

## AWE 在双负媒质宽频散射分析中的应用

孙玉新<sup>①</sup> 陈明生<sup>\*②</sup> 吴先良<sup>①②</sup> 杨 梅<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(安徽大学电子科学与技术学院 合肥 230039)

<sup>②</sup>(合肥师范学院 物理与电子工程系 合肥 230061)

**摘要:** 该文旨在利用渐近波形估计(AWE)技术来研究双负媒质(DNG)的电磁散射特性。文章首先从双负媒质(DNG)的本构关系出发,推导出 DNG 的 PMCHWT 方程,从而解出单频率入射波下的电流和雷达散射截面(RCS);通过对阻抗矩阵元素的处理,实现了阻抗元素高阶导数的求解,成功的将 AWE 技术应用于 DNG 宽频电磁计算领域。计算实例表明: AWE 计算的结果能很好地逼近精确解,同时大大提高了计算效率。

**关键词:** 雷达散射截面; 双负媒质; Drude 模型; PMCHWT 方程; 渐进波形估计

中图分类号: TN011

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)03-0754-04

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00661

## Application of AWE to Scattering Analysis of the Double-negative Medium over a Broad Frequency Band

Sun Yu-xin<sup>①</sup> Chen Ming-sheng<sup>②</sup> Wu Xian-liang<sup>①②</sup> Yang Mei<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic Science and Technology, Anhui University, Hefei 230039, China)

<sup>②</sup>(Department of Physics and Electronic Engineering, Hefei Normal University, Hefei 230061, China)

**Abstract:** In this paper, the Asymptotic Waveform Evaluation (AWE) technique is applied to study electromagnetic scattering analysis of Double-Negative (DNG) medium. The PMCHWT equation of the DNG is deduced based on its constitutive relationship. And the surface currents and Radar Cross Section (RCS) at a single frequency point is computed; In order to achieve high-order derivation work, impedance matrix elements are managed. Then the AWE technique is applied to obtain broadband RCS frequency response of the DNG. A good agreement can be seen between AWE and the exact solution. The computational efficiency is improved significantly.

**Key words:** Radar Cross Section (RCS); Double-Negative (DNG) media; Drude model; PMCHWT equation; Asymptotic Waveform Evaluation (AWE)

### 1 引言

矩量法(MOM)是求解电磁场问题的有效数值方法<sup>[1]</sup>,然其生成了稠密的阻抗矩阵,求解电磁场问题占用了大量的 CPU 时间。特别是获取一个宽频响应时,矩量法需逐点计算,其弊端更加凸显,一定程度上限制了矩量法的发展。而渐进波形估计(AWE)技术<sup>[2]</sup>能有效克服矩量法的这种弱点,其主要思想为:首先对感应电流在中心频率点进行泰勒展开,再利用 Padé 逼近来获得更宽范围的频率响应,从而求出更宽频段内的雷达散射截面(RCS)。

双负媒质(DNG)是介电常数和磁导率均为负数

的人工复合材料,也称为左手材料。双负媒质具有很多奇异的特性,如光的负折射率,反多普勒效应,反切仑科夫辐射等,在电磁学,光学和材料领域有着巨大的应用前景<sup>[3-5]</sup>,其电磁散射特性的分析已成为当前研究的热点之一<sup>[6,7]</sup>。

应用矩量法求解双负媒质电磁散射问题时可以获得较高的计算精度。然而由于双负媒一般是一种色散媒质,即其介电常数和磁导率随频率改变,因此当采用基于矩量法的 AWE 技术对其进行分析时,鉴于其阻抗矩阵的复杂性,特别是其高阶导数求解的复杂性,以至于鲜见此方面的相关报道。本文以 Drude 模型<sup>[8,9]</sup>对双负媒质进行描述,提出了一种阻抗矩阵元素分化求导的方法,实现了其高阶阻抗矩阵导数的计算,从而将 AWE 技术成功应用于双负媒质的宽频响应分析。通过对不同形状散射体的数值模拟,并将计算结果与解析解、矩量法逐点计算的结果进行了比较,验证了算法的有效性。

2010-06-25 收到, 2010-09-16 改回

国家自然科学基金重点项目(60931002), 国家自然科学基金(61001033), 安徽省自然科学基金(090412047)和安徽省优秀青年基金(10040606Y08)资助课题

\*通信作者: 陈明生 chenms@ustc.edu.cn

## 2 理论推导

### 2.1 双负媒质的 PMCHWT 方程

本文研究了基于 Drude 色散模型下的双负媒质的电磁散射特性, 在 Drude 色散模型中, 电磁参数描述为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{\omega_e^2}{\omega(j\Gamma_e - \omega)} \right) \quad (1)$$

$$\mu(\omega) = \mu_0 \left( 1 + \frac{\omega_m^2}{\omega(j\Gamma_m - \omega)} \right) \quad (2)$$

其中  $\varepsilon_0, \mu_0$  是真空中介电常数和磁导率,  $\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$  是双负媒质的电介电常数和磁介电常数,  $\omega_e, \omega_m$  分别为电等离子体和磁等离子体的振荡频率,  $\Gamma_e, \Gamma_m$  分别为电等离子体和磁等离子体的电子碰撞频率, 其中  $\varepsilon, \mu$  都是关于频率的复变量函数。

如图 1 所示,  $TM_z$  平面波垂直入射到双负媒质散射体上, 利用等效原理将此散射问题等效两个区域, 记散射体外等效的区域为 0 区, 散射体内等效的区域为 1 区, 那么双负媒质的 PMCHWT 方程<sup>[10]</sup>如下:

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_0 \mathbf{L}_0(\mathbf{J}) + \eta_1 \mathbf{L}_1(\mathbf{J}) - \mathbf{K}_0(\mathbf{M}) - \mathbf{K}_1(\mathbf{M}) &= \mathbf{E}^{\text{inc}} \\ \eta_0 \mathbf{K}_0(\mathbf{J}) + \eta_1 \mathbf{K}_1(\mathbf{J}) + \mathbf{L}_0(\mathbf{M}) + \mathbf{L}_1(\mathbf{M}) &= 0 \end{aligned} \right\}_{\text{tan}} \quad (3)$$

其中  $\eta_i = \sqrt{\mu_i/\varepsilon_i}$ ,  $\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r})$  为入射场,  $\mathbf{J}, \mathbf{M}$  为目标表面感应电、磁流,  $L_0, K_0$  是 0 区的积分算子,  $L_1, K_1$  是 1 区的积分算子。积分算子  $L, K$  定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_i(\mathbf{X}) &= jk_i \iint_S \left( \mathbf{X}(\mathbf{r}') + \frac{1}{k_i^2} \nabla \nabla' \cdot \mathbf{X}(\mathbf{r}') \right) g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ \mathbf{K}_i(\mathbf{X}) &= \iint_S \mathbf{X}(\mathbf{r}') \times \nabla g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)中的  $i$  分别取 0 和 1, 分别对应 0 区和 1 区的积分算子表达式。

如图 1 所示外部源边界记为  $S_{\text{out}}$ , 内部源边界记为  $S_{\text{in}}$ 。在散射体内问题中, 入射场为零。利用边界条件

$$JM_{\text{in}} = -JM_{\text{out}} \quad (5)$$

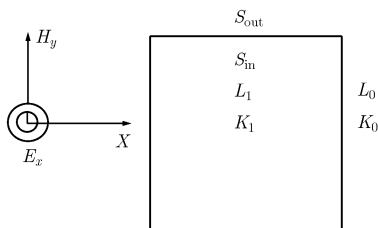


图 1 双负媒质散射问题模型

$JM_{\text{in}}$  和  $JM_{\text{out}}$  分别代表内、外部的总电流或磁流, 联立式(3)–式(5), 采用迦略金方法得到双负媒质 PMCHWT 方程的矩量法解。

$$\langle \mathbf{A}, (L_i + K_i) \mathbf{A} \rangle a = \langle \mathbf{A}, \mathbf{E}^{\text{inc}} \rangle \quad (6)$$

这里  $\mathbf{A}$  是定义在双负媒质边界的基函数,  $a$  为未知电流和磁流展开系数。在 2 维问题中, 展开函数选用脉冲基函数, 测试函数选狄拉克  $\delta$  函数。通过特殊的处理, 式(6)可以简化为

$$[\mathbf{Z}][\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 & \mathbf{D}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^i \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{V} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{Z}$  是双负媒质阻抗矩阵,  $\mathbf{I}$  是电流,  $\mathbf{J}, \mathbf{M}$  分别是感应电流和感应磁流,  $\mathbf{V}$  是激励向量,  $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$  分别是外等效时电流阻抗矩阵和磁流阻抗矩阵,  $\mathbf{C}_0, \mathbf{D}_0$  分别是内等效时电流阻抗矩阵和磁流阻抗矩阵。

### 2.2 渐近波形估计(AWE)技术

应用矩量法求解式(6)每次只能获得一个频率点的解, 为获得其宽频带解 AWE 技术首先对感应电流  $I(k)$  实施 Taylor 展开:

$$I(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [c^i(k_0)](k - k_0)^i \quad (8)$$

$$c^i(k_0) = [Z_{mn}(k_0)]^{-1} \left\{ \frac{V_m^i(k_0)}{i!} - \sum_{l=1}^i \frac{Z_{mn}^l(k_0)}{l!} I^{(i-l)}(k_0) \right\} \quad (9)$$

其中  $c^i(k_0)$  为 Taylor 展开系数,  $V_m^i(k_0)$  和  $Z_{mn}^l(k_0)$  分别是激励向量的第  $i$  阶导数和阻抗矩阵的第  $l$  阶导数, 这样在理论上, 通过泰勒级数近似可以准确得到在  $k_0$  附近的宽频电流  $I(k)$ 。为了获得更宽频带的电流, 通过 Padé 逼近拓展有效计算带宽

$$I_n(k) = \frac{\sum_{l=0}^L a_n^l (k - k_0)^l}{\sum_{m=0}^M b_n^m (k - k_0)^m} \quad (10)$$

$L, M$  是 Padé 逼近阶数。联立式(8)和式(10)整理, 对比  $(k - k_0)$  同类项系数可得系数  $a_n^l, b_n^m$ 。从而可以计算出任意频点的极化电流和 RCS。从上面的推导, 可以清楚看到, AWE 技术矩阵的求逆次数只有一次, 特别对双负媒质而言, 由于阻抗矩阵元素的复杂性, 避免了矩量法多次求逆的弊端, 将大幅提高计算效率。

### 2.3 2 维散射体的阻抗矩阵及阻抗元素求导

从 DNG 媒质的 PMCHWT 方程的推导过程可以清楚看出, DNG 媒质的阻抗元素在外等效时和普通介质目标没有区别, 因此本文对外等效阻抗矩阵  $\mathbf{A}_0$  和  $\mathbf{B}_0$  不作讨论。在本文主要研究内等效时的阻抗矩阵  $\mathbf{C}_0$  和  $\mathbf{D}_0$ 。下面是内等效时阻抗元素的具体表达式:

$$C_0(m, n) = \begin{cases} (\eta_1/\eta_0)(k_1/4)\Delta C(1 - (j2/\pi) \\ \quad \cdot \ln(\gamma k_1 \Delta C / (4\epsilon)), & m = n \\ (\eta_1/\eta_0)(k_1/4)\Delta C(H_0^{(1)}(k_1 r) \\ \quad - jH_0^{(2)}(k_1 r)), & m \neq n \end{cases} \quad (11)$$

$$D_0(m, n) = \begin{cases} -1/2, & m = n \\ -(jk_1/4)\Delta C(H_1^{(1)}(k_1 r) - jH_1^{(2)}(k_1 r))\mathbf{n} \\ \quad \cdot \mathbf{e}_r, & m \neq n \end{cases} \quad (12)$$

其中  $\eta_1$  为 DNG 媒质内波阻抗,  $\eta_0$  为真空中波阻抗,  $k_1$  为 DNG 媒质中的波数,  $\Delta C$  为离散步长,  $r$  为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & 2h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & 3h_1 & 3h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 & 4h_1 & 6h_2 & 4h_3 & h_4 \\ 0 & 0 & h_0 & 5h_1 & 10h_2 & 10h_3 & 5h_4 & h_5 \\ 0 & h_0 & 6h_1 & 15h_2 & 20h_3 & 15h_4 & 6h_5 & h_6 \\ h_0 & 7h_1 & 21h_2 & 35h_3 & 35h_4 & 21h_5 & 7h_6 & h_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_7 \\ g_6 \\ g_5 \\ g_4 \\ g_3 \\ g_2 \\ g_1 \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0(m, n) \\ C_1(m, n) \\ C_2(m, n) \\ C_3(m, n) \\ C_4(m, n) \\ C_5(m, n) \\ C_6(m, n) \\ C_7(m, n) \end{bmatrix}, \quad m = n \quad (13a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 2p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_0 & 3p_1 & 3p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & 4p_1 & 6p_2 & 4p_3 & p_4 \\ 0 & 0 & p_0 & 5p_1 & 10p_2 & 10p_3 & 5p_4 & p_5 \\ 0 & p_0 & 6p_1 & 15p_2 & 20p_3 & 15p_4 & 6p_5 & p_6 \\ p_0 & 7p_1 & 21p_2 & 35p_3 & 35p_4 & 21p_5 & 7p_6 & p_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_7 \\ g_6 \\ g_5 \\ g_4 \\ g_3 \\ g_2 \\ g_1 \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0(m, n) \\ C_1(m, n) \\ C_2(m, n) \\ C_3(m, n) \\ C_4(m, n) \\ C_5(m, n) \\ C_6(m, n) \\ C_7(m, n) \end{bmatrix}, \quad m \neq n \quad (13b)$$

其中  $g_i$ ,  $h_i$ ,  $p_i$ ,  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) 分别是  $g_0$ ,  $h_0$ ,  $p_0$ ,  $C_0$  的  $i$  阶导数。同理可以对磁流阻抗矩阵  $D_0(m, n)$  进行求导。

### 3 计算结果与分析

在本文算例中, 泰勒级数取为 7 阶, Padé 逼近取 ( $L=4, M=3$ ), 矩量法计算步长 0.1 GHz, AWE 计算步长 0.01 GHz, 离散步长  $\Delta C = \lambda/10$ 。

**算例 1** 半径为  $a = 3$  mm 的 DNG 媒质的无限长圆柱, 在 TM 平面波垂直照射下, DNG 媒质参数分别取  $\Gamma_e = \Gamma_m = 0$ ,  $\omega_e = \omega_m = 266.5 \times 10^9$  rad/s 和  $\Gamma_e = \Gamma_m = 10 \times 10^9$  Hz,  $\omega_e = \omega_m = 266.5 \times 10^9$  rad/s; 计算频带分别为 18 GHz~22 GHz 和 8 GHz~12 GHz, 中心频率分别 20 GHz 和 10 GHz; 解析解、矩量法和 AWE 计算的 RCS 对比如图 2 和图 3。

**算例 2** 边长  $a=1$  mm 双负媒质 2 维方柱, 在

场点和源点距离,  $\mathbf{n}$  为电流元的单位外法向矢量,  $\mathbf{e}_r$  为场点至源点的单位矢量。

由于  $\epsilon$ 、 $\mu$  都是关于频率的复杂函数, 如果将 DNG 媒质的本构关系式代入到阻抗元素表达式后, 直接对阻抗元素进行求导, 求导工作将非常繁琐, 高阶导数将很难实现。本文采用以下处理: 令  $g_0 = (\eta_1/\eta_0)(k_1/4)\Delta C$ ,  $h_0 = (1 - (j2/\pi)\ln(\gamma k_1 \Delta C / (4\epsilon)))$ ,  $p_0 = (H_0^{(1)}(k_1 r) - jH_0^{(2)}(k_1 r))$ 。然后利用组合的思想对阻抗元素进行求导, 从而简化了求导的复杂过程。得出阻抗元素及其各阶导数的矩阵表达如下:

TM 高斯脉冲平面波垂直照射下, 矩量法和 AWE 计算的 RCS 对比。计算频带在 8 GHz~12 GHz, 中心频率在 10 GHz, 双负媒质参数分别取  $\Gamma_e = \Gamma_m = 0$ ,  $\omega_e = \omega_m = 266.5 \times 10^9$  rad/s 和  $\Gamma_e = \Gamma_m = 10 \times 10^9$  Hz,  $\omega_e = \omega_m = 266.5 \times 10^9$  rad/s。计算结果如图 4 和图 5。

从图 2~图 5 的计算结果可以清晰看出: AWE 技术能很好逼近双负媒质的 MOM 逐点计算解; 泰勒级数展开和 Padé 逼近都在一定的频带内和矩量法解相吻合, 但 Padé 逼近比泰勒展开近似频带更宽, 与理论分析相一致, 达到了预期的效果。表 1 表明 AWE 能更有效计算双负媒质的宽频 RCS 频率响应, 计算效率比矩量法逐点计算大大提高。

### 4 结论

本文利用 AWE 计算了 DNG 媒质的宽带 RCS 频率响应, 研究了 DNG 媒质在给定频段电磁散射

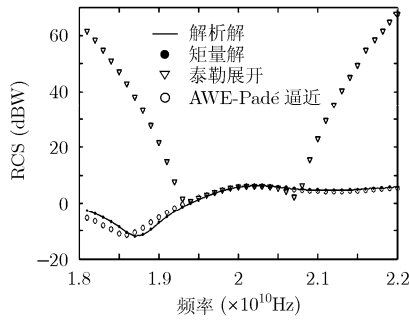


图 2 双负媒质圆柱 RCS 比较 ( $\Gamma_e = \Gamma_m = 0, \omega_e = \omega_m = 266.5 \times 10^9 \text{ rad/s}$ )

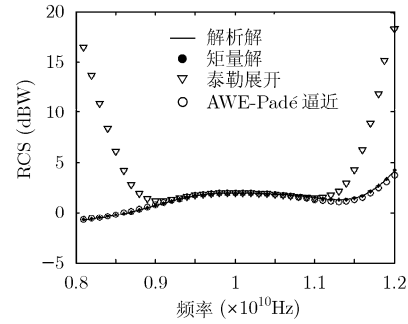


图 3 双负媒质圆柱 RCS 比较 ( $\Gamma_e = \Gamma_m = 10 \times 10^9 \text{ Hz}, \omega_e = \omega_m = 266.5 \times 10^9 \text{ rad/s}$ )

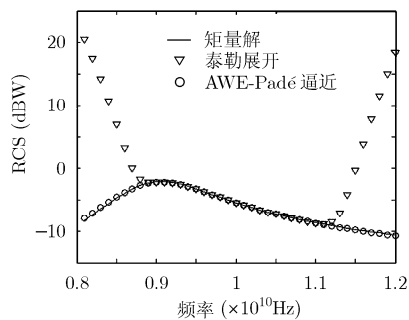


图 4 双负媒质方柱 RCS 比较 ( $\Gamma_e = \Gamma_m = 0, \omega_e = \omega_m = 266.5 \times 10^9 \text{ rad/s}$ )

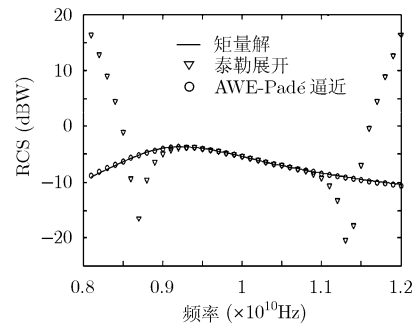


图 5 双负媒质方柱 RCS 对比较 ( $\Gamma_e = \Gamma_m = 10 \times 10^9 \text{ Hz}, \omega_e = \omega_m = 266.5 \times 10^9 \text{ rad/s}$ )

表 1 MOM 和 AWE 计算效率对照表

	图 2	图 3	图 4	图 5
MOM 耗时(s)	810.454	987.60	335.39	384.16
AWE 耗时(s)	120.78	130.13	47.10	48.12
提高倍数	6.7	7.6	7.1	8.0

特性。首先推导了基于 Drude 模型 DNG 媒质的 PMCHWT 方程, 然后利用 PMCHWT 方程计算出单频率的极化电流, 再进行泰勒展开, 计算出宽频率的极化电流, Padé 逼近进一步拓宽有效计算的频带, 最后计算出宽频带的 RCS 频率响应。计算实例表明, AWE 比 MOM 计算效率更高。利用组合思想分化求导繁琐过程, 精确计算了阻抗矩阵元素的高阶导数。

### 参考文献

[1] Harrington R F. Field Computation by Moment Methods. New York: MacMillan, 1968: 28-62.  
 [2] Erdemli Y E, Gong J, and Reddy C J, et al. Fast RCS pattern fill using AWE technique [J]. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 1998, 46(11): 1752-1753.  
 [3] Veselago V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  [J]. *Soviet Physics-Uspekh*, 1968, 10(4): 509-514.  
 [4] Ni J X, Song J M, and Shu W W. Propagation characteristics

and power transmission in shielded microstrip lines with double negative medium[C]. *Antennas and Propagation Society International Symposium*, Charleston SC, 2009: 1-4.

[5] 王茂球, 徐军, 魏兵, 葛德彪. 双负介质覆盖导体球宽带散射特性分析[J]. *电子科技大学学报*, 2007, 36(5): 880-882.  
 [6] 段梦蛟, 文光俊, 邵振海, 谢康. 负折射率媒质雷达散射特性分析[J]. *强激光与粒子束*, 2009, 21(6): 871-874.  
 [7] Simovski C R. Analytical modelling of bulk double-negative metamaterials[C]. *Electromagnetics in Advanced Applications*, Torino, 2009: 860-862.  
 [8] Ziolkowski R W and Henyemen E. Wave propagation in media having negative permittivity and permeability [J]. *Physical Review E*, 2001, 64(5): 1-15.  
 [9] Karkkainen M K and Maslovski S I. Wave propagation, refraction, and focusing phenomena in Lorentzian double-negative materials:a theoretical and numerical study [J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2003, 37(1): 4-7.  
 [10] Zhao W, Li L W, and Xiao K. Analysis of electromagnetic scattering and radiation from finite microstrip structures using an EFIE-PMCHWT formulation [J]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2010, 58(7): 2468-2473.

孙玉新: 男, 1985 年生, 硕士, 研究方向为计算电磁学和射频微波电路。  
 陈明生: 男, 1981 年生, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为计算电磁学。  
 吴先良: 男, 1955 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算电磁学、天线与电波传播等。