基于子集划分的素长度二维 DCT 快速算法

孙吉利*　　田　茂
(中国科学院电子学研究所　北京　100190)

摘　要：该文针对素长度类型的 2 维离散余弦变换(DCT)变换，提出一种子集划分准则，并根据该准则将 2 维 DCT 变换输出的频域数据集合划分为若干个互不相交子集；将对频域的计算转换为对 $2(N-1)$ 个 N 点 1 维素数尺寸 DCT 的奇系数或偶系数的计算；最后给出了该算法的乘法复杂度和加法运算复杂度。相对于行列分解法，该算法节省了约一半的乘法次数，省略了数据的转置存储过程，而加法的运算复杂度基本维持不变。

关键词：信号处理；2 维离散余弦变换；素长度；子集划分；行列分解法

中图分类号：TN911.72　　**文献标识码**：　A　　**文章编号**：1009-5896(2011)07-1606-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.01220

A New Fast Prime-length 2-D DCT Algorithm Based on Subset Partition

Sun Ji-li　　Tian Mao
(*Institute of Electronics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100190, *China*)

Abstract: A new fast algorithm based on subset partition for prime-length 2D Discrete Cosine Transform (DCT) is proposed. The rule of subset partition is put forward, and the frequency data of DCT output are separated into several irrelevant subsets according it. The calculation of frequency data is converted to $2(N-1)$ calculations of even- or odd-indexed N-length 1D-DCT coefficient. The computational complexity of the algorithm is presented. Compared to Roll and Column Method (RCM), this new fast algorithm reduces half of multiplication times, eliminates transposition of data, and retains computational complexity of addition.

Key words: Signal processing; 2-D Discrete Cosine Transform (DCT); Prime-length; Subset partition; Roll and Column Method (RCM)

1　引言

1974 年由 Ahmed 等人[1]提出的离散余弦变换(DCT)作为次最优正交变换，在数字图像数据压缩编码技术中，其压缩效果接近理想的 KLT 变换，目前 DCT, IDCT 广泛应用于信号处理和图像处理领域。

2 维 DCT 的快速算法主要有两种：行列分解法(RCM)及非行列分解法(NRCM)。RCM 方法是将 $N\times N$ 的数据按行(或列)方向进行 N 个 1 维 DCT 计算，产生中间矩阵，然后转置再进行 N 个 1 维 DCT 计算，最后得到 2 维 DCT 结果。非行列分解法(NRCM)也就是直接分解法，典型的直接分解法是 2 维矢量基 DCT 算法，2-D 矢量基 DCT 算法主要有 Lee[2]算法和 Hou[3] 算法。对于较长长度的 DCT, Hou 算法较 Lee 算法性能优越。目前最有效的 2 维 DCT 直接分解算法主要有森川良孝算法与文献[4]算法，这两种算法都将乘法运算量减至传统行列分解法的 50%。近几年，AIQ 算法[5−7]因不需要乘法器也受到了人们的重视，但是这类算法都是基于 1 维 DCT 变换上发展的，转置存储机制制约了这类算法的性能[8−10]。

当前的 DCT 快速算法大部分为长度为 2^n 的情况。而实际应用中 DCT 的长度往往是任意的，当 2 维 DCT 变换长度为素数时，森川良孝算法与 Cho 算法不再适用。目前素数长度 DCT 的快速算法研究[11,12]仍然局限于 1 维 DCT 变换。

本文提出了一种基于子集划分的素数尺寸 2 维 DCT 快速算法。按照子集划分准则，把 2 维 DCT 变换输出的非零频域集合划分为 $2(N\text{-}1)$个子集。每个子集的分量对应于一个 $N\text{-}1$ 点 1 维素数尺寸 DCT 的奇系数或偶系数的计算。该快速算法使得乘法运算量减至传统行列分解法的 50%，而加法运算维持原有传统行列分解法的规模，并且不需要转置存储。

2　基于子集分解的快速算法

2 维 $M\times N$ 点 DCT 定义为

2010-11-08 收到，2011-03-07 改回
*通信作者：孙吉利　sun9721@sohu.com

$$X(k,l)=\frac{2c(k)c(l)}{\sqrt{MN}}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}x(m,n)\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2M}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{(2n+1)l\pi}{2N}\right\},$$
$$k=0,1,\cdots,M-1,\ l=0,1,\cdots,N-1 \tag{1}$$

设 $M=N=q$,q 为奇素数，并忽略常数因子，式(1)可转化为

$$\begin{aligned}X(k,l)&=\sum_{m=0}^{q-1}\sum_{n=0}^{q-1}x(m,n)\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2q}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{(2n+1)l\pi}{2q}\right\}=\sum_{m=0}^{\frac{q-1}{2}-1}\sum_{n=0}^{\frac{q-1}{2}-1}\Big[x(m,n)+(-1)^k\\&\cdot x(q-1-m,n)+(-1)^l x(m,q-1-n)\\&+(-1)^{k+l}x(q-1-m,q-1-n)\Big]\\&\cdot\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2q}\right\}\cos\left\{\frac{(2n+1)l\pi}{2q}\right\}\\&-x\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\cos\left\{\frac{l\pi}{2}\right\}\cos\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}\\&+\sum_{n=0}^{q-1}x\left(\frac{q-1}{2},n\right)\cos\frac{k\pi}{2}\cos\frac{(2n+1)l\pi}{2q}\\&+\sum_{m=0}^{q-1}x\left(m,\frac{q-1}{2}\right)\cos\left\{\frac{l\pi}{2}\right\}\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2q}\right\}\end{aligned}\tag{2}$$

令

$$\begin{aligned}y(m,n)=&\Big[x(m,n)+(-1)^k x(q-1-m,n)+(-1)^l\\&\cdot x(m,q-1-n)+(-1)^{k+l}x(q-1-m,\\&q-1-n)\Big]\end{aligned}$$

$$A(k,l)=\sum_{m=0}^{\frac{q-1}{2}-1}\sum_{n=0}^{\frac{q-1}{2}-1}y(m,n)\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2q}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{(2n+1)l\pi}{2q}\right\}\tag{3}$$

$$B(k,l)=\sum_{m=0}^{q-1}x\left(m,\frac{q-1}{2}\right)\cos\left\{\frac{l\pi}{2}\right\}\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2q}\right\}\tag{4}$$

$$C(k,l)=\sum_{n=0}^{q-1}x\left(\frac{q-1}{2},n\right)\cos\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}\cos\left\{\frac{(2n+1)l\pi}{2q}\right\}\tag{5}$$

则

$$\begin{aligned}X(k,l)=&A(k,l)+B(k,l)+C(k,l)\\&-x\left(\frac{q-1}{2},\frac{q-1}{2}\right)\cos\frac{k\pi}{2}\cos\frac{l\pi}{2}\end{aligned}\tag{6}$$

从而频域输出 $X(k,l)$ 被分解为 3 个交流分量和 1 个直流分量之和，下面分别计算交流分量 $A(k,l)$, $B(k,l)$, $C(k,l)$。

2.1 $A(k,l)$的计算

由

$$\begin{aligned}A(k,l)=&\sum_{m=0}^{\frac{q-1}{2}-1}\sum_{n=0}^{\frac{q-1}{2}-1}y(m,n)\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2q}\right\}\\&\cdot\cos\left\{\frac{(2n+1)l\pi}{2q}\right\}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\frac{q-1}{2}-1}\sum_{n=0}^{\frac{q-1}{2}-1}y(m,n)\\&\cdot\left[\cos\left(\frac{(2m+1)k+(2n+1)l}{2q}\pi\right)\right.\\&\left.+\cos\left(\frac{(2m+1)k-(2n+1)l}{2q}\pi\right)\right]\end{aligned}\tag{7}$$

若 k=0，则

$$A(0,l)=\sum_{n=0}^{\frac{q-1}{2}-1}\left[\sum_{m=0}^{\frac{q-1}{2}-1}y(m,n)\right]\cos\left\{\frac{(2n+1)l\pi}{2q}\right\}\tag{8}$$

若 l=0，则

$$A(k,0)=\sum_{m=0}^{\frac{q-1}{2}-1}\left[\sum_{n=0}^{\frac{q-1}{2}-1}y(m,n)\right]\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2q}\right\}\tag{9}$$

式(8)和式(9)为一个 1 维素长度 DCT，我们可以用文献[11]中的方法来计算。

对于任意非零整数 k，定义

$$f(k)=\begin{cases}k \bmod 2N, & \left(k \bmod 2N\right)<N\\ 2N-\left(k \bmod 2N\right), & \left(k \bmod 2N\right)\ge N\end{cases}$$

称 $f(k)$为 k 在 $2N$ 下的绝对值模，记为 $f(k)$=amod(k, $2N$)。

若 $k\neq 0,l\neq 0$，设

$$\text{amod}\left((2m+1)k+(2n+1)l,2q\right)=t,\quad 0\le t<q\tag{10}$$

$$\text{amod}\left((2m+1)k-(2n+1)l,2q\right)=t,\quad 0\le t<q\tag{11}$$

根据线性同余方程理论[13]，同余方程

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b\equiv 0\,(\bmod m)\tag{12}$$

有解$(x_1,\cdots,x_n)$之充分必要条件为$(a_1,\cdots,a_n,m)|b$。若此条件适合，则其解的个数(模 m 不同余)为m^{n-1} $(a_1,\cdots,a_n,m)$。

若

$$\bmod(t-(k\pm l),2)=0$$

因 $0<k$, $l<q$，式(10)，式(11)可转化为

$$km+ln+\frac{(k+l-t)}{2}\equiv 0\,(\bmod q)\tag{13}$$

$$km-ln+\frac{(k-l-t)}{2}\equiv 0\,(\bmod q)\tag{14}$$

因$(k,l,q)=1$，由前述线性同余方程理论可知，同余方程式(13)有 q 个解；同余方程式(14)有 q 个解。设这 $2q$ 个解为

$$\left\{(m_1,n_1,t),(m_2,n_2,t),\cdots,(m_{2q},n_{2q},t)\right\}$$

令

$$s(m_i,n_i,t)=\begin{cases}1, & \mathrm{mod}\left((2m_i+1)k+(2n_i+1)l),2q\right)<q\\ -1, & \mathrm{mod}\left((2m_i+1)k+(2n_i+1)l),2q\right)\ge q\end{cases}$$

则余弦因子 $\cos(t\pi/2q)$ 所对应的系数为

$$\mathrm{Sum}(t,k,l)=\sum_{i=1}^{2q}\left(s(m_i,n_i,t)x(m_i,n_i)\right) \tag{15}$$

称 $\mathrm{Sum}(t,k,l)$ 为分集系数。

由 k,l 的奇偶性可知：若 $\mathrm{mod}(k\pm l,2)=0$ 则

$$A(k,l)=\sum_{t=0}^{\frac{q-1}{2}}\mathrm{Sum}(t,k,l)\cos\left\{\frac{t\pi}{q}\right\} \tag{16}$$

若 $\mathrm{mod}(k\pm l,2)=1$ 则

$$A(k,l)=\sum_{t=0}^{\frac{q-3}{2}}\mathrm{Sum}(t,k,l)\cos\left\{\frac{(2t+1)\pi}{2q}\right\} \tag{17}$$

由式(16)和式(17)得

$$A(1,2v+1)=\sum_{t=0}^{\frac{q-1}{2}}\mathrm{Sum}(t,1,2v+1)\cos\left\{\frac{t\pi}{q}\right\},\quad 0\le v<(q-1)/2 \tag{18a}$$

$$A(2u,2v)=\sum_{t=0}^{\frac{q-1}{2}}\mathrm{Sum}(t,2u,2v)\cos\left\{\frac{t\pi}{q}\right\},\quad 0\le u<(q-1)/2,\ 0\le v<(q-1)/2 \tag{18b}$$

$$A(1,2v)=\sum_{t=0}^{\frac{q-3}{2}}\mathrm{Sum}(t,1,2v)\cos\left\{\frac{(2t+1)\pi}{2q}\right\},\quad 0\le v<(q-1)/2 \tag{18c}$$

$$A(2u,1)=\sum_{t=0}^{\frac{q-3}{2}}\mathrm{Sum}(t,2u,1)\cos\left\{\frac{(2t+1)\pi}{2q}\right\},\quad 0\le u<(q-1)/2 \tag{18d}$$

令

$$\mathrm{Sgn}(x)=\begin{cases}1, & \mathrm{mod}\,(x,2q)<q\\ -1, & \mathrm{mod}\,(x,2q)\ge q\end{cases}$$

可以得到

$$\begin{aligned}&A(2u+1,\mathrm{amod}\left((2u+1)(2v+1),2q\right))\\ &=\mathrm{Sgn}\left((2u+1)(2v+1)\right)\sum_{t=0}^{\frac{q-3}{2}}\mathrm{Sum}(t,1,2v{+}1)\\ &\quad\cdot\cos\left\{\frac{(2u+1)t\pi}{q}\right\},\\ &\quad 0\le u<(q-1)/2,\ 0\le v<(q-1)/2\end{aligned} \tag{19a}$$

$$\begin{aligned}&A\left(\mathrm{amod}\left((2r+1)2u,2q\right),\mathrm{amod}\left((2r+1)2v,2q\right)\right)\\ &=\mathrm{Sgn}(2u(2r+1))\cdot\mathrm{Sgn}(2v(2r+1))\\ &\quad\cdot\sum_{t=0}^{\frac{q-1}{2}}\mathrm{Sum}(t,2u,2v)\cos\left\{\frac{(2r+1)t\pi}{q}\right\},\\ &\quad 0\le u\le\frac{q-1}{2},0\le v\le\frac{q-1}{2},0\le r\le\frac{q-3}{2}\end{aligned} \tag{19b}$$

$$\begin{aligned}&A\left(2u+1,\mathrm{amod}\left(2v(2u{+}1),2q\right)\right)=\mathrm{Sgn}(2v(2u{+}1))\\ &\quad\cdot\sum_{t=0}^{\frac{q-3}{2}}\mathrm{Sum}(t,1,2v)\cos\left\{\frac{(2t+1)(2u+1)\pi}{2q}\right\},\\ &\quad 0\le u<\frac{q-1}{2},\quad 0\le v\le\frac{q-1}{2}\end{aligned} \tag{19c}$$

$$\begin{aligned}&A(\mathrm{amod}\left(2u(2v{+}1),2q\right),2v+1)=\mathrm{Sgn}(2u(2v{+}1))\\ &\quad\cdot\sum_{t=0}^{\frac{q-3}{2}}\mathrm{Sum}(t,2u,1)\cos\left\{\frac{(2t+1)(2v+1)\pi}{2q}\right\},\\ &\quad 0\le u\le\frac{q-1}{2},\quad 0\le v<\frac{q-1}{2}\end{aligned} \tag{19d}$$

观察式(19a)，式(19b)，我们发现它们与素数长度 1 维 DCT 快速算法中偶下标系数的形式相同，我们可以把它们转化为素数长度 1 维 DCT 快速算法中偶下标系数的求解[11]。

观察式(19c)，式(19d)，我们发现它们与素长度 1 维 DCT 快速算法中奇下标系数的形式相同，同样可以把它们转化为素长度 1 维 DCT 快速算法中奇下标系数的求解[11]。

2.2 B (k, l)的计算

若 l=2u + 1，则 $B(k, 2u+1)$=0。

若 l=2u，则由式(4)

$$B(k,2u)=(-1)^u\sum_{m=0}^{q-1}x\left(m,\frac{q-1}{2}\right)\cos\left\{\frac{(2m+1)k\pi}{2q}\right\} \tag{20}$$

这是素数长度 1 维 DCT 变换形式，我们可以用素数长度 1 维 DCT 变换的计算方法来求解[11]。

2.3 C (k, l)的计算

若 k=2v+1，则 $C(2v+1,l)$=0。

若 k=2v，则由式(5)

$$C(2v,l)=(-1)^v\sum_{n=0}^{q-1}x\left(\frac{q-1}{2},n\right)\cos\left\{\frac{(2n+1)l\pi}{2q}\right\} \tag{21}$$

这是素长度 1 维 DCT 变换形式，我们可以用素数长度 1 维 DCT 变换的计算方法来求解[11]。

2.4 X (k, l)集合划分

由式(18)和式(19)可知，部分频域输出计算过程中的分集系数 $\mathrm{Sum}(t,k,l)$ 相同，因此可以按照分集系数 $\mathrm{Sum}(t,k,l)$ 相同的准则划分集合 $X(k,l)$ 。令集合

$$E(k,l)=\{(\mathrm{amod}(2r+1)k,2q),(\mathrm{amod}(2r+1)l,2q),\ 0\le r<(q-1)/2,0<k<q,0<l<q\} \quad (22)$$

由奇偶性可知

$$\mathrm{amod}\big((2r_1+1)(2u_1+1),2q\big)\ne \mathrm{amod}\big((2r_2+1)2u_2,2q\big),\ r_1\ne r_2,$$
$$0\le r_1,\ r_2<\frac{q-1}{2},\ 0\le u_1<\frac{q-1}{2},\ 0<u_2\le\frac{q-1}{2}$$

故

$$E(2u_1+1,l_1)\bigcap E(2u_2,l_2)=\phi,\ 0\le u_1<\frac{q-1}{2},\ 0<u_2\le\frac{q-1}{2},\ 0<l_1,\ l_2<q \quad (23)$$

考虑方程组

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{amod}\big((2r_1+1)\cdot k,2q\big)=\mathrm{amod}\big((2r_2+1)k,2q\big)\\ \mathrm{amod}\big((2r_1+1)\cdot l_1,2q\big)=\mathrm{amod}\big((2r_2+1)l_2,2q\big)\end{aligned}\right\},$$
$$0\le r_1,\ r_2<\frac{q-1}{2},\ 0\le k,l_1,l_2<q$$

由于 q 为奇素数，方程组有解的条件为

$$r_1=r_2,\quad l_1=l_2$$

故

$$E(k,l_1)\bigcap E(k,l_2)=\phi,\ l_1\ne l_2,\ 0<k,l_1,\ l_2<q \quad (24)$$

设 $r_1\ne r_2$, $0<k<q$, $0<l<q$，因 q 为奇素数，可知

$$\mathrm{amod}\big((2r_1+1)k,2q\big)-\mathrm{amod}\big((2r_2+1)k,2q\big)=\mathrm{amod}\big(2(r_1-r_2)k,2q\big)\ne 0$$
$$\mathrm{amod}\big((2r_1+1)l,2q\big)-\mathrm{amod}\big((2r_2+1)l,2q\big)=\mathrm{amod}\big(2(r_1-r_2)l,2q\big)\ne 0$$

可知每个 $E(k,l)$ 中有 $(q-1)/2$ 个元素，且 X 中互不相交的 $E(k,l)$ 子集的个数为

$$R(E(k,l))=\frac{q^2-2q+1}{(q-1)/2}=2(q-1)$$

结合式(23)和式(24)可得 X 与 $E(k,l)$的关系。

$$X=\{E(k_1,l),0<l<q\}\bigcup\{E(k_2,l),0<l<q\}\bigcup\{X(0,l),0\le l<q\}\bigcup\{X(k,0),0<k<q\} \quad (25)$$
$$k_1=2u_{1+1},\ 0\le u_1<\frac{q-1}{2},\ k_2=2u_2,\ 0<u_2\le\frac{q-1}{2}$$

以 7×7 点 DCT 为例，根据分集系数 $\mathrm{Sum}(t,k,l)$ 相同的元素放在同一子集的准则，我们划分出的子集如下。

$\{X(1,1),X(3,3),X(5,5)\},\{X(1,2),X(3,6),X(5,4)\},$
$\{X(1,3),X(3,5),X(5,1)\},\{X(1,4),X(3,2),X(5,6)\},$
$\{X(1,5),X(3,1),X(5,3)\},\{X(1,6),X(3,4),X(5,2)\},$
$\{X(2,1),X(6,3),X(4,5)\},\{X(2,2),X(6,6),X(4,4)\},$
$\{X(2,3),X(4,1),X(6,5)\},\{X(2,4),X(6,2),X(4,6)\},$
$\{X(2,5),X(6,1),X(4,3)\},\{X(2,6),X(4,2),X(6,4)\},$
$\{X(0,0),X(0,1),X(0,2),X(0,3),X(0,4),X(0,5),X(0,6)\},$
$\{X(1,0),X(2,0),X(3,0),X(4,0),X(5,0),X(6,0)\}$。

3　基于子集划分快速算法的计算复杂性

如果以 $\mu_m(N)$ 表示 N 点 DCT 的乘法复杂性，以 $\mu_a(N)$ 表示 N 点 DCT 的加法复杂性，以 $\mu_m(A)$ 表示计算 $A(k,l)$的乘法复杂性，以 $\mu_a(A)$ 表示计算 $A(k,l)$ 的加法复杂性，以 $\mu_m(B)$ 表示计算 $B(k,l)$的乘法复杂性，以 $\mu_a(B)$ 表示计算 $B(k,l)$ 的加法复杂性，以 $\mu_m(C)$ 表示计算 $C(k,l)$的乘法复杂性，以 $\mu_a(C)$ 表示计算 $C(k,l)$的加法复杂性，以 $\mu_m(q\times q)$ 表示计算 $q\times q$ DCT 的乘法复杂性，以 $\mu_a(q\times q)$ 表示计算 $q\times q$ DCT 的加法复杂性，那么，我们得到 $q\times q$ DCT 的计算复杂度为

$$\mu_m(q\times q)=\mu_m(A)+\mu_m(B)+\mu_m(C) \quad (26a)$$
$$\mu_a(q\times q)=\mu_a(A)+\mu_a(B)+\mu_a(C)+\frac{(q-1)^2}{4}+2q^2 \quad (26b)$$

下面分别求解 $A(k,l)$,$B(k,l)$,$C(k,l)$的计算复杂性。

(1) $A(k,l)$的计算复杂性

$$\mu_m(A)=\mu_m(A(0,l))+\mu_m(A(k,0))+\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\mu_m(A(k,l))=\mu_m(A(0,l))+\mu_m(A(k,0))+\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\mu_m(A(k,l))=\mu_m(q)+\mu_m(q)+(q-1)\mu_m(q)=(q+1)\mu_m(q) \quad (27a)$$

$$\mu_a(A)=\mu_a(A(0,l))+\mu_a(A(k,0))+\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\mu_a(A(k,l))=\mu_a(A(0,l))+\mu_a(A(k,0))+\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\mu_a(B(k,l))+2q\frac{q-1}{2}2(q-1)=\mu_a(q)+\mu_a(q)+(q-1)\mu_a(q)+2q\frac{q-1}{2}2(q-1)=(q+1)\mu_a(q)+2q(q-1)^2 \quad (27b)$$

(2) $B(k,l)$的计算复杂性

$$\mu_m(B)=\mu_m(q) \quad (28a)$$
$$\mu_a(B)=\mu_a(q) \quad (28b)$$

(3) $C(k,l)$的计算复杂性

$$\mu_m(C)=\mu_m(q) \quad (29a)$$
$$\mu_a(C)=\mu_a(q) \quad (29b)$$

结合式(19)-式(22)，我们可求得 $q\times q$ DCT 的计算复杂度

$$\begin{aligned}\mu_m(q\times q) &= (q+1)\mu_m(q)+\mu_m(q)+\mu_m(q)\\ &= (q+3)\mu_m(q)\end{aligned} \tag{30a}$$

$$\begin{aligned}\mu_a(q\times q) &= \mu_a(A)+\mu_a(B)+\mu_a(C)+\frac{(q-1)^2}{4}+2q^2\\ &= (q+1)\mu_a(q)+2q(q-1)^2\\ &\quad +\mu_a(q)+\mu_a(q)+\frac{(q-1)^2}{4}+2q^2\\ &= (q+3)\mu_a(q)+(2q+1/4)(q-1)^2+2q^2\end{aligned} \tag{30b}$$

表 1 为子集划分快速算法与行列法的计算复杂性比较，从表中可以看出，相对于常规的行列法，该算法的乘法次数减少了约一半，加法次数也基本持平。

表 1 计算复杂性比较

乘法		加法	
行列法	子集划分快速算法	行列法	子集划分快速算法
$2q\mu_m(q)$	$(q+3)\mu_m(q)$	$2q\mu_a(q)$	$(q+3)\mu_a(q)+(2q+1/4)\cdot(q-1)^2+2q^2$

4 结论

本文通过 2 维 DCT 变换的直接分解方法，推导出了基于子集划分的素数尺寸 2 维 DCT 新快速算法。通过该快速算法，我们把 2 维 DCT 变换转换为 1 维 DCT 变换。该算法的实现过程包括两个部分：分集系数 $\mathrm{Sum}(t,k,l)$ 计算和 1 维素长度 DCT 变换。该快速算法把文献[4]算法从 2^n 长度 2 维 DCT 扩展到素长度 2 维 DCT，具有良好的软硬件实现性。该快速算法还可以推广到高维素长度 DCT 和 2^n 长度 DCT 中，具有良好的应用前景和推广价值。

参 考 文 献

[1] Ahmed N, Natarajan T, and Rao K R. Discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Computers*, 1974, 23(1): 90–93.

[2] Lee B G. A new algorithm to compute the discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, 1984, ASSP-32(6): 1341–1344.

[3] Hou H S. A fast recursive algorithm for computing the discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing*, 1987, ASSP-35(10): 1455–1461.

[4] Cho N L and Lee S U. Fast algorithm and implementation of 2-D discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Circuits System*, 1991, 38(3): 297–305.

[5] Meyer-Base U and Taylor F. Optimal algebraic integer implementation with application to complex frequency sampling filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, 2001, 48(11): 1078–1082.

[6] Fu M, Jullien G A, and Miller W C. The application of 2D algebraic integer encoding to a DCT IP Core. Proceedings of the 3rd IEEE International Workshop on System-on-Chip for Real-Time Applications, Calgary, Alberta, Canada, 2003: 66–69.

[7] Lee J, Vijaykrishnan N, Irwin M J, and Radhakrishnan R. Inverse discrete cosine transform architecture exploiting sparseness and symmetry properties. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2004, 14(4): 361–366.

[8] Sung Tze-yun, Shieh Yaw-shih, and Hsin Hsi-chin. An efficient VLSI linear array for DCT/IDCT using subband decomposition algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, ID 185398, 21pages.

[9] Kusuma E D and Widodo T S. FPGA implementation of pipelined 2D-DCT and quantization architecture for JPEG image compression. International Symposium in Information Technology (ITSim), Amman, Jordan, 2010, 1: 1–6.

[10] Guo Bao-Zeng, Niu Li, and Liu Zhi-ming. Implementation of 2-D DCT based on FPGA. Proc. SPIE, 2010, Vol. 7820: 782004.

[11] 殷瑞祥. 一种用循环卷积实现的素长度 DCT 新快速算法. 华南理工大学学报, 2000, 28(12): 137–142.
Yin Rui-xiang. A new fast algorithm for computing prime-length DCT through cyclic convolutions. *Journal of South China University of Technology*, 2000, 28(12): 137–142.

[12] Huang Cheng and Zhu You-lian. Fast algorithm for arbitrary length discrete cosine transform. Fifth International on Conference Natural Computation, Tianjin, 2009, 2: 390–393.

[13] 华罗庚. 数论导引. 北京: 科学出版社, 1979, 第2章.

孙吉利： 男，1980 年生，博士生，研究方向为数字信号处理和可重构计算.

田 茂： 男，1976 年生，博士，研究方向为盲信号处理和快速变换.