

基于约束最小二乘的近空间雷达网定位算法

王燊燊^{*①} 冯金富^① 王方年^② 黄峰^①

^①(空军工程大学工程学院 西安 710038)

^②(桂林空军学院 桂林 541010)

摘要: 该文研究了一种基于归一化约束最小二乘的近空间雷达网定位算法。首先将距离与角度信息的非线性方程转换为线性方程,通过一阶 Taylor 展开分析了噪声对线性方程的影响,然后将定位问题转化为归一化约束总体最小二乘问题,并通过 Lagrange 函数将其转换为无约束的优化问题,根据定位均方误差最小原则选取加权因子得到定位解,最后进行了定位误差分析,仿真结果表明了该算法的有效性。

关键词: 雷达网; 归一化约束最小二乘; 定位精度

中图分类号: TN95

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)07-1655-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.01211

Location Method of Near Space Radar Network Based on Regularized Constrained Total Least Square

Wang Shen-shen^① Feng Jin-fu^① Wang Fang-nian^② Huang Feng^①

^①(Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

^②(Guilin Air Force Academy, Guilin 541010, China)

Abstract: The regularized constrained total least square algorithm for near space radar network is discussed in this paper. Firstly the nonlinear equations about range and angle are transformed into linear equations. The influence of error is analyzed by expanding the true range and angle in a first-order Taylor series. Then the location issue is transformed into a regularized constrained total least square issue. The Lagrange function is used to transform the issue into a non-constrained issue. A proper weight is chosen by the least mean square error rule to obtain the location solution. Location accuracy is analyzed. Simulation results show the effectiveness of the algorithm.

Key words: Radar network; Regularized constrained total least square; Location accuracy

1 引言

目前,隐身飞机主要是针对前下方单基雷达的探测,飞机的上部对雷达波的反射要强得多。近空间飞行器高度高于隐身飞机,部署在近空间的侦察器探测范围广,具备全天候、全天时工作能力;另外,近空间空域具有良好的电磁特性和非常稳定的气象条件。因此,建立近空间平台的双基雷达探测网,可充分地利用隐身飞机的前向、侧向、上下反射的隐身缺陷(其雷达散射截面随视角的变化可达 20~30 dB^[1]),通过不同频段的雷达从不同方位照射隐身飞机,截获的信号由数据处理中心进行数据融合处理,即使某部雷达受到干扰或不能覆盖某一区域时,其它雷达也可提供相关信息,从而在公共覆盖域内获得比单部雷达更多的目标数据,大大提高对隐身飞机的捕获概率^[2,3]。图 1 为近空间双基雷

达组网探测隐身飞机示意图。

文献[4]研究了 Taylor 展开和两步最小二乘定位,文献[5]利用解伪线性方程组并求解二次方程进行定位,文献[6]提出了一种基于传播算子的双基地 MIMO 雷达快速多目标定位算法,文献[7]利用 Helmert 方差分量估计完成目标相对位置的迭代求解。本文以近空间双基雷达网为背景,针对隐身飞机电磁散射的特点,分析并推导了 T/Rⁿ 体制双基雷达系统的定位算法,为近空间双基雷达网反隐身探测与跟踪提供理论基础。

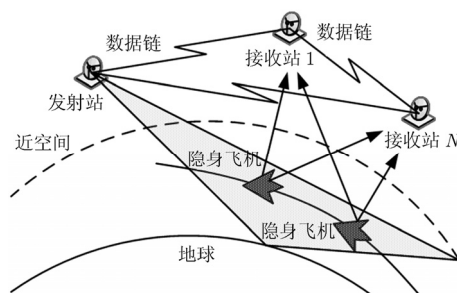


图 1 近空间双基雷达网示意图

2010-11-05 收到, 2011-03-04 改回

国家自然科学基金(60772162)和国家“863”高技术研究发展计划项目(2010AA8090514C)资助课题

*通信作者: 王燊燊 wangshenshen0616@163.com

2 近空间双基雷达网定位算法

近空间双基雷达网对隐身目标进行探测时,发射站和接收站均布置在移动平台。设发射站 T 的坐标为 $\mathbf{x}_T = [x_T, y_T, z_T]^T$, 接收站 R_k 的坐标为 $\mathbf{x}_k = [x_k, y_k, z_k]^T, k = 1, 2, \dots, N$, 发射站到目标的距离为 r_T , 目标到接收站 R_k 的距离为 $r_k, k = 1, 2, \dots, N$, 其关系如图 2 所示。由于在对隐身目标的探测中,发射站只起照射作用,各接收站所测得的信息为目标到发射站与目标到接收站的距离之和以及目标的方位角,设接收站 R_k 测量的距离之和为 ρ_k^* , 方位角为 $\theta_k^*, k = 1, 2, \dots, N$ 。

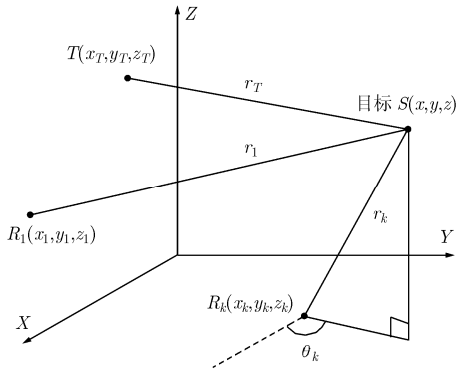


图2 组网双基雷达构成

这里设目标的真实位置为 $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$, 目标到发射站与目标到各接收站的距离和的真实值为 ρ_k , 目标对各接收站的方位角真实值为 $\theta_k, k = 1, 2, \dots, N$, 则由几何关系有

$$\left. \begin{aligned} r_T &= \sqrt{(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2 + (z - z_T)^2} \\ r_k &= \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2} \\ \rho_k &= r_T + r_k, \quad \tan \theta_k = \frac{y - y_k}{x - x_k} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

又由坐标关系易知:

$$\begin{aligned} r_T^2 - r_k^2 &= 2(x_k - x_T)x + 2(y_k - y_T)y + 2(z_k - z_T)z \\ &\quad + (x_T^2 - x_k^2) + (y_T^2 - y_k^2) + (z_T^2 - z_k^2) \\ &= 2(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T)^T \mathbf{x} + (\mathbf{x}_T^T \mathbf{x}_T - \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k) \\ &= (r_T + r_k)(r_T - r_k) = \rho_k(r_T - r_k) \end{aligned} \quad (2)$$

令 $\mathbf{e}_k = (1/\rho_k)(\mathbf{x}_T^T \mathbf{x}_T - \mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k)$, $\mathbf{a}_k = (2/\rho_k)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T)^T$, 则式(2)化为

$$r_T - r_k = \mathbf{a}_k \mathbf{x} + \mathbf{e}_k \quad (3)$$

由式(1)和式(3)可得

$$\mathbf{a}_k \mathbf{x} - 2r_T = -\mathbf{e}_k - \rho_k \quad (4)$$

由式(1)中的角度信息可知:

$$x \sin \theta_k - y \cos \theta_k = x_k \sin \theta_k - y_k \cos \theta_k \quad (5)$$

令 $\mathbf{c}_k = [\sin \theta_k, -\cos \theta_k, 0]$, $d_k = x_k \sin \theta_k - y_k \cos \theta_k$, 则式(5)可写为

$$\mathbf{c}_k \mathbf{x} = d_k \quad (6)$$

在式(4)中,假定 r_T 为与 \mathbf{x} 无关的变量,注意到 $k = 1, 2, \dots, N$, 则式(4)和式(6)可转化为线性方程,令 $\mathbf{y} = [x, y, z, r_T]^T = [\mathbf{x}^T, r_T]^T$, 则式(4)和式(6)写成矩阵形式为

$$\mathbf{H} \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{a}_N & \mathbf{c}_N \\ -2 & 0 & \cdots & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{b} = [-e_1 - \rho_1, d_1, \dots, -e_N - \rho_N, d_N]^T$ 。

当 $N \geq 2$ 时,式(7)具有最小二乘解。

$$\mathbf{y} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{b} \quad (8)$$

由于难以得到真实的测量值,常用带噪声的测量值代替真实值,若仅考虑向量 \mathbf{b} 的噪声,定位的最小二乘解为

$$\mathbf{y}^* = ((\mathbf{H}^*)^T \mathbf{H}^*)^{-1} (\mathbf{H}^*)^T \mathbf{b}^* \quad (9)$$

但实际上矩阵 \mathbf{H} 也含有噪声,且此噪声与向量 \mathbf{b} 的噪声相关。设接收站 R_k 测量的距离和 ρ_k^* 的测量噪声为 n_k , 方位角噪声为 $m_k, k = 1, 2, \dots, N$, 则有

$$\rho_k^* = \rho_k + n_k, \quad \theta_k^* = \theta_k + m_k \quad (10)$$

将式(7)中的系数矩阵进行 Taylor 展开并忽略噪声高阶项可得如下等式:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}^* + \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^* + [\mathbf{P}_1 \mathbf{Q}, \mathbf{P}_2 \mathbf{Q}, \mathbf{P}_3 \mathbf{Q}, \mathbf{0}_{2N \times 1}], \\ \mathbf{b} &= \mathbf{b}^* + \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}^* + \mathbf{P}_4 \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\mathbf{0}_{2N \times 1}$ 为 $2N$ 行 1 列的零向量,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [n_1, m_1, \dots, n_N, m_N]^T \\ \mathbf{P}_1 &= \text{diag} \left\{ \frac{2(x_1 - x_T)}{(\rho_1^*)^2}, \right. \\ &\quad \left. -\cos \theta_1^*, \dots, \frac{2(x_N - x_T)}{(\rho_N^*)^2}, -\cos \theta_N^* \right\}, \\ \mathbf{P}_2 &= \text{diag} \left\{ \frac{2(y_1 - y_T)}{(\rho_1^*)^2}, -\sin \theta_1^*, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{2(y_N - y_T)}{(\rho_N^*)^2}, -\sin \theta_N^* \right\} \\ \mathbf{P}_3 &= \text{diag} \left\{ \frac{2(z_1 - z_T)}{(\rho_1^*)^2}, 0, \dots, \frac{2(z_N - z_T)}{(\rho_N^*)^2}, 0 \right\} \\ \mathbf{P}_4 &= \text{diag} \left\{ \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_T^2 - y_T^2 - z_T^2 + (\rho_1^*)^2}{(\rho_1^*)^2}, \right. \\ &\quad \left. -x_1 \cos \theta_1^* - y_1 \sin \theta_1^*, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 - x_T^2 - y_T^2 - z_T^2 + (\rho_N^*)^2}{(\rho_N^*)^2}, \right. \\ &\quad \left. -x_N \cos \theta_N^* - y_N \sin \theta_N^* \right\} \end{aligned}$$

从式(11)中可以看出, 矩阵 \mathbf{H}^* 和 \mathbf{b}^* 所受到的噪声干扰均来源于噪声向量 \mathbf{Q} , 则可以将定位问题转化为如下归一化约束最小二乘问题^[8]:

$$\left. \begin{aligned} \min & \left(\|\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{b}}\|_F^2 + \eta\|\mathbf{y}\|_2^2 \right) \\ \text{s.t.} & \mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^* + (x\mathbf{P}_1 + y\mathbf{P}_2 + z\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_4)\mathbf{Q} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} (12)$$

观察到 $x\mathbf{P}_1 + y\mathbf{P}_2 + z\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_4$ 为对角阵且对称可逆, 记 $\mathbf{G}_y = x\mathbf{P}_1 + y\mathbf{P}_2 + z\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_4$, $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \|\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{b}}\|_F^2 + \eta\|\mathbf{y}\|_2^2$, 则由式(12)可得

$$\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^* = -\mathbf{G}_y\mathbf{Q} \quad (13)$$

目标函数 $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ 可转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{y}) &= \|\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{b}}\|_F^2 + \eta\|\mathbf{y}\|_2^2 \\ &= \text{tr} \left([\mathbf{P}_1\mathbf{Q}, \mathbf{P}_2\mathbf{Q}, \mathbf{P}_3\mathbf{Q}, \mathbf{P}_4\mathbf{Q}]^T [\mathbf{P}_1\mathbf{Q}, \mathbf{P}_2\mathbf{Q}, \mathbf{P}_3\mathbf{Q}, \mathbf{P}_4\mathbf{Q}] \right) \\ &\quad + \eta\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{P}_1^T\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2^T\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3^T\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4^T\mathbf{P}_4) \\ &\quad \cdot \mathbf{Q} + \eta\mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{P}_i^T\mathbf{P}_i \right) \mathbf{Q} + \eta\mathbf{y}^T\mathbf{y} \end{aligned} \quad (14)$$

记 $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}_i^T\mathbf{P}_i$, 由于 \mathbf{P}_i 均为对角阵, 故 \mathbf{P} 为对称对角阵。定义 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L(\mathbf{Q}, \mathbf{y}, \lambda) &= \mathbf{F}(\mathbf{y}) - \lambda^T (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^* + \mathbf{G}_y\mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{Q}^T\mathbf{P}\mathbf{Q} + \eta\mathbf{y}^T\mathbf{y} - \lambda^T (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^* + \mathbf{G}_y\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (15)$$

令 $\partial L/\partial \mathbf{Q} = 0$, 可得

$$2\mathbf{P}\mathbf{Q} - \mathbf{G}_y^T\lambda = \mathbf{0}, \text{ 即 } \mathbf{Q} = \frac{1}{2}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}_y^T\lambda \quad (16)$$

将式(16)代入式(13)可得

$$\lambda = -2(\mathbf{G}_y\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}_y^T)^{-1}(\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) \quad (17)$$

将式(17)代入式(16)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}_y^T (\mathbf{G}_y\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}_y^T)^{-1} (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) \\ &= -\mathbf{G}_y^{-1} (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) \end{aligned} \quad (18)$$

再将式(18)代入式(14)中可将目标函数简化为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{y}) &= (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*)^T \mathbf{G}_y^{-T}\mathbf{P}\mathbf{G}_y^{-1} (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) + \eta\mathbf{y}^T\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*)^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P} (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) + \eta\mathbf{y}^T\mathbf{y} \end{aligned} \quad (19)$$

则其梯度为

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}} = 2(\mathbf{H}^*)^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P} (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) \\ &\quad - 2(\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*)^T \mathbf{G}_y^{-3}\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial \mathbf{y}} (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) + 2\eta\mathbf{y} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial \mathbf{y}} = \left[\frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial r_T} \right]^T = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{0}]^T \quad (21)$$

将式(13)代入式(20)有

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{F} &= 2(\mathbf{H}^*)^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P} (\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) \\ &\quad - 2\mathbf{Q}^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{Q} + 2\eta\mathbf{y} \end{aligned} \quad (22)$$

注意到 $\mathbf{Q}^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{G}_y}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{Q}$ 为噪声的高阶小项, 令

$\nabla \mathbf{F} = \mathbf{0}$, 并忽略噪声高阶小项可得式(22)的解为

$$\hat{\mathbf{y}} = \left((\mathbf{H}^*)^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{H}^* + \eta\mathbf{I} \right)^{-1} (\mathbf{H}^*)^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{b}^* \quad (23)$$

设 $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + d\mathbf{y}$, 忽略噪声的二阶小项, 结合式(7)和式(11)可得

$$\begin{aligned} &(\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}})^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P} \left((\mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}})(\mathbf{y} + d\mathbf{y}) - (\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}) \right) \\ &\quad + \eta(\mathbf{y} + d\mathbf{y}) = \mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P} (\mathbf{H}d\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{b}}) \\ &\quad - \mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-2}\tilde{\mathbf{H}}d\mathbf{y} + \eta(\mathbf{y} + d\mathbf{y}) \\ &\quad - \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P} (\mathbf{H}d\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}d\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (24)$$

注意到 $\tilde{\mathbf{H}}d\mathbf{y}$, $\tilde{\mathbf{H}}^T d\mathbf{y}$, $\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}}$ 和 $\tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{b}}$ 为高阶无穷小项, 将其忽略可得

$$\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P} (\mathbf{H}d\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{b}}) + \eta(\mathbf{y} + d\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (25)$$

由式(7)和式(11)可得

$$\tilde{\mathbf{H}}\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{b}} = -(\mathbf{H}^*\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) = \mathbf{G}_y\mathbf{Q} \quad (26)$$

故由式(25)可以得到

$$d\mathbf{y} = (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}\mathbf{H} + \eta\mathbf{I})^{-1} (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q} - \eta\mathbf{y}) \quad (27)$$

由于 $\mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}$ 为对角阵, 故式(27)中 $\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}\mathbf{H} + \eta\mathbf{I}$ 为对称矩阵。考虑到 $d\mathbf{y}$ 为估计值 $\hat{\mathbf{y}}$ 与真实值 \mathbf{y} 之间的偏差, 且 $E(\mathbf{Q}^T) = E(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$, 为使此偏差最小, 计算其均方误差。

$$\begin{aligned} \delta(d\mathbf{y}) &= E(d\mathbf{y}^T d\mathbf{y}) = E \left[(\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q} - \eta\mathbf{y})^T \right. \\ &\quad \cdot (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}\mathbf{H} + \eta\mathbf{I})^{-2} (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P}\mathbf{Q} - \eta\mathbf{y}) \left. \right] \\ &= E \left[\mathbf{Q}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P})^T (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}\mathbf{H} + \eta\mathbf{I})^{-2} \right. \\ &\quad \cdot (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P})\mathbf{Q} \left. \right] + \eta^2 \mathbf{y}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}\mathbf{H} + \eta\mathbf{I})^{-2} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (28)$$

选取 η 使得 $\delta(d\mathbf{y})$ 取最小值, 由于无法得到真实值, 这里用测量值代替, 有

$$\begin{aligned} \eta^* &= \arg \min_{\eta} \delta(d\mathbf{y}) \\ &= \arg \min_{\eta} \left\{ \eta^2 (\mathbf{y}^*)^T \left((\mathbf{H}^*)^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}\mathbf{H}^* + \eta\mathbf{I} \right)^{-2} \mathbf{y}^* \right. \\ &\quad \left. + E \left[\mathbf{Q}^T \left((\mathbf{H}^*)^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P} \right)^T \left((\mathbf{H}^*)^T \mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}\mathbf{H}^* + \eta\mathbf{I} \right)^{-2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left((\mathbf{H}^*)^T \mathbf{G}_y^{-1}\mathbf{P} \right) \mathbf{Q} \right] \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

注意到 \mathbf{G}_y 和 \mathbf{P} 均为对角阵, 则 $\mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P}$ 为对角阵, 通过计算可知:

$$\mathbf{G}_y^{-2}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}_1 = \text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_{2N-1}, e_{2N}) \quad (30)$$

其中($k = 1, 2, \dots, N$):

$$e_{2k-1} = \frac{4(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T)^\top (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T) + [\mathbf{x}_k^\top \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T^\top \mathbf{x}_T + (\rho_k^*)^2]^2}{[\mathbf{x}_T^\top \mathbf{x}_T - \mathbf{x}_k^\top \mathbf{x}_k + 2(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T)^\top \mathbf{x} - (\rho_k^*)^2]^2}$$

$$e_{2k} = \frac{1 + (x_k \cos \theta_k^* + y_k \sin \theta_k^*)^2}{[(x_k - x) \cos \theta_k^* + (y_k - y) \sin \theta_k^*]^2}$$

对一般情况, $(\mathbf{H}^*)^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H}^*$ 为 4×4 的满秩实对称矩阵, 故存在正交矩阵 \mathbf{R} 使其对角化:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^*)^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H}^* &= \mathbf{R} \mathbf{\Lambda}_2 \mathbf{R}^\top \\ &= \mathbf{R} \text{diag}(s_1, s_2, s_3, s_4) \mathbf{R}^\top \end{aligned} \quad (31)$$

$$((\mathbf{H}^*)^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H}^* + \eta \mathbf{I})^{-2} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda}_3 \mathbf{R}^\top \quad (32)$$

其中 $\mathbf{\Lambda}_3 = \text{diag}\left(\frac{1}{(s_1 + \eta)^2}, \dots, \frac{1}{(s_4 + \eta)^2}\right)$, 记 $\mathbf{M}_1 = \mathbf{H}^* \mathbf{R}$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{R}^\top \mathbf{y}^*$, 则式(29)化简为

$$\eta^* = \arg \min_{\eta} \left\{ E[\mathbf{Q}^\top \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{\Lambda}_3 \mathbf{M}_1^\top \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}] + \eta^2 \mathbf{M}_2^\top \mathbf{\Lambda}_3 \mathbf{M}_2 \right\} \quad (33)$$

通过式(33)得到 η^* , 将 η^* 代入式(23)即得到定位解 $\hat{\mathbf{y}}$ 。但由于在式(7)中假定了 r_T 与 \mathbf{x} 无关, 而实际上 $r_T^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)$, 因此需要进行解相关。由式(27)可得

$$\begin{aligned} E(d\mathbf{y}) &= E\left[(\mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H} + \eta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-1} \mathbf{P} \mathbf{Q} \right] \\ &\quad - \eta (\mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H} + \eta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y} \\ &= -\eta (\mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H} + \eta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (34)$$

由于 $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + d\mathbf{y}$, 有

$$\begin{aligned} E(\mathbf{y}) &= \hat{\mathbf{y}} - E(d\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{y}} + \eta (\mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H} + \eta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{y} \\ &= [\mu_x, \mu_y, \mu_z, \mu_{r_T}]^\top \end{aligned} \quad (35)$$

协方差矩阵为

$$\begin{aligned} D(\mathbf{y}) &= E\left\{ [\mathbf{y} - E(\mathbf{y})][\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]^\top \right\} \\ &= E(d\mathbf{y}d\mathbf{y}^\top) - E(d\mathbf{y})E(d\mathbf{y}^\top) \\ &= (\mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H} + \eta \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-1} \mathbf{P}) \\ &\quad \cdot D(\mathbf{Q}) (\mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-1} \mathbf{P})^\top (\mathbf{H}^\top \mathbf{G}_y^{-2} \mathbf{P} \mathbf{H} + \eta \mathbf{I})^{-\top} \end{aligned} \quad (36)$$

其中 $D(\mathbf{Q})$ 为噪声 \mathbf{Q} 的协方差阵。考虑到 $\mathbf{y} = [x, y, z, r_T]^\top = [\mathbf{x}^\top, r_T]^\top$, 因此通过 \mathbf{y} 的期望与协方差矩阵可以得到 \mathbf{x} 和 r_T 的统计信息。

设 $E(\mathbf{y}) = [\mu_x, \mu_y, \mu_z, \mu_{r_T}]^\top = [\boldsymbol{\mu}_x^\top, \mu_{r_T}]^\top$, $D(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_x^2 = \text{diag}\{\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2\}$, $D(r_T) = \sigma_{r_T}^2$, 则似然估计为

$$\left. \begin{aligned} \min &\left\{ [\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x]^\top \boldsymbol{\sigma}_x^{-2} [\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x] + \sigma_{r_T}^{-2} (r_T - \mu_{r_T})^2 \right\} \\ \text{s.t.} & \quad r_T^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

构造 Lagrange 函数:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, r_T, \beta) &= [\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x]^\top \boldsymbol{\sigma}_x^{-2} [\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x] + \sigma_{r_T}^{-2} (r_T - \mu_{r_T})^2 \\ &\quad + \beta [r_T^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_T)] \end{aligned} \quad (38)$$

由 $\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, r_T, \beta) = 0$ 和 $\nabla_{r_T} V(\mathbf{x}, r_T, \beta) = 0$ 可得最终定位解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\boldsymbol{\sigma}_x^{-2} - \beta \mathbf{I})^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_x^{-2} \boldsymbol{\mu}_x - \beta \mathbf{x}_T) \\ &= \left[\frac{\mu_x - \beta x_T \sigma_x^2}{1 - \beta \sigma_x^2}, \frac{\mu_y - \beta y_T \sigma_y^2}{1 - \beta \sigma_y^2}, \frac{\mu_z - \beta z_T \sigma_z^2}{1 - \beta \sigma_z^2} \right]^\top \end{aligned} \quad (39)$$

其中 β 为如下方程的根:

$$\left(\frac{\mu_x - x_T}{1 - \beta \sigma_x^2} \right)^2 + \left(\frac{\mu_y - y_T}{1 - \beta \sigma_y^2} \right)^2 + \left(\frac{\mu_z - z_T}{1 - \beta \sigma_z^2} \right)^2 = \left(\frac{\mu_{r_T}}{1 + \beta \sigma_{r_T}^2} \right)^2$$

3 仿真分析

设量测向量为 $\mathbf{S} = [\rho_1, \theta_1, \dots, \rho_N, \theta_N]^\top$, 其误差服从高斯分布。

$$d\mathbf{S} \sim \left(0, \text{diag}(\sigma_{\rho_1}^2, \sigma_{\theta_1}^2, \dots, \sigma_{\rho_N}^2, \sigma_{\theta_N}^2) \right) \quad (40)$$

对定位方程式(1)求微分并写成矩阵的形式可得^[9,10]

$$d\mathbf{S} = \mathbf{C} d\mathbf{x} \quad (41)$$

其中 ($k = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{2k-1,1} &= \frac{x - x_k}{r_k} + \frac{x - x_T}{r_T}, \quad \mathbf{C}_{2k-1,2} = \frac{y - y_k}{r_k} + \frac{y - y_T}{r_T}, \\ \mathbf{C}_{2k-1,3} &= \frac{z - z_k}{r_k} + \frac{z - z_T}{r_T}, \quad \mathbf{C}_{2k,1} = \frac{y_k - y}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}, \\ \mathbf{C}_{2k,2} &= \frac{x - x_k}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}, \quad \mathbf{C}_{2k,3} = 0 \end{aligned}$$

则可得

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top d\mathbf{S} \quad (42)$$

则定位协方差矩阵为

$$\mathbf{P}_{dx} = (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{P}_{dS} \mathbf{C} (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-\top} \quad (43)$$

则定位精度 GDOP 为

$$\text{GDOP} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{P}_{dx})} \quad (44)$$

仿真条件: 以发射站为坐标原点建立坐标系, 则发射站坐标为(0,0,0) km, 3个接收站的坐标分别为(-60,-60,0) km, (60,-60,0) km, (0,60,0) km, 各个站的距离和角度估计误差分别服从相同方差的正态分布, 并且统计独立。图 3(a), 图 3(b)为 $\sigma_\rho = 0.3$ km, $\sigma_\theta = 1.5$ mrad, 高度为 10 km 和 20 km 处的 GDOP 图, 图 3(c), 图 3(d)为 $\sigma_\rho = 0.2$ km, $\sigma_\theta = 1$ mrad, 高度为 10 km 和 20 km 处的 GDOP 图。

从图 3 中可以看出, 对于同一高度而言, 在大部分区域目标离站越远定位精度越低。在一定高度

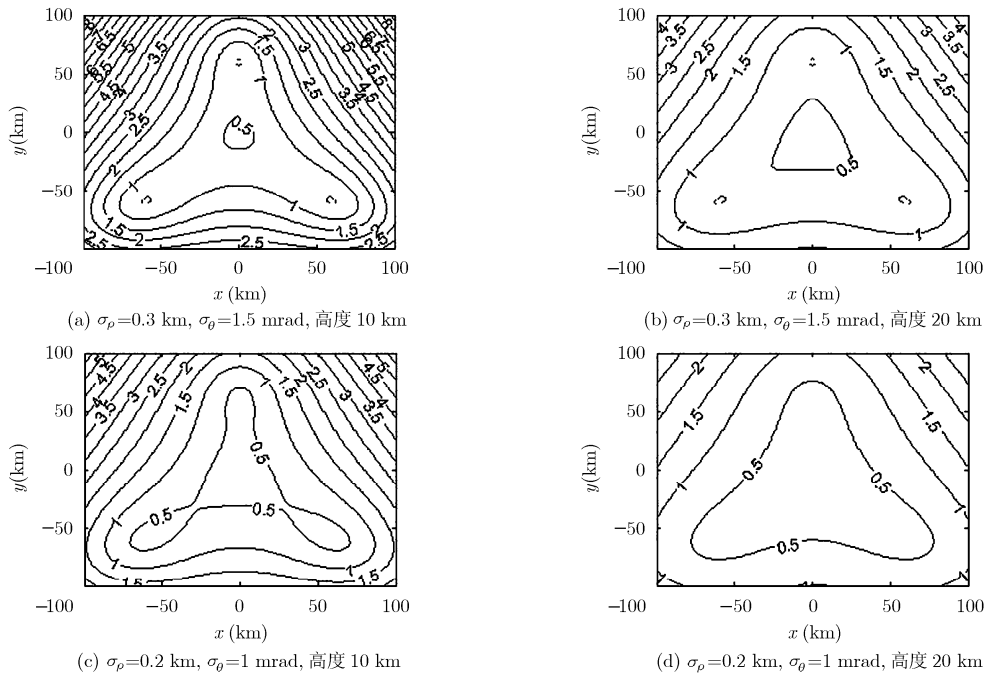


图 3 GDOP 分布图

范围内，定位精度随着高度的增加逐步提高，这是因为文中的定位算法采用目标的距离信息和方位角信息进行定位，而没有采用仰角。定位精度是由式(44)确定的，在 x 与 y 坐标相同而 z 坐标(高度)不同时，GDOP 的值随高度的增加先减小而后增大，近空间的高度为 20~100 km，一般监视平台的高度应低于 50 km，在此范围内定位精度随高度的增加而提高。从图中还可以看出距离和角度估计误差的均方差越小，定位精度越高。

现将归一化约束最小二乘算法与最小二乘算法和总体最小二乘算法进行比较。仍然假设发射站和接收站的坐标同上，目标的坐标为(100, 50, 15) km，对目标进行归一化最小二乘定位，并作 1000 次 Monte-Carlo 仿真，图 4(a)和图 4(b)分别给出了 3 种算法的相对误差与测距均方差和测角均方差的关系。

从图 4 可以看出，3 种算法的定位相对误差随

着测距误差均方差和测角均方差的增加而增大，并且归一化约束最小二乘算法的定位精度要高于其他两种算法，因此本文的算法能有效提高定位精度。计算量方面，本文方法用到了矩阵的奇异值分解和求解代数矩阵方程，因此其计算量比另外两种方法大，可以看出，定位精度的提高是以牺牲计算时间为代价的，但随着微处理器的发展，运算速度已不是瓶颈问题，故本方法的应用价值较高。

4 结论

本文研究了一种基于归一化约束最小二乘理论的双基雷达网定位算法，并对其定位精度进行了研究。仿真结果显示算法的定位精度随着高度的增加逐步提高，且距离和角度估计误差的均方差越小，定位精度越高。从 3 种算法的比较中可以看出本文方法的定位性能优于最小二乘算法和总体最小二乘算法，能有效控制相对误差。

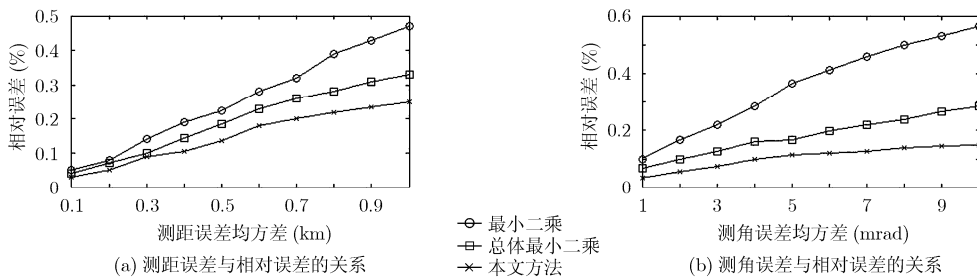


图 4 3 种定位算法的相对误差

参 考 文 献

- [1] 张云飞, 马东立, 武哲. 两种隐身飞机模型的雷达散射特性测试与分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(2): 147-150.
Zhang Yun-fei, Ma Dong-li, and Wu Zhe. Radar scattering characteristic test and analysis of two stealth aircraft models[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautic*, 2003, 29(2): 147-150.
- [2] Hanle E. Survey of bistatic and multistatic radar[J]. *IEE Proceedings-F*, 1986, 133(7): 587-595.
- [3] 刘兆磊, 邵锡军, 张光义. 雷达组网目标定位精度分析和评估[J]. 南京理工大学学报, 2005, 29(2): 182-185.
Liu Zhao-lei, Shao Xi-jun, and Zhang Guang-yi. Target location accuracy analysis and evaluation in radar network[J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2005, 29(2): 182-185.
- [4] Chan Y T and Ho K C. A simple and efficient estimator for hyperbolic location[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(8): 1905-1915.
- [5] Huang Z and Lu J. Total least squares and equilibration algorithm for range difference location[J]. *Electronics Letters*, 2004, 40(5): 121-122.
- [6] 陈金立, 顾红, 苏卫民. 一种双基地 MIMO 雷达快速多目标定位方法[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(7): 1664-1668.
Chen Jin-li, Gu Hong, and Su Wei-min. A method for fast multi-target localization in bistatic MIMO radar system[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(7): 1664-1668.
- [7] 徐卫明, 黄振, 汤恒胜. 基于相对测距的水下目标定位算法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2009, 49(10): 1651-1654.
Xu Wei-ming, Huang Zhen, and Tang Heng-sheng. Underwater target positioning algorithm based on relative ranging[J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2009, 49(10): 1651-1654.
- [8] Fan X. The constrained total least squares with regularization and its use in ill-conditioned signal restoration[D]. Mississippi: Mississippi State University, 1992: 35-55.
- [9] He You, Xiu Jian-juan, and Wang Guo-hong. Theorem for the combination of bistatic radar measurements using least squares[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(4): 1441-1445.
- [10] 宗华, 权太范, 宗成阁. 单双基地复合高频地波雷达网定位精度分析[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(5): 1108-1112.
Zong Hua, Quan Tai-fan, and Zong Cheng-ge. Positioning accuracy in monostatic-bistatic composite high frequency surface wave radar network[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(5): 1108-1112.
- 王燊燊: 男, 1984 年生, 博士生, 研究方向为雷达网定位与跟踪技术.
- 冯金富: 男, 1964 年生, 教授, 研究方向为机载制导武器与弹药技术.
- 王方年: 男, 1963 年生, 副教授, 研究方向为雷达组网技术.