

基于连续蚁群优化算法的小快拍加权子空间拟合快速算法

焦亚萌* 黄建国 韩晶
(西北工业大学航海学院 西安 710072)

摘要: 该文针对加权子空间拟合(WSF)算法多维非线性优化计算量大,难以工程应用的问题,将连续空间蚁群算法与加权子空间拟合算法相结合,提出了基于蚁群算法的加权子空间拟合(Ant Colony Optimization based Weighted Subspace Fitting, ACO-WSF)方位估计新方法。该方法利用连续蚁群算法中的信息量高斯核概率分布函数,经过有限次迭代得到加权子空间拟合算法的非线性全局最优解。仿真结果表明,低信噪比、小快拍条件下该方法估计性能与WSF方法基本相同,优于MUSIC方法,而且显著减少了计算量。

关键词: 信号处理;方位估计;加权子空间拟合;蚁群优化算法;计算复杂度

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)-04-0972-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00783

Continuous Ant Colony Optimization Based Weighted Subspace Fitting Fast Algorithm for DOA Estimation with Few Snapshots

Jiao Ya-meng Huang Jian-guo Han Jing
(College of Marine, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Weighted Subspace Fitting (WSF) algorithm is a well-known excellent algorithm for DOA estimation with low SNR and few snapshots. However, this algorithm is totally impractical for its prohibitive computational burden incurred by multi-dimensional nonlinear search. In order to solve this problem, Ant Colony Optimization (ACO) is introduced to combine with the WSF algorithm and a new algorithm with lower computational burden called ACO-WSF is proposed. The proposed algorithm exploits Gaussian kernel probability density function in the sampling process. The global maximum of WSF spatial spectrum function can be reached after reasonable iterations. Simulation results illustrate that the proposed algorithm not only provides similar performance as WSF algorithm and better performance than MUSIC algorithm in the situation of low SNR and few snapshots, but also reduces computational complexity significantly.

Key words: Signal processing; DOA estimation; Weighted subspace fitting; Ant colony optimization; Computational complexity

1 引言

目前,高分辨方位估计的各项理论与技术已经日趋成熟,就已发表的文献来看,该领域的方法大致可以分为基于线性预测类算法、子空间分解类算法和子空间拟合类算法^[1]。文献[2]使用的MUSIC方法是子空间分解类算法的代表,其在大样本的条件下能够获得精确的信号方位估计值。但是,对于短时的小快拍信号,采样协方差矩阵的大特征值与小特征值不能明显地区分开来,反应到子空间会出现信号子空间的能量部分泄露到噪声子空间的情况,此时,子空间分解类算法的估计性能会严重下

降。文献[3]使用的WSF方法是子空间拟合类算法的代表,其在低的信噪比、小的快拍数条件下能获得精确的信号方位估计值,且比子空间的分解类算法性能好得多。在空间谱估计领域,该类算法具有原理简单且估计精度高等优点,但分析发现其方位估计函数是非线性的,求解最优解的过程中需要进行多维搜索,其过程非常复杂,尤其是当信号源个数增多的时候,子空间拟合类算法的计算量是呈几何级数增长的,实际中难以实现实时的应用。文献[4]使用遗传算法来求解上述多维非线性的参数估计问题,但经研究发现,该算法在使用中会出现早熟的现象。文献[1]提出了Newton-Gauss算法来减少上述多维的非线性搜索的计算量问题。在实际应用中,为了加快算法的收敛速度,且不错过全局极值点,文献[1]和文献[4]的两种算法都需要指定搜索步长和适合实际情况的初始角度,这些在实际的应用中是难以掌握的。

2010-07-28收到,2010-10-26改回

国家自然科学基金(60972152),航空科学基金(2009ZC53031),国家重点实验室基金(9140C2304080607)和西北工业大学基础研究基金(NPU-FFR-W018102)资助课题

*通信作者:焦亚萌 jiaoyameng@mail.nwpu.edu.cn

文献[5]提出的蚁群优化(Ant Colony Optimization, ACO)算法在旅行商问题^[6]、模糊控制^[7]、生产调度^[8]和路径规划^[9]等方面,取得了一系列较好的实验结果。但以上应用都是在离散域进行的,而在阵列信号处理领域,空间谱峰搜索时的信号方位空间是连续的。文献[10]将离散域蚁群算法扩展到连续域中,使得利用蚁群算法来实现空间谱估计成为可能,目前国内尚未有将蚁群算法应用于空间谱估计领域的相关研究。因此,本文尝试将连续ACO算法^[10]与高分辨技术相结合,提出了一种小快拍加权子空间拟合(ACO-WSF)的快速算法,该方法优点在于以下4个方面:(1)适用于短时的小快拍数据;(2)低信噪比时估计精度高,与WSF基本相同;(3)该方法收敛性好且计算量小;(4)更易于实际应用,不需指定搜索步长和初始角度。

2 小快拍信号加权子空间拟合方法

设有 M 元均匀线阵,阵元间距 $d=\lambda/2$, $\lambda=c/f_0$ 为中心频率对应的波长,考虑 P 个远场窄带点目标信号源入射到该阵列上。假设阵列接收到的加性噪声为平稳的、零均值的高斯空间白噪声,方差为 σ_n^2 。 M 个阵元在特定时刻接收到的 $M \times 1$ 维快拍数据的矢量形式如下:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{n}(t) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$ 是 $M \times 1$ 维噪声数据矢量; $\mathbf{s}(t) \in \mathcal{C}^{P \times 1}$ 是空间信号的 $P \times 1$ 维矢量; \mathbf{A} 是 $M \times P$ 维阵列流型矩阵;

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\theta_P)] \quad (2)$$

式中导向矢量

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1 \quad e^{j\varphi(\theta_i)} \quad \cdots \quad e^{j(M-1)\varphi(\theta_i)}]^T \quad (3)$$

式中 $\varphi(\theta_i) = 2\pi d \sin(\theta_i)/\lambda$, $\theta_i \in [-\pi/2, \pi/2]$ 是信号源相对于阵列法线的入射方位。

考虑阵列快拍数据的协方差矩阵

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H(\theta) + \mathbf{R}_N \quad (4)$$

式中 \mathbf{R}_S 是信号的协方差矩阵; \mathbf{R}_N 是噪声的协方差矩阵。在工程应用中,接收数据是有限长的,只能通过 N 次有限快拍数据得到阵列的采样协方差矩阵的最大似然估计

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t) \quad (5)$$

对 $\hat{\mathbf{R}}$ 进行特征分解有

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H = \sum_{m=1}^M \lambda_m \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^H \quad (6)$$

理想条件下,协方差阵特征分解之后的特征值满足 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_M$,特征向量相互正交而且

是线性无关的。当数据无限长时,信号的协方差矩阵 \mathbf{R}_S 是满秩的,有大特征值组成的对角阵 $\mathbf{\Sigma}_s = \text{diag}(\lambda_m)$, $\lambda_m > \sigma_n^2$ ($m=1,2,\dots,P$),其对应的特征向量 $\mathbf{U}_S = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_P]$,由 \mathbf{U}_S 张成的空间称为信号子空间,其与阵列流型张成的空间是同一空间,即

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{U}_S\} &= \text{span}\{\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\theta_P)\} \\ &= \text{span}\{\mathbf{A}(\theta)\} \end{aligned} \quad (7)$$

此时,存在一个满秩矩阵 \mathbf{Q} ,使得

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{Q} \quad (8)$$

有噪声存在的时候, $\text{span}\{\hat{\mathbf{U}}_S\} \neq \text{span}\{\mathbf{A}(\theta)\}$,因此,考虑构造一个加权的拟合关系,来衡量 \mathbf{U}_S 对阵列流型的逼近程度,首先,找出使式(8)成立的一个矩阵 \mathbf{Q} ,使得二者在最小二乘的意义下拟合得最好,即

$$\theta, \hat{\mathbf{Q}} = \min \|\mathbf{U}_S \mathbf{W}^{1/2} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{Q}}\|_F^2 \quad (9)$$

然后,固定 \mathbf{A} 求出 $\hat{\mathbf{Q}}$ 的最小二乘解

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{U}_S = \mathbf{A}^+ \mathbf{U}_S \quad (10)$$

最后,将式(10)代入式(9),即得

$$\theta = \max \text{tr}\{\mathbf{P}_A \mathbf{U}_S \mathbf{W} \mathbf{U}_S^H\} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{W} = (\hat{\mathbf{\Sigma}}_S - \sigma^2 \mathbf{I})^2 \hat{\mathbf{\Sigma}}_S^{-1}$; $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ 是阵列流型的投影矩阵。

3 基于连续蚁群优化算法的加权子空间拟合方法(ACO-WSF)

3.1 连续蚁群优化算法

蚁群优化算法(ACO)在求解组合优化问题中显示出优良的特征,从蚁群通过个体的信息交换从而自动搜索出从蚁穴到食物之间的最短路径的集体的寻优行为中得到启发,是一种基于种群的启发式随机搜索的算法。在离散域蚁群算法中,从信息量的增减、留存到最优解的确定,都是通过离散的点集分布方式进行的。而连续域蚁群算法与离散域的不同之处在于:其解空间不是点状分布,而是以区域性方式分布的。因此,连续空间蚁群算法在信息量的留存方式、行进的策略和寻优的方式等方面有很大的不同。在连续参数空间的蚁群搜索过程中,考虑选取合适的信息量概率分布函数,从而引导蚂蚁进行下一步搜索,进而影响整个蚁群行进的策略。

3.2 信息量概率分布函数选取

高斯概率密度函数是最常用的概率密度函数,具有抽样简单的优良特征,但因为只有一个最大值,不能描述搜索空间中两个不相交的区域。因此,我们考虑几个一维高斯函数的加权和,定义一个具有高斯核的概率密度函数

$$G^i(\Theta) = \sum_{l=1}^L w_l(\Theta) g_l^i(\Theta)$$

$$= \sum_{l=1}^L w_l(\Theta) \frac{1}{\sigma_l^i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Theta - \mu_l^i)^2}{2\sigma_l^i{}^2}}, i = 1, \dots, P \quad (12)$$

式中 Θ 是整个搜索空间, i 是搜索空间的维数; $w_l (l = 1, 2, \dots, L)$ 是独立高斯分布的权值向量; $g_l^i(\Theta) \sim N(\mu_l^i, \sigma_l^i)$, ($l = 1, 2, \dots, L$); L 是搜索空间的抽样个数。

3.3 ACO-WSF 的实现步骤

(1)全局搜索空间抽样 从 P 维搜索空间的均匀分布 $U_{[\theta_a, \theta_b]}^P$, 得到一个新的搜索空间 $(\Theta_1 \Theta_2 \dots \Theta_L)$, 其中 $[\theta_a, \theta_b]$ 为角度搜索范围, $\Theta_l (l = 1, 2, \dots, L)$ 对应搜索空间的每组解。将新的搜索空间按照每组解对应的目标函数值 f 从大到小降序排列。在 ACO-WSF 方法中, 目标函数值 f 由式(11)确定。权值向量服从独立高斯分布 $N(1, q^2 L^2)$, 每组解所对应的权值由式(13)计算

$$w_l = \frac{1}{qL\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l-1)^2}{2q^2 L^2}}, l = 1, 2, \dots, L \quad (13)$$

为了更直观的理解, 将搜索空间的每组解、目标函数值和权值向量放入档案表中, 如图 1 所示。

Θ_1	θ_1^1	θ_2^1	\dots	θ_l^1	\dots	θ_L^1	$f(\Theta_1)$	w_1
Θ_2	θ_1^2	θ_2^2	\dots	θ_l^2	\dots	θ_L^2	$f(\Theta_2)$	w_2
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
Θ_l	θ_1^l	θ_2^l	\dots	θ_l^l	\dots	θ_L^l	$f(\Theta_l)$	w_l
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
Θ_L	θ_1^L	θ_2^L	\dots	θ_l^L	\dots	θ_L^L	$f(\Theta_L)$	w_L
	G^1	G^2		G^l		G^P		

图 1 档案表

(2)更新候选解 满足迭代循环条件时, 每只蚂蚁以转移概率 p 在整个搜索空间中选择当前选中解 Θ_l , 每次迭代每只蚂蚁只需选择一次。转移概率 p 由式(14)计算

$$p_l = \frac{w_l}{\sum_{r=1}^L w_r} \quad (14)$$

然后由式(12)确定蚂蚁的下一组候选解 Φ , Φ 的 P 个分量从一个以 Θ_l 为均值, $\sigma_l^2(\Theta)$ 为方差的独立 P 维高斯分布产生, 其中 $\sigma_l^2(\Theta)$ 为用信息素 ξ 修正的整个搜索空间所有解与当前选中解的平均偏差。对 P 维搜索空间有

$$\sigma_l^i = \xi \sum_{e=1}^L \frac{|\theta_e^i - \Theta_l^i|}{L-1}, i = 1, \dots, P \quad (15)$$

其中 Θ_l^i 表示当前选中解的第 i 个分量。

(3)更新搜索空间 对新的候选解, 若 $f(\Phi) > f(\Theta_l)$, 则 $\Theta_L = \Phi$, 其中 Θ_1, Θ_L 分别为搜索空间的第 1 组和最后一组解, 然后对新产生的搜索空间按照目标函数值 f 从大到小降序排列。否则, 搜索空间不变化。

(4)迭代结束判决, 得到方位估计值 若 $\max_{\forall m, n \in I} \{|\Theta_1^m - \Theta_1^n|\} < \delta$, 其中 I 为迭代次数, 则取 Θ_1^n , $n = I-4, I-3, I-2, I-1, I$, 并对其求期望, 获得目标方位向量的最终估计, 否则转(2)。

3.4 ACO-WSF 的计算复杂度分析

WSF 算法的计算复杂度为 $O(((\theta_b - \theta_a)/s)^P)$, ACO-WSF 算法的计算复杂度约为 $O(T \times I_p + L + C_p \times I_p)$ 。其中, (θ_a, θ_b) 和 s 分别为 WSF 算法的角度搜索范围和搜索步长; T, I_p, L 分别为 ACO-WSF 算法的蚂蚁个数、迭代次数和全局搜索空间抽样个数。

(1)对比 WSF 算法的 P 维搜索, ACO-WSF 算法使用高斯核概率抽样技术, $T \times I_p + L$ 小于 WSF 算法 P 维搜索空间的网格数, 而 C_p 是 ACO-WSF 一次迭代高斯核概率抽样的计算量, 远远小于 $T \times I_p + L$;

(2)经过有限次迭代算法收敛, 随着信号源个数 P 的增加, ACO-WSF 算法进行高斯核概率抽样过程的计算量略有增加, 但增加的速度远小于指数增长, 明显看出对于较多的信号源个数, ACO-WSF 算法的计算量远小于 WSF 算法。

4 仿真性能分析

仿真模型: 阵元数 $M=12$, 阵元间距为中心频率半波长的均匀线列阵, 采样频率为 120 kHz, 快拍数为 100, 两个信号源相对于阵列法线方向入射方位角分别为 $\pm 3^\circ$ 。

(1)两个信号源 SNR=0 dB 的条件下, WSF 算法($s = 0.5^\circ$)的空间谱如图 2 所示, 由图 2 可以看出 WSF 算法是一个非线性的多维最优化的问题。

(2)两个信号源 SNR=0 dB 的条件下, ACO-WSF 算法方位估计结果随迭代次数的变化曲线如图 3 所示, 可以看出, 经过有限次迭代后, 收敛到最优解。

(3)SNR 变化时通过与 WSF 和 MUSIC 作对比实验, 分析 ACO-WSF 算法($T = 2, L = 100, q = 0.1, \xi = 0.01, \delta = 0.001, [\theta_a, \theta_b] = [-60^\circ, 60^\circ]$)的估计性能, 每个信噪比下做 100 次 Monte Carlo 实验, 图 4 是 3 种算法的分辨概率, 可以看出信噪比低于 -2 dB 时, ACO-WSF 算法的分辨能力与 WSF 相当, 优于 MUSIC 算法; 图 5 是信号源 1 的

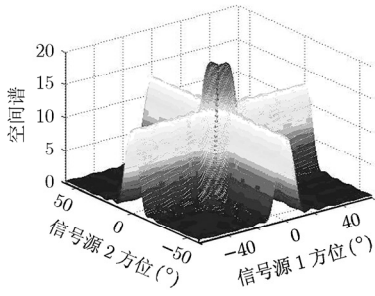


图 2 空间谱

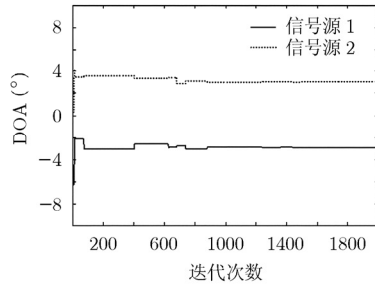


图 3 ACO-WSF 算法优化迭代结果

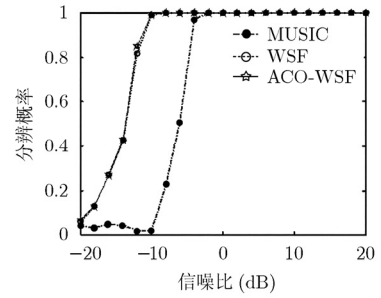


图 4 分辨概率比较

估计均方根误差，图 6 是信号源 2 的估计均方根误差，可以看出 ACO-WSF 和 WSF 算法的估计性能相当，信噪比低于 4 dB 时，估计性能优于 MUSIC 算法。

(4) ACO-WSF 算法 ($T = 2$, $L = 100$, $I_2 = 1026$, $C_2 = 1$) 和 WSF 算法 ($s = 0.5^\circ$) 的计算复杂度比较如图 7 所示，可以看出随着信号源个数的增加，WSF 算法的计算量呈指数增长，而 ACO-WSF 算法的计算量只是呈倍数增长，明显看出对于较多的信号源个数，ACO-WSF 算法的计算量远小于 WSF 算法。

(5) 表 1 显示 100 次 Monte Carlo 实验，不同信噪比和快拍数条件下，ACO-WSF 算法对应的平均迭代次数，信号源个数为 2，其他仿真条件同(3)和(4)，可以看出随着信噪比和快拍数的增加，ACO-

WSF 算法的平均迭代次数 I_2 减少，由 3.4 节计算复杂度分析可知，ACO-WSF 算法的计算复杂度随信噪比和快拍数的增加而减小，如表 2 所示。

5 结束语

低信噪比、小快拍条件下，加权子空间拟合方位估计方法比子空间分解类算法具有更加优良的估计性能，本文针对加权子空间拟合方法由于多维非线性搜索而导致的计算量大，难以工程应用的问题，利用高斯核概率抽样技术，将连续蚁群算法与加权子空间拟合方位估计方法相结合，提出了一种基于连续蚁群算法的加权子空间拟合 (ACO-WSF) 方位估计新方法。研究了信息量概率分布函数的选取，给出了完整的理论过程，并进行了仿真性能研究。结果表明，ACO-WSF 方法在保持了 WSF 方法的

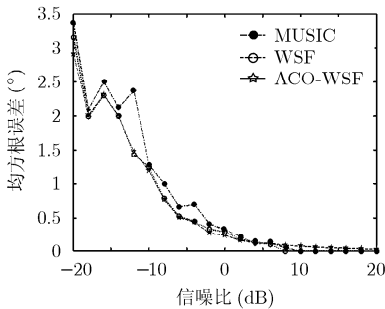


图 5 信号源 1 均方根误差

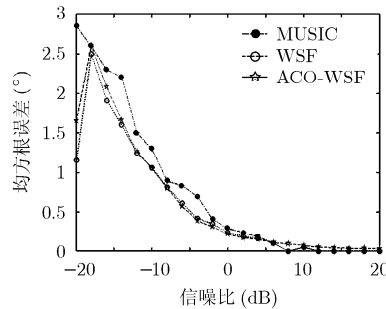


图 6 信号源 2 均方根误差

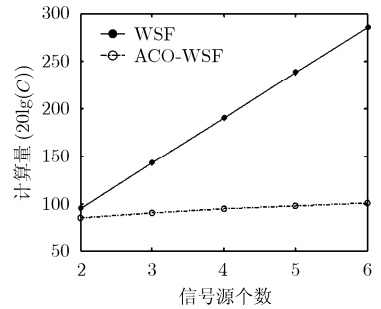


图 7 计算量随信号源数变化

表 1 ACO-WSF 算法不同信噪比和快拍数时的平均迭代次数

SNR(dB)	-10 dB		0 dB		10 dB	
	快拍数 100	快拍数 200	快拍数 100	快拍数 200	快拍数 100	快拍数 200
平均迭代次数 I_2	1854.9	1783.2	1058.6	997.7	758.4	701.6

表 2 两种算法在不同信噪比和快拍数时的计算量比较

SNR	-10 dB		0 dB		10 dB	
	快拍数 100	快拍数 200	快拍数 100	快拍数 200	快拍数 100	快拍数 200
WSF 计算量	$O(57600)$	$O(57600)$	$O(57600)$	$O(57600)$	$O(57600)$	$O(57600)$
ACO-WSF 计算量	$O(5664.7)$	$O(5449.6)$	$O(3275.8)$	$O(3093.1)$	$O(2375.2)$	$O(2204.8)$

优良性能的同时, 把 WSF 方法的计算复杂度从 $O(((\theta_b - \theta_a)/s)^P)$ 减少到 $O(T \times I_p + L + C_p \times I_p)$, 显著减少了计算复杂度, 从而为 WSF 方位估计方法的工程应用提供了一种新的思路。

参 考 文 献

- [1] Kim H and Viberg M. Two decades of array signal processing research. *IEEE Signal Magazine*, 1996, 13(4): 67-94.
 - [2] Li F and Lu Y. Unified bias analysis of subspace-based DOA estimation algorithms. In *Multidimensional Signal Processing Algorithms and Application Techniques*, Leondes, C T Ed. New York: Academic, 1996, 77: 149-192.
 - [3] Werner K and Jansson M. DOA estimation and detection in colored noise using addition noise-only data. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5309-5322.
 - [4] Stoica P and Gershman A B. Maximum-likelihood DOA estimation by data-supported grid search. *IEEE Signal Processing Letters*, 1999, 6(10): 273-275.
 - [5] Dorigo M. Optimization, learning and natural algorithms (in Italian). [Ph.D. dissertation], Dipartimento di Elettronica, Politecnico di Milano, Italy, 1992.
 - [6] Zhou Yuren. Runtime analysis of an ant colony optimization algorithm for TSP Instance. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, 13(5): 1083-1092.
 - [7] Juang Chia-feng and Hsu Chia-huang. Reinforcement ant optimized fuzzy controller for mobile-robot wall-following control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(10): 3931-3940.
 - [8] Ferrandi F, Lanzi P L, Pilato C, Sciuto D, and Tumeo A. Ant colony heuristic for mapping and scheduling tasks and communications on heterogeneous embedded systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and System*, 2010, 29(6): 911-924.
 - [9] Triay J and Cervello-Pastor C. An ant-based algorithm for distributed routing and wavelength assignment in dynamic optical networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2010, 28(4): 542-552.
 - [10] Socha K and Dorigo M. Ant colony optimization for continuous domains. *European Journal of Operational Research*, 2008, 185(3): 1155-1173.
- 焦亚萌: 女, 1981年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、空间谱估计和高分辨参数估计等。
- 黄建国: 男, 1945年生, 教授, 博士生导师, 长期从事水下阵列处理、现代信号处理和水声通信等方面的研究工作。
- 韩晶: 男, 1980年生, 讲师, 研究方向为水声信号处理、水声通信与水声网络设计等。