

## 二维分数阶卡尔曼滤波及其在图像处理中的应用

左 凯 孙同景 李振华 陶 亮  
(山东大学控制科学与工程学院 济南 250061)

**摘 要:** 该文研究了二维分数阶卡尔曼滤波及其在图像增强与滤波中的应用问题。首先基于分数微积分的定义,建立了二维线性离散系统的分数阶差分状态空间模型。然后,提出了一种可应用于图像信息处理的二维分数阶卡尔曼滤波算法,并通过实验验证了该文提出算法的有效性。仿真结果证明,该算法增强了图像中的细节特征,同时削弱了图像中的背景噪声。

**关键词:** 图像增强; 图像去噪; 分数阶离散状态空间; 二维分数阶卡尔曼滤波

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)12-3027-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00232

## 2D Fractional Kalman Filter and Its Application to Image Process

Zuo Kai Sun Tong-jing Li Zhen-hua Tao Liang

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

**Abstract:** This paper deals with the issue of 2D Fractional Kalman Filter (2DFKF) and its applications to image enhancement and recognition. With the introduction of 2D fractional differential, 2DFKF recursive equation is first presented. Next, a state space model of a image given and, based on this, the 2DFKF algorithm is proposed. Finally, an example is given to demonstrate the effectiveness of proposed algorithm and the simulation result shows that the details of the image are enhanced, while the background noise of the image is efficiently attenuated.

**Key words:** Image enhancement; Image denoising; Discrete fractional state-space systems; 2D Fractional Kalman Filter

### 1 引言

将卡尔曼滤波器扩展到二维空间,可推广应用于图像去噪。但是对于对比度低、边缘模糊、背景起伏大的图像,应用二维卡尔曼滤波(Two-Dimensional Kalman Filter, 2DKF)在处理图像过程中容易导致细节与边缘等重要信息损失。如何确保图像滤波过程中的细节信息保护与增强,同时有效滤除噪声一直是该领域的热点研究问题。另一方面,将分数微积分应用于图像处理,可以有效地增强图像的纹理特征,主要方法有分数傅里叶变换(Fractional Fourier Transform, FRT)、分数阶微分梯度算子、分数阶微分掩模等<sup>[1-5]</sup>。但上述方法在增强图像的同时,会降低图像的信噪比。2006年文献[6,7]将分数阶微积分引入卡尔曼滤波,提出了分数阶卡尔曼滤波算法(Fractional Kalman Filter, FKF),提高了信号估计精度,但仅考虑了一维空间,对于二维空间模型描述的图像信号系统的高性能滤波问题尚待进一步深入研究。本文将综合应用分数微积分和 2DKF,针对 2DKF 在去噪过程中图像纹

理细节及边缘信息模糊化的问题,研究提出了二维分数阶卡尔曼滤波算法(Two-Dimensional Fractional Kalman Filter, 2DFKF),并将该算法对加噪图像进行去噪和增强处理,验证算法的有效性。

### 2 二维线性离散分数阶差分状态空间模型

考虑如下传统的二维线性离散状态空间模型:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}(m, n) &= \sum_{k, l \in W} \mathbf{A}_{kl} \mathbf{s}(m-k, n-l) + \mathbf{B} \mathbf{u}(m, n) + \mathbf{w}(m, n) \\ \mathbf{r}(m, n) &= \mathbf{C} \mathbf{s}(m, n) + \mathbf{v}(m, n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{s}(m, n)$  和  $\mathbf{r}(m, n)$  为系统状态和观测值,  $\mathbf{u}(m, n)$  为控制输入,  $\mathbf{w}(m, n)$  为系统噪声,  $\mathbf{v}(m, n)$  为观测噪声。  $\mathbf{A}_{kl}$  为相应的系统参数矩阵,  $\mathbf{C}$  为转移矩阵,  $W$  为邻域宽度。

根据 Grunwald-Letnikov(G-L) 的分数微积分定义<sup>[8]</sup>,可推导出系统式(1)中的  $a$  阶分数阶差分状态方程为

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{kl} \mathbf{s}(m-k, n-l) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1-k, n-1-l} \mathbf{A}_{kl}^j \mathbf{s}(m-1-k-j, n-1-l-j) \quad (2) \end{aligned}$$

其中

2010-03-11 收到, 2010-09-27 改回

国防科工委基础科研(B142008.0209-08)资助课题

通信作者: 左凯 zuokai@tom.com

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{kl}^0 &= \mathbf{A}_{kl}, & j &= 0 \\ \mathbf{A}_{kl}^j &= \begin{cases} \text{diag} \left[ -(-1)^{j+1} \begin{pmatrix} a_i^{mn} \\ j+1 \end{pmatrix} \right], & k=l; \\ \text{diag} \left[ -(-1)^{j+1} \begin{pmatrix} a_i^m \\ j+1 \end{pmatrix} \right], & k>l; \\ \text{diag} \left[ -(-1)^{j+1} \begin{pmatrix} a_i^n \\ j+1 \end{pmatrix} \right], & k<l; \end{cases} & j > 0 \\ \begin{pmatrix} a_i^z \\ j \end{pmatrix} &= \frac{a_i^z (a_i^z - 1) \cdots (a_i^z - j + 1)}{j!}, & j &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$a_i^z \in R^+$  ( $z = m, n, mn$ ) 为  $\mathbf{s}_i(m, n)$  的分数阶数,  $j$  为数据序列长度。注意到, 随着数据序列长度  $j$  增加, 式(2)的计算量将不断增大。因此, 在保证精度的情况下, 通常需要将回溯计算长度  $L$  加以限定。

将式(2)代入系统式(1)则得二维线性离散分数阶差分状态空间为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s}(m, n) &= \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k, n-1-l} \mathbf{A}_{kl}^j \mathbf{s}(m-1-k-j, n-1-l-j) + \mathbf{B}\mathbf{u}(m, n) + \mathbf{w}(m, n) \\ \mathbf{r}(m, n) &= \mathbf{C}\mathbf{s}(m, n) + \mathbf{v}(m, n) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

### 3 二维分数阶卡尔曼滤波

基于系统描述式(3), 2DFKF 算法为

$$\hat{\mathbf{s}}(m, n) = \tilde{\mathbf{s}}(m, n) + \mathbf{K}(m, n)[\mathbf{r}(m, n) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{s}}(m, n)] \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}(m, n) &= \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k, n-1-l} \mathbf{A}_{kl}^j \tilde{\mathbf{s}}(m-1-k-j, \\ & n-1-l-j) + \mathbf{B}\mathbf{u}(m, n) \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\mathbf{K}(m, n) = \tilde{\mathbf{P}}(m, n) \mathbf{C}^T [\mathbf{C}\tilde{\mathbf{P}}(m, n) \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{m,n}]^{-1} \quad (4c)$$

$$\mathbf{P}(m, n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(m, n) \mathbf{C}] \tilde{\mathbf{P}}(m, n) \quad (4d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(m, n) &= \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k, n-1-l} \mathbf{A}_{kl}^j \mathbf{P}(m-k, n-l) \mathbf{A}_{kl}^{jT} \\ &+ \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k, n-1-l} \mathbf{A}_{kl}^j \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}(m-1-k-j, \\ & n-1-l-j) \tilde{\mathbf{s}}(m-1-k-j, n-1-l-j)) \mathbf{A}_{kl}^{jT} + \mathbf{Q}_{m,n} \end{aligned} \quad (4e)$$

式中  $\mathbf{K}(m, n)$  为增益矩阵,  $\mathbf{R}_{m,n}$  为观测噪声方差,  $\mathbf{Q}_{m,n}$  为过程噪声方差。算法证明如下:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}(m, n) &= \arg \min_{\mathbf{s}} [(\tilde{\mathbf{s}}(m, n) - \mathbf{s}) \tilde{\mathbf{P}}^{-1}(m, n) \\ & \cdot (\tilde{\mathbf{s}}(m, n) - \mathbf{s})^T + (\mathbf{r}(m, n) - \mathbf{C}\mathbf{s}) \\ & \cdot \mathbf{R}_{m,n}^{-1} (\mathbf{r}(m, n) - \mathbf{C}\mathbf{s})^T] \end{aligned}$$

其中  $\tilde{\mathbf{s}}(m, n) = E[\mathbf{s}(m, n) | z_{-1}^*]$ ,  $\hat{\mathbf{s}}(m, n) = E[\mathbf{s}(m, n) | z^*]$ ,  $Z_{-1}^*$  和  $Z^*$  分别为前一步和当前观测序列。对上式求一阶导数, 则

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}^{-1}(m, n) (\tilde{\mathbf{s}}(m, n) - \hat{\mathbf{s}}(m, n)) \\ + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_{m,n}^{-1} (\mathbf{r}(m, n) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{s}}(m, n)) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}(m, n) &= (\tilde{\mathbf{P}}^{-1}(m, n) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_{m,n}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \\ & \cdot (\tilde{\mathbf{P}}^{-1}(m, n) \tilde{\mathbf{s}}(m, n) + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_{m,n}^{-1} \mathbf{r}(m, n)) \\ &= (\tilde{\mathbf{P}}(m, n) - \tilde{\mathbf{P}}(m, n) \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{P}}(m, n) \mathbf{C}^T \\ & + \mathbf{R}_{m,n})^{-1} \mathbf{C}\tilde{\mathbf{P}}(m, n)) (\tilde{\mathbf{P}}^{-1}(m, n) \tilde{\mathbf{s}}(m, n) \\ & + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_{m,n}^{-1} \mathbf{r}(m, n)) \end{aligned} \quad (6)$$

令  $\mathbf{K}(m, n) = \tilde{\mathbf{P}}(m, n) \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{P}}(m, n) \mathbf{C}^T + \mathbf{R}_{m,n})^{-1}$ , 由式(5)和式(6), 得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}(m, n) &= \tilde{\mathbf{s}}(m, n) + \tilde{\mathbf{P}}(m, n) \mathbf{C}^T \mathbf{R}_{m,n}^{-1} \mathbf{r}(m, n) - \mathbf{K}(m, \\ & n) \mathbf{C} - \mathbf{K}(m, n) \mathbf{C}\tilde{\mathbf{P}}(m, n) \mathbf{C}^T \mathbf{R}_{m,n}^{-1} \mathbf{r}(m, n) \\ &= \tilde{\mathbf{s}}(m, n) + \mathbf{K}(m, n) [\mathbf{r}(m, n) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{s}}(m, n)] \end{aligned}$$

式(4a)和式(4c)得证。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}(m, n) &= E[\mathbf{s}(m, n) | z_{-1}^*] \\ &= E \left[ \left( \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k, n-1-l} \mathbf{A}_{kl}^j \mathbf{s}(m-1-k-j, \right. \right. \\ & \left. \left. n-1-l-j) + \mathbf{B}\mathbf{u}(m, n) + \mathbf{w}(m, n) \right) \middle| z_{-1}^* \right] \\ &= \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k, n-1-l} \mathbf{A}_{kl}^j \hat{\mathbf{s}}(m-1-k-j, \\ & n-1-l-j) + \mathbf{B}\mathbf{u}(m, n) \end{aligned}$$

式(4b)得证。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(m, n) &= E[(\hat{\mathbf{s}}(m, n) - \mathbf{s}(m, n)) (\hat{\mathbf{s}}(m, n) - \mathbf{s}(m, n))^T] \\ &= E[(\tilde{\mathbf{s}}(m, n) + \mathbf{K}(m, n) [\mathbf{r}(m, n) - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{s}}(m, n)] \\ & - \mathbf{s}(m, n)) \times (\tilde{\mathbf{s}}(m, n) + \mathbf{K}(m, n) [\mathbf{r}(m, n) \\ & - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{s}}(m, n)] - \mathbf{s}(m, n))^T] \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(m, n) \mathbf{C}) E[(\tilde{\mathbf{s}}(m, n) - \mathbf{s}(m, n)) \\ & \cdot (\tilde{\mathbf{s}}(m, n) - \mathbf{s}(m, n))^T] \times (\mathbf{I} - \mathbf{K}(m, n) \mathbf{C})^T \\ &+ \mathbf{K}(m, n) E[\mathbf{v}(m, n) \mathbf{v}^T(m, n)] \mathbf{K}^T(m, n) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(m, n) \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{P}}(m, n) (\mathbf{I} - \mathbf{K}(m, n) \mathbf{C})^T \\ &+ \mathbf{K}(m, n) \mathbf{R}_{m,n} \mathbf{K}^T(m, n) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(m, n) \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{P}}(m, n) \end{aligned}$$

式(4d)得证。结合文献[9]提出的状态值与噪声值的协方差计算方法以及结论且设:

$$\mathbf{R}_{m,n} = E[\mathbf{v}(m,n)\mathbf{v}^T(m,n)], \mathbf{Q}_{m,n} = E[\mathbf{w}(m,n)\mathbf{w}^T(m,n)]$$

令  $\tilde{\mathbf{s}}(m,n) = \hat{\mathbf{s}}(m,n) - \mathbf{s}(m,n)$ , 则

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(m,n) &= E\left[\left(\tilde{\mathbf{s}}(m,n) - \mathbf{s}(m,n)\right)\left(\tilde{\mathbf{s}}(m,n) - \mathbf{s}(m,n)\right)^T\right] \\ &= E\left[\sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k,n-1-l} \mathbf{A}_{k,l}^j \tilde{\mathbf{s}}(m-1-k-j,n-1-l-j) \times \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k,n-1-l} \mathbf{A}_{k,l}^j \tilde{\mathbf{s}}^T(m-1-k-j,n-1-l-j)\right] + E[\mathbf{w}(m,n)\mathbf{w}^T(m,n)] \\ &= \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k,n-1-l} \mathbf{A}_{k,l}^j \mathbf{P}(m-1-k-j,n-1-l-j) \mathbf{A}_{k,l}^{jT} + \sum_{k,l=0}^W \sum_{j=0}^{m-1-k,n-1-l} \mathbf{A}_{k,l}^j \text{Cov}(\tilde{\mathbf{s}}(m-1-k-j,n-1-l-j) \times \tilde{\mathbf{s}}(m-1-k-j,n-1-l-j)) \mathbf{A}_{k,l}^{jT} + \mathbf{Q}_{m,n} \end{aligned}$$

式(4e)得证。至此, 算法证明完毕。

将 2DFKF 算法应用于图像增强和去噪, 首先要确定回溯长度  $L$  和分数阶参数  $a$ , 其次将原二维状态空间方程改写成二维线性离散分数阶差分状态空间, 然后应用算法对图像进行处理。

### 4 仿真实验

#### 4.1 回溯长度 $L$ 的确定

给出以下系统参数矩阵, 并分别令  $L = 10, 20, 50, 300$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.01 & -0.02 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [0.1 \ 0.3]$ ,

$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ , 其中  $\mathbf{N}$  为系统分数阶矩阵。对比结果见图 1, 方差  $\sigma_k$  见表 1。

由图 1 和表 1 可知, 该系统回溯长度  $L = 50$  基本上就可以满足精度。

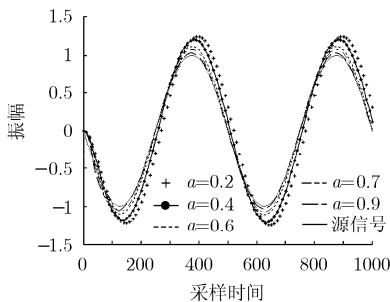


图 2 不同分数阶  $a$  输出结果对比

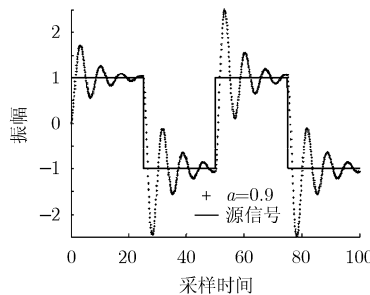


图 3  $a = 0.9$  输出结果

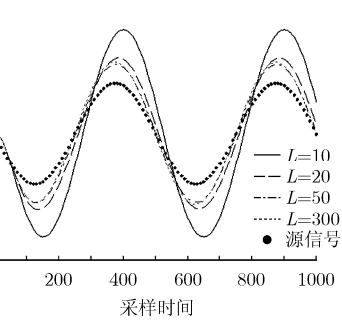


图 1 不同回溯长度  $L$  输出结果对比

表 1 不同  $L$  下的方差对比

$L$	10	20	50	100	300
$\sigma_k$	0.65073	0.1338	0.06759	0.06808	0.07621

#### 4.2 分数阶参数 $a$ 的确定

利用 4.1 节中的状态空间, 将分数阶矩阵设定为  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} a \\ 1.2 \end{bmatrix}$ ,  $a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.9$ , 考察系统误差。实验结果如图 2 所示。方差对比见表 2。

表 2 不同  $a$  下的方差对比

$a$	0.2	0.4	0.6	0.7	0.9
$\sigma_k$	0.06655	0.02586	0.00661	0.00312	0.00091

当  $a$  设定过高时, 若有阶跃信号时将会出现较大误差或系统输出将会发散, 详见图 3 和图 4。综上所述, 选择分数阶系数  $a$  介于 0.5 到 0.6 之间。

#### 4.3 图像的滤波与增强

实验采用常见的 NSHP(Non-Symmetric Half-Plane)模型用于描述图像, 邻域宽度确定为  $W = 3$ , 状态空间模型如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(m,n) &= \mathbf{A}_{0,0}\mathbf{s}(m-1,n-1) + \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{s}(m-2,n-2) \\ &\quad + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{s}(m-3,n-3) + \mathbf{A}_{1,0}\mathbf{s}(m-2,n) \\ &\quad + \mathbf{A}_{2,0}\mathbf{s}(m-3,n) + \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{s}(m-3,n-1) \\ &\quad + \mathbf{A}_{0,1}\mathbf{s}(m,n-2) + \mathbf{A}_{0,2}\mathbf{s}(m,n-3) \\ &\quad + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{s}(m-1,n-3) + \mathbf{w}(m,n) \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}(m,n) = \mathbf{H}\mathbf{s}(m,n) + \mathbf{v}(m,n)$$

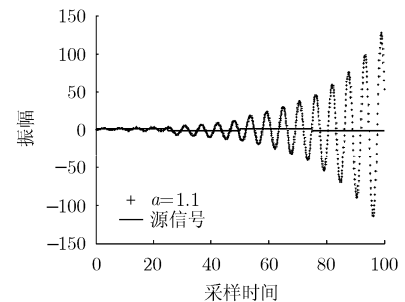


图 4  $a = 1.1$  输出结果

基于该模型，其二维线性离散分数阶差分状态空间可以直接改写为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}(m, n) = & \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{0,0}^j \mathbf{s}(m-j-1, n-j-1) \\
 & + \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{1,1}^j \mathbf{s}(m-j-2, n-j-2) \\
 & + \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{2,2}^j \mathbf{s}(m-j-3, n-j-3) \\
 & + \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{1,0}^j \mathbf{s}(m-j-2, n) \\
 & + \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{2,0}^j \mathbf{s}(m-j-3, n) + \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{2,1}^j \mathbf{s}(m-j-3, n-1) \\
 & + \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{0,1}^j \mathbf{s}(m, n-j-2) \\
 & + \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{0,2}^j \mathbf{s}(m, n-j-3) + \sum_{j=0}^{10} \mathbf{A}_{1,2}^j \mathbf{s}(m-1, n-j-3) + \mathbf{w}(m, n) \\
 \mathbf{r}(m, n) = & \mathbf{H}\mathbf{s}(m, n) + \mathbf{v}(m, n)
 \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{A}_{kl}$  通过递归最小二乘法(RLS)估计， $\mathbf{H}$  为适当维数的单位矩阵。设定回溯长度  $L = 10$ ，分数阶  $a = 0.6$ 。

使用直方图均衡化和分数阶微分掩模方法对图像增强,效果见图 5 和图 6。利用本文提出的 2DFKF 算法对加有 高斯白噪声(均值为零,方差为 0.1)的图像进行滤波增强,图 7 显示了几种滤波方法的图像滤波效果。表 3 为上述滤波方法的信噪比。

实验结果表明,二维分数阶卡尔曼滤波算法在图像去噪能力上明显优于其它传统的滤波方法,且具有提高图像细节和增强图像质量的能力。

表 3 不同滤波方法处理后的信噪比

信噪比	噪声图像	中值滤波	维纳滤波	2DKF	2DFKF
SNR(dB)	3.5029	4.3210	4.4699	6.3854	6.6512
PSNR(dB)	27.5683	28.3864	28.5353	30.4508	30.7166

### 5 结束语

本文基于分数阶微分和卡尔曼滤波原理,提出了离散状态空间的二维分数阶卡尔曼滤波算法。利用二维分数阶卡尔曼滤波算法对含有噪声的图像进行了处理。该算法有效地减弱了图像中的背景噪声,增强了图像中的细节特征,验证了算法的有效性。



图 5 无噪声条件图像增强对比



图 6 有噪声条件图像增强对比

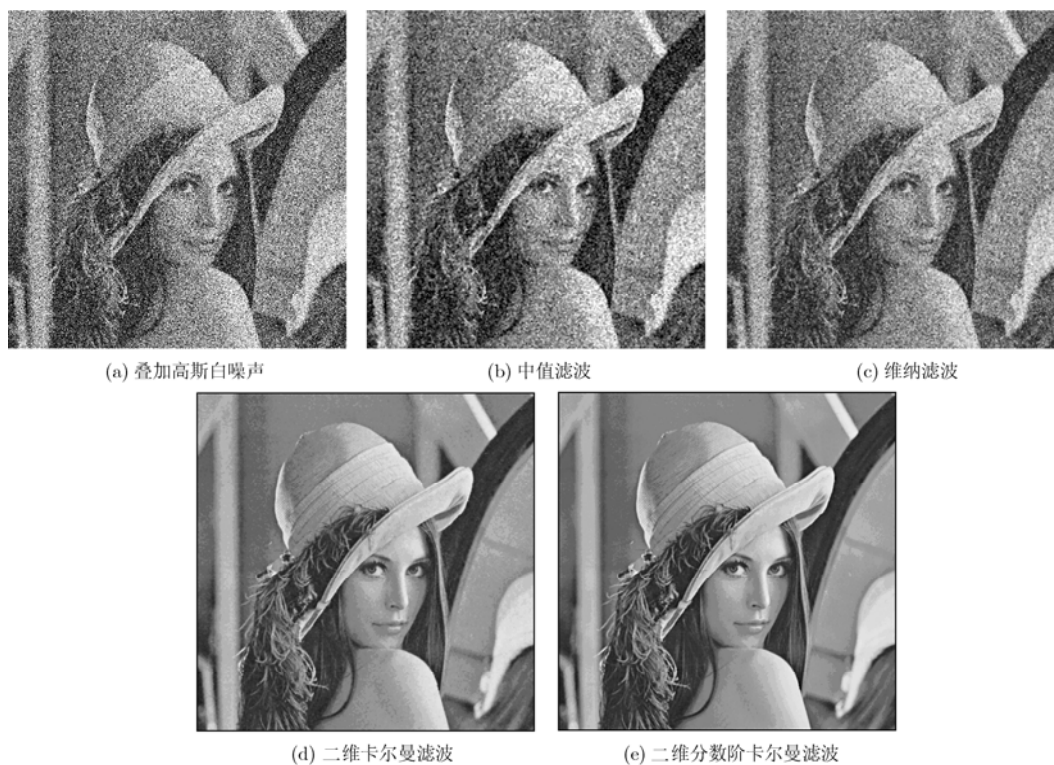


图 7 不同滤波方法处理后的图像

## 参 考 文 献

- [1] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 161-169.  
Zhu Cheng-xiang and Zou Yun. Summary of research on fractional-order control[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(2): 161-169.
- [2] Bai Jian and Feng Xiang-chu. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising[J]. *Image Processing*, 2007, 16(10): 2492-2502.
- [3] Pu Yi-fei, Zhou Ji-liu, and Yuan Xiao. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement[J]. *Image Processing*, 2010, 19(2): 491-551.
- [4] 艾必刚, 罗以宁, 蒋涛等. 分数阶微分梯度算子在图像增强中的应用[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2009, 46(2): 343-347.  
Ai Bi-gang, Luo Yi-ning, and Jiang Tao, *et al.* Application of fractional-order differential gradient operator in image enhancement[J]. *Journal of Sichuan University(Natural Science Edition)*, 2009, 46(2): 343-347.
- [5] 张军, 韦志辉. 分数阶图像去噪变分模型及投影算法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(5): 1-6.

- Zhang Jun and Wei Zhi-hui. Fractional variational model and projection algorithm for image denoising[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2009, 45(5): 1-6.
- [6] Dominik S and Andrzej D. Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2006, 16(1): 129-140.
- [7] Andrzej D and Dominik S. Adaptive feedback control of fractional order discrete state-space systems[C]. CIMCA-IAWTIC'05, Vienna, Austria, 28-30 November, 2005, 1: 804-809.
- [8] Oldham K B and Spanier J. *The Fractional Calculus*[M]. New York and London: Academic Press, 1974: 5-96.
- [9] Zou Yun, Sheng Mei, and Zhong Ning-fan, *et al.* A generalized Kalman filter for 2D discrete systems [J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2004, 23(5): 351-364.

- 左 凯: 男, 1972 年生, 博士生, 研究方向为工业 CT 无损检测、图像处理。
- 孙同景: 男, 1948 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算机先进控制及智能系统。
- 李振华: 男, 1978 年生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为图像处理及模式识别、计算机智能控制等。