

图像恢复的小波域加速 Landweber 迭代阈值方法

张伟斌^{①②} 冯象初^{*①} 王卫卫^①

^①(西安电子科技大学理学院 西安 710071)

^②(宁夏大学数学计算机学院 银川 750021)

摘 要: 该文利用对忠诚项的二次逼近方法, 提出了一种小波域加速 Landweber 迭代阈值算法。该算法的每次迭代是对前两次迭代结果的线性组合做阈值处理。与标准的迭代阈值算法相比, 该方法收敛速度更快。由于参数的可选择性, 新算法更有灵活性。数值实验表明新算法能够有效地提高恢复图像的质量, 是一种行之有效的图像恢复方法。

关键词: 图像恢复; 加速 Landweber 迭代; 小波; 阈值算法; 图像去模糊

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)02-0342-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00335

Accelerated Landweber Iterative Thresholding Algorithm in Wavelet Domain for Image Restoration

Zhang Wei-bin^{①②} Feng Xiang-chu^① Wang Wei-wei^①

^①(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

^②(School of Mathematics and Computer, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: An accelerated Landweber iterative thresholding algorithm in wavelet domain is proposed by using quadratic approximation of the fidelity term. In this algorithm, each iterate depends on a linear combination of the previous two iterates. Comparing with the standard iterative thresholding algorithm, the proposed algorithm is more effective and more flexible due to the alternatives of parameter. The numerical experiments show that the algorithm can improve the quality of the restored image effectively.

Key words: Image restoration; Accelerated Landweber iterative; Wavelet; Thresholding algorithm; Image deblurring

1 引言

图像恢复是图像处理中最基本的问题之一。其目标是由观测到的退化图像重建原来的图像。从数学的角度出发, 图像恢复问题是一个不适定的线性逆问题。其数学模型为: $f = Au + n$, 其中 A 是有界线性算子, f 是观察到的图像函数, u 是原图像, n 是可加性的噪声函数。特别地, 当 A 等于恒等算子时, 问题表现为图像去噪(denoising)。当 A 不等于恒等算子时, 问题表现为图像去模糊(deblurring)。此时 A 被称为模糊核函数。

近几年来, 变分方法已经成为图像处理领域的一种重要工具^[1-3]。为了有效求解图像恢复问题, 一般采取正则化方法处理, 即对问题的解做适当的先验约束后, 再来求解。文献[4]中, 作者讨论了如

下基于稀疏约束的线性逆问题模型: $\min_u [(\beta/2)$

$\|Au - f\|_2^2 + \sum_{\lambda} w_{\lambda} |u_{\lambda}|^p]$, 其中 $\{u_{\lambda}\}$ 是解函数 u

在某个正交基下的展开系数, $\{w_{\lambda}\}$ 是加权常数, β 是正常数, $1 \leq p \leq 2$ 。在文献[4]中, 利用替代泛函(surrogate functional)方法可以得到如下的迭代阈值算法(iterative shrinkage/thresholding algorithm, 简记为 IST): $u^{n+1} = S_{\lambda}(u^n + A^*(f - Au^n))$ 。该方法实质是对 u^n 做 Landweber 迭代后再做阈值处理。类似的方法在压缩感知的重构算法中也有应用^[5-7]。然而, IST 方法的缺点是收敛速度比较慢^[8]。因此, 对上述算法给出有效的加速方法显得十分必要。最近, 一些学者讨论了有关迭代阈值的加速方法^[8-14]。例如, 文献[9]借鉴线性代数中求解线性方程组的迭代方法建立了一种两步迭代阈值方法(TwIST)。算法如下: $u^{n+1} = (1 - \alpha)u^{n-1} + (\alpha - \beta)u^n + \beta\Gamma_t(u^n)$ 其中 $\Gamma_t(u) = S_t(u + A^*(f - Au))$, S_t 代表阈值算子。其实质是先对第 n 次结果做迭代阈值,

2010-04-01 收到, 2010-09-02 改回

国家自然科学基金(NSFC 60872138)资助课题

*通信作者: 冯象初 xcfeng@mail.xidian.edu.cn

利用两次处理的结果 u^{n-1} , u^n 实现加速收敛。因此, TwIST 方法实际是一种空域的加速方法。文献[10]介绍了一种称为区域分解方法的加速算法。其思想是通过将指标集做适当的分解, 将一个有多步迭代的大型问题分解为几个小的子问题来处理, 从而达到加速收敛和减少计算代价的目的。Daubechies 等人^[11]将迭代阈值方法推广为投影梯度方法, 通过引入自适应的下降参数(descent parameter)的方法实现加速收敛。在压缩感知重构中, 文献[12]讨论了基于 Curvelet 阈值的两步迭代加速方法。

本文采用对忠诚项做二次逼近的方法, 引入新的替代泛函, 提出了一种新的加速迭代阈值方法。该加速迭代阈值方法本质上是小波系数的加速 Landweber 迭代阈值。另外, 由于新算法中含有可选的参数, 选择特殊的参数值时, IST 方法是新算法的一种特殊情况。因此, 新算法更加灵活。数值实验表明新方法可以有效地提高恢复图像的质量。

2 加速 Landweber 迭代阈值方法

考虑如下问题:

$$\min_u \left\{ J(u) = \frac{\beta}{2} \| Au - f \|_2^2 + \sum_{\lambda} w_{\lambda} |u_{\lambda}|^p \right\} \quad (1)$$

取正交小波作为正交基时, 对 u 的稀疏约束等价于 u 的 Besov 模 $\|u\|_{B_{p,p}^r}$, w_{λ} 根据 p 的取值不同而不同。为了方便, 令 $F(u) = (\beta/2) \| Au - f \|_2^2$, $G(u) = \sum_{\lambda} w_{\lambda} |u_{\lambda}|^p$ 。引入替代泛函

$$J^{\text{sur}}(u, v, a) = \frac{\beta}{2} \| Av - f \|_2^2 + \beta(u - v, A^*(Av - f)) + \frac{L\beta}{2} \| u - v \|_2^2 + G(u) - \frac{s}{2} \| u - a \|_2^2 \quad (2)$$

其中 L, s 是常数。 $(\beta/2) \| Av - f \|_2^2 + \beta(u - v, A^*(Av - f)) + (L\beta/2) \| u - v \|_2^2$ 可以看成是 $F(u)$ 的二次逼近展开项。当 $v = a = u$ 时, 有 $J^{\text{sur}}(u, u, u) = J(u)$ 。文献[4]中所引入的替代泛函为

$$\Phi_{w,p}^{\text{sur}}(u, a) = \| Au - f \|_2^2 + \mu \sum_{\lambda} w_{\lambda} |u_{\lambda}|^p + \| u - a \|_2^2 - \| A(u - a) \|_2^2$$

显然, 新的替代泛函式(2)与文献[4]的替代泛函是不同的。

对替代泛函式(2)整理可以得到

$$J^{\text{sur}}(u, v, a) = \frac{\beta}{2} \| Av \|^2 - \beta(Av, f) + \frac{\beta}{2} \| f \|^2 + \beta(u - v, A^*(Av - f)) + \frac{L\beta}{2} \| u \|^2 - L\beta(u, v) + \frac{L\beta}{2} \| v \|^2 + G(u) - \frac{s}{2} \| u \|^2 + s(u, a) - \frac{s}{2} \| a \|^2 \quad (3)$$

在式(3)中, 令 $v = u^n$, $a = u^{n-1}$, 并且将函数在正交小波基下做展开, 则有

$$J^{\text{sur}}(u, u^n, u^{n-1}) = \frac{(L\beta - s)}{2} \sum_{\lambda} u_{\lambda}^2 + \sum_{\lambda} u_{\lambda} (\beta(A^*(Au^n - f))_{\lambda} - L\beta u_{\lambda}^n + s u_{\lambda}^{n-1}) + \sum_{\lambda} w_{\lambda} |u_{\lambda}|^p + \frac{\beta}{2} (\| Au^n \|^2 + \| f \|^2) - \beta(u^n, A^*(Au^n - f)) + \frac{L\beta}{2} \| u^n \|^2 - \frac{s}{2} \| u^{n-1} \|^2$$

其中 $u_{\lambda}, u_{\lambda}^n, u_{\lambda}^{n-1}$ 分别表示 u, u^n, u^{n-1} 的小波系数。对 $J^{\text{sur}}(u, u^n, u^{n-1})$ 关于 u_{λ} 求梯度可以得到

$$\frac{\partial J(u_{\lambda}, u_{\lambda}^n, u_{\lambda}^{n-1})}{\partial u_{\lambda}} = (L\beta - s)u_{\lambda} + \beta(A^*(Au^n - f))_{\lambda} - L\beta u_{\lambda}^n + s u_{\lambda}^{n-1} + \partial G(u_{\lambda})$$

令该梯度等于零得

$$(L\beta - s)u_{\lambda} = (L\beta - s)u_{\lambda}^n + s(u_{\lambda}^n - u_{\lambda}^{n-1}) - \beta(A^*(Au^n - f))_{\lambda} - \partial G(u_{\lambda})$$

选择合适的常数 $\beta > 0$, 使得 $L\beta - s > 0$ (即只要 $\beta > s/L, L > 0$), 则有

$$u_{\lambda} = u_{\lambda}^n + \frac{s}{L\beta - s} (u_{\lambda}^n - u_{\lambda}^{n-1}) + \frac{\beta}{L\beta - s} (A^*(f - Au^n))_{\lambda} - \frac{1}{L\beta - s} \partial G(u_{\lambda})$$

令 $\alpha = \frac{s}{L\beta - s} \geq 0$, $\gamma = \frac{\beta}{L\beta - s}$, $w = \frac{1}{L\beta - s}$, 得到迭代阈值形式

$$u_{\lambda}^{n+1} = S_{w,p}(u_{\lambda}^n + \alpha(u_{\lambda}^n - u_{\lambda}^{n-1}) + \gamma(A^*(f - Au^n))_{\lambda}) \quad (4)$$

其中 w 是阈值参数, $S_{w,p}$ 表示阈值算子。容易计算知, 当 $p = 1$ 时, 取 $w_{\lambda} = 1$, 则 $S_{w,p}$ 是通常的软阈值算子。综上所述, 我们给出小波域加速 Landweber 迭代阈值算法:

- (1) 初始: $u^0 = f$, $u_{\lambda}^1 = S_{w,p}(u_{\lambda}^0 + (A^*(f - Au^0))_{\lambda})$
- (2) 加速迭代阈值: 对 $n = 1, 2, \dots$, 计算 $u_{\lambda}^{n+1} = S_{w,p}(u_{\lambda}^n + \alpha(u_{\lambda}^n - u_{\lambda}^{n-1}) + \gamma(A^*(f - Au^n))_{\lambda})$
- (3) 停止迭代: 对 $\varepsilon > 0$, 当 $\| u^{n+1} - u^n \|_2^2 < \varepsilon$ 时, 停止迭代。

从形式上分析, 文献[4]的方法是本文算法的特殊情况($\alpha = 0, \gamma = 1$)。就本质而言, 文献[4]的方法是对 u^n 的小波系数做 Landweber 迭代后再阈值, 本文的算法是对 Landweber 迭代结果做(两步)半迭代^[15]加速后再阈值。根据文献[15], 两步半迭代方法是对 Labdweber 迭代的一种多项式加速。因此, 本文的算法比文献[4]的方法收敛得更快一些。我们

的方法与文献[9]加速的方式不同。具体地说,在文献[9]的算法中如果令 $v^n = \Gamma_t(u^n)$,则文献[9]的两步迭代阈值方法相当于对 u^{k-1}, u^k, v^k 做加权平均,就阈值对象本身而言并没有加速处理。本文的方法是在变换域上加速后,再做阈值处理。由于阈值算子是非线性的,二者是不同的。

3 数值实验及分析

本节给出几个利用新算法实现图像恢复的例子来证明该算法的有效性。选取 256×256 图像,采用 ‘db1’ 小波,对其做小波分解。用 SNR (Signal-to-Noise Ratio), ISNR(Improvement in SNR)来衡量图像恢复的质量,定义如下:

$$\text{SNR} = 10 \lg \frac{\|f\|_2^2}{\|f-h\|_2^2}, \quad \text{ISNR} = 10 \lg \frac{\|f-g\|_2^2}{\|f-h\|_2^2}$$

其中 f, g 和 h 分别表示原图像,被模糊的含噪声图像和恢复的图像。

在第 1 个实验中,对 Lena 图进行半径为 6 的 out-of-focus 模糊,并且增加方差为 0.025 的高斯噪声, $\text{SNR} = 10.1519$ dB。图 1 给出用 IST 方法, TwIST 方法和本文的方法去模糊的结果比较。(c) 是 IST 方法迭代 360 次去模糊的结果, $\text{SNR} = 23.0029$ dB, $\text{ISNR} = 12.7946$ dB。(d) 是 TwIST 方法迭代 341 次的处理的结果, $\text{SNR} = 30.9089$ dB, $\text{ISNR} = 20.7570$ dB。(e) 是本文的方法 ($\alpha = 0.95, \gamma = 3.2$) 迭代 328 次的结果, $\text{SNR} = 32.6408$ dB, $\text{ISNR} = 22.4525$ dB。从实验数据可以看出,本文的方法恢复效果好于 IST 方法。与 TwIST 方法相比,在大致相同的迭代次数后,本文的方法恢复图像的 SNR 和 ISNR 高于 TwIST 方法。

第 2 个实验对原图像做运动模糊 ($\text{Len} = 50, \text{Theta} = 45$), 增加方差为 0.025 的高斯噪声。带噪的模糊图像的 $\text{SNR} = 12.7041$ dB。图 2 给出用 IST 方法和本文方法处理的结果。(a) 是原图像。(b) 是带噪的模糊图像。(c) 是 IST 方法去模糊的结果。(d) 是本文的方法 ($\alpha = 0.9, \gamma = 3.2$) 处理的结果。本文的方法所恢复的结果视觉效果好于 IST 的结果。

第 3 个实验对 Text 图像做高斯模糊, $\text{HSIZE} = 7, \text{SIGMA} = 5$ 。噪声方差为 0.05。带噪模糊图像的 $\text{SNR} = 1.1005$ dB。图 3 中, (c) 是 IST 方法迭代 745 次后的结果 ($\text{SNR} = 7.9016$ dB)。(d) 是本文的方法 ($\alpha = 0.9, \gamma = 3.2$) 迭代 564 次的结果 ($\text{SNR} = 13.5380$ dB)。本文的方法不仅迭代次数少,而且恢复图像的质量较高。

最后,为了说明本文方法的收敛性,在图 4 中绘出第 1 个实验中用本文的方法去模糊时, $\|u^n - u^{n-1}\|_2^2$ 随着迭代次数 n 的变化曲线。图 4 中,坐

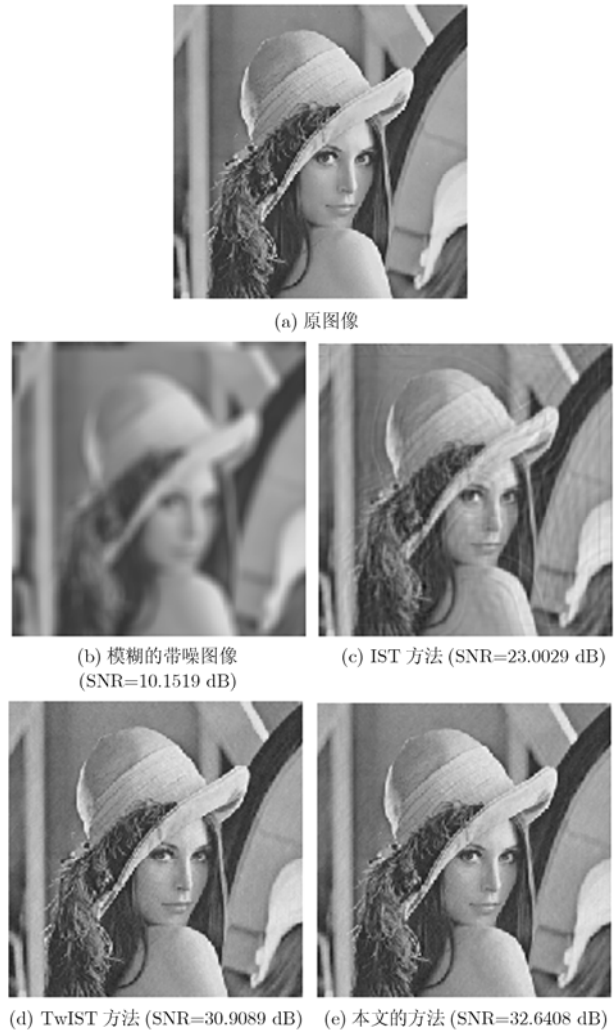


图 1 去 Out-of-focus 模糊

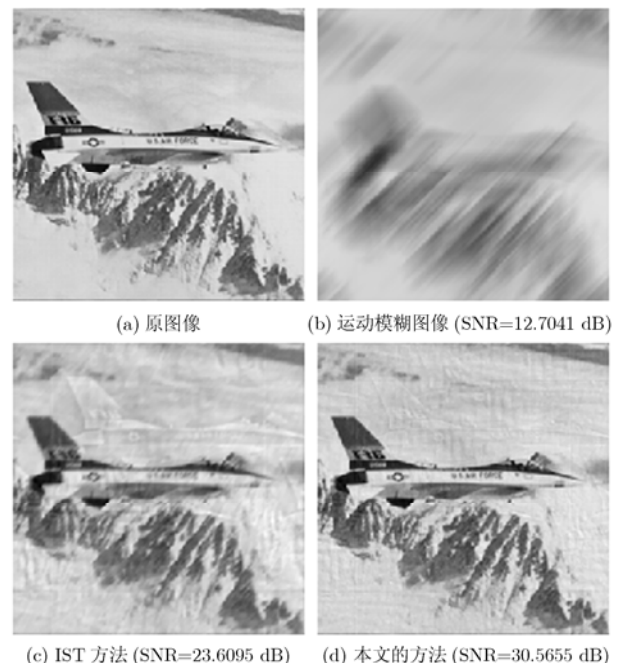


图 2 去运动模糊



图 3 去高斯模糊

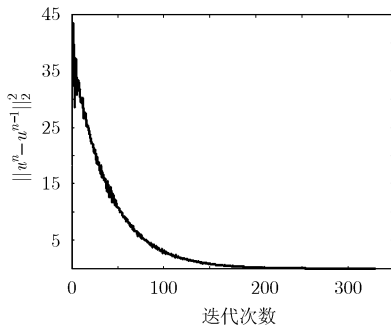


图 4 $\|u^n - u^{n-1}\|_2^2$ 随着迭代次数的变化曲线

标横轴表示迭代次数，坐标纵轴表示 $\|u^n - u^{n-1}\|_2^2$ 。由图可见，当迭代次数不断增大时， $\|u^n - u^{n-1}\|_2^2$ 逐渐下降，说明对于给定的 $\epsilon > 0$ ，算法可以在某次迭代后，达到给定的停止标准。由此可见，在迭代过程中算法是收敛的。当然，严格的理论证明我们将进一步研究。为便于比较，取定 $\epsilon = 0.01$ ，表 1 列出 3 个实验用不同方法恢复图像迭代达到停止标准时实验数据的对比。新方法达到停止标准所需的迭代次数少于 IST 方法，SNR 和 ISNR 有明显提高，图像恢复的视觉效果更好一些。

4 结论

本文利用对忠诚项的二次逼近方法，引入新的替代泛函，得到一个快速的迭代阈值算法。该算法的实质是在小波变换域上的加速 Landweber 迭代阈值。数值实验表明该方法与 IST 方法相比收敛速

表 1 不同方法恢复图像迭代达到停止标准时实验数据的对比

实验	方法	SNR(dB)	ISNR(dB)	达到停止标准所需的迭代次数
实验 1	IST 方法	23.0029	12.7946	360
	本文的方法	32.6408	22.4525	328
实验 2	IST 方法	23.6095	10.8987	585
	本文的方法	30.5655	17.8597	262
实验 3	IST 方法	7.9016	6.8014	745
	本文的方法	13.5576	12.4318	562

度有明显改进，能够有效地提高恢复图像的质量。而且，由于算法中参数可选择不同，新算法更灵活。进一步，我们将研究关于算法的理论性分析和算法在其它图像处理问题中的应用效果。

参考文献

- [1] Chan T F and Shen Jian-hong. Image Processing and Analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods[M]. SIAM Publisher, Philadelphia, 2005, 207-233.
- [2] Chan T F and Shen Jian-hong. Theory and computation of variational image deblurring[R]. IMS Lecture Notes Series: Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, "Mathematics and Computation in Imaging Science and information Processing", World Scientific Publishing Co., 2007, Vol.11: 93-130.
- [3] 冯象初, 王卫卫. 图像处理的变分和偏微分方程方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 20-100.
- [4] Feng Xiang-chu and Wang Wei-wei. Variational and Partial Differential Equation Method in Image Processing. Beijing: Science Press, 2009: 20-100.
- [5] Daubechies I, Defrise M, and Demol C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. *Communication on Pure & Applied Mathematics*, 2004, 57(11): 1413-1457.
- [6] Blumensath T and Davies M E. Iterative thresholding for sparse approximation[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5/6): 629-654.
- [7] Blumensath T and Davies M E. Normalised iterative hard thresholding guaranteed stability and performance[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 298-309.
- [7] Fornasier M and Rauhut H. Iterative thresholding algorithm [J]. *Applied. Compute Harmon Analysis*, 2008, 25(2): 187-208.

- [8] Bredies K and Lorenz D. Linear convergence of iterative soft-thresholding[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5/6): 813-837.
- [9] Bioucas Dias J M and Figueiredo M A T. A new TwIST: two-step iterative Shrinkage/Thresholding algorithm for image restoration[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(12): 2980-2991.
- [10] Fornasier M. Domain decomposition methods for linear inverse problems with sparsity constraints[J]. *Inverse Problems*, 2007, 23(6): 2505-2526.
- [11] Daubechies I, Fornasier M, and Loris I. Accelerated projected gradient method for linear inverse problems with sparsity constraints[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5/6): 746-792.
- [12] Ma Jian-wei. Improved iterative curvelet thresholding for compressed sensing. <http://www.dsp.ece.rice.edu/files/cs/ISTcs2.pdf>, Preprint, 2009.
- [13] Vonesch C and Unser M. A fast iterative thresholding algorithm for wavelet-regularized deconvolution[J]. *IEEE Transactions on Image Process*, 2008, 17(4): 539-549.
- [14] Beck A and Teboulle M. A fast iterative shrinkage thresholding algorithm for linear inverse problems[J]. *SIAM J. Image Sciences*, 2009, 2(1): 183-202.
- [15] 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 93-120.
Xiao Ting-yan, Yu shen-gen, and Wang Yan-fei. Numerical Method in Inverse Problems[M]. Beijing: Science Press, 2003: 93-120.
- 张伟斌: 男, 1973 年生, 副教授, 博士, 研究方向为变分方法和偏微分方程在图像处理中的应用.
- 冯象初: 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为多尺度几何分析、变分方法和偏微分方程在图像处理中的应用.