(11): 4013-4038.
 [7] Boutros J J, Fabregas A G, Biglieri E, et al. Low-density parity-check codes for nonergodic block-fading channels.

- IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(9): 4286–4295.
- [8] Andriyanova I, Boutros J J, and Biglieri E. Block-error performance of root-LDPC codes. International Zurich Seminar on Communications Proceedings, Zurich, Switzerland, March, 2010: 94–97.
- [9] Duyck D, Capirone D, and Hausl C. Design of diversity-achieving LDPC codes for H-ARQ with cross-packet channel coding. 21th IEEE Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, Istanbul, Turkey, Sep. 2010: 211–217.
- [10] Kambhampati S, Lechner G, Chan T, *et al.*. Check splitting of root-check LDPC codes over ARQ block-fading channels, Australian Communications Theory Workshop, Canberra, Australia, Feb. 2010: 21–27.
- [11] Chen Jin-lu and Fosserier M P C. Decoding Low-Density Parity-Check codes with normalized APP-based algorithm. IEEE Global Telecommunications Conference, San Antonio, USA, Nov. 2001: 1026–1030.
- 郭 锐: 男, 1980 年生, 博士, 讲师, 研究方向为无线通信、信道编码.
- 胡方宁: 女, 1976 年生, 博士后, 讲师, 研究方向为无线通信、信道编码.
- 刘济林: 男, 1947 年生, 博士生导师, 教授, 研究方向为信号处理、数据融合.