

## 基于失配误差正交分解的稳健自适应波束形成

邹翔 张旻 钟子发

(解放军电子工程学院 合肥 230037)

(安徽省电子制约技术重点实验室 合肥 230037)

**摘要:** 针对自适应波束形成中期望信号导向矢量的失配问题, 该文提出了一种利用失配误差的正交分量来逐步修正期望信号导向矢量的自适应波束形成方法。该方法首先构造两个正交子空间, 正交分解失配误差以后, 通过引入松弛变量, 把修正过程转化为解决迭代的二次凸优化问题。提出的方法没有假定失配误差模约束或概率约束, 从而避免了上限估计和概率分布建模。仿真结果验证了方法的有效性。

**关键词:** 自适应波束形成; 正交分解; 凸二次规划; 松弛变量

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)10-2320-04

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00049

## Robust Adaptive Beamforming Based on Mismatch Errors Orthogonal Decomposition

Zou Xiang Zhang Min Zhong Zi-fa

(Electronic Engineering Institute, Hefei 230037, China)

(Key Laboratory of Electronic Restriction, Anhui Province, Hefei 230037, China)

**Abstract:** A novel algorithm for robust adaptive beamforming is presented in this paper to solve the problem of the mismatch errors between the actual and presumed steering vectors. By using the orthogonal component of the errors, the method can obtain the desired steering vectors successfully. Two orthogonal subspaces are constructed firstly, and then the mismatch errors are orthogonally decomposed, so the correcting process of steering vectors is transformed into an iterative quadratic convex optimization issue by using a slack variable. The proposed algorithm does not need the conditions of the norm or probability constraint of the mismatch errors. Therefore, it avoids estimating upper bound values and probability distribution modeling. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** Adaptive beamforming; Orthogonal decomposition; Convex quadratic programming; Slack variable

### 1 引言

波束形成是阵列信号处理中广泛应用的一项关键技术, 如雷达、声纳、医疗成像<sup>[1]</sup>、MIMO 无线通信<sup>[2]</sup>、麦克风语音处理等领域<sup>[3,4]</sup>。传统的自适应波束形成方法假定期望信号(Signal Of Interest, SOI)的导向矢量是精确已知的, 然而, 由于实际应用中导向矢量失配误差会引起波束形成性能急剧下降, 稳健自适应波束形成算法就成为阵列传感器应用系统一个必须解决的问题。目前出现了几种稳健的自适应波束形成方法来解决这种导向矢量的失配误差问题<sup>[5-9]</sup>。Li 等人<sup>[6,7]</sup>针对导向矢量失配提出了稳健的波束形成算法, 一种方法是通过对导向矢量的不确定集进行建模, 使用对角加载的思想, 获得与该

不确定集参数有关的稳健自适应算法; 而另一种方法是通过加权矢量的模强加不等式约束, 以改善波束形成算法的稳健性, 这两种方法都需要选择恰当的参数才可以保证算法的稳健性。在假定失配量的模上限是已知的情况下, 基于最坏情况性能最优<sup>[8]</sup>是非常有效的方法, 其主要思想是把失配误差  $e$  约束在一个椭球内:  $A(e) = \{e \mid \|e\| \leq \varepsilon\}$ , 但事实上, 无论是失配误差本身还是它的模上限都无法获知, 如果上限设定过大, 那么约束就会失效; 如果上限过小, 又会导致期望信号的自零陷(self-nulling), 这两种情况都会导致算法性能的下降。基于概率约束的方法<sup>[9]</sup>假定失配导向矢量服从特定的概率分布, 而不是简单地把误差约束在椭球内, 其主要思想是: 该波束形成器只对误差以较大概率  $\rho$  发生的事件保持无畸变响应, 而不是对所有的误差发生事件。该方法更符合误差失配实际情况, 然而误差的概率分

2010-01-15 收到, 2010-06-01 改回

国家自然科学基金(60972161)资助课题

通信作者: 邹翔 vocation2114@126.com

布不同优化公式也会不同, 所以难以实现对概率分布的准确恰当的建模。因此, 目前还没有一种理想的解决方法, 稳健自适应波束形成算法仍然是工程应用中亟待解决的问题。

本文提出了一种新的稳健自适应波束形成方法, 目标是令输出信干噪比(Signal to Noise-plus-Interference, SINR)最大化。新方法基于期望信号的实际导向矢量和假定导向矢量之间的误差估计, 通过正交分解失配误差, 使用误差的正交分量来修正导向矢量, 因此, 并不需要对失配误差进行模上限约束和概率约束, 避免了对上限的估计和概率分布的建模。

## 2 阵列信号模型

假设  $M$  阵元均匀线阵, 接收的都是窄带信号, 则在时刻  $t$  阵列接收到的信号为

$$x(t) = x_s(t) + x_i(t) + n(t) \quad (1)$$

其中  $x_s(t)$ ,  $x_i(t)$ ,  $n(t)$  分别是统计独立的期望信号、干扰和噪声。这里  $x_s(t) = s(t)\mathbf{a}$ ,  $s(t)$  是期望信号波形,  $\mathbf{a}$  是期望信号的实际导向矢量。

自适应波束形成器的输出

$$y(t) = \mathbf{w}^H x(t) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_M]^T \in C^M$  是波束形成权值复向量,  $(\cdot)^T$  和  $(\cdot)^H$  分别代表矩阵的转置和共轭转置。

基于输出功率最小准则, 则自适应波束形成可以写成以下优化问题:

$$\left. \begin{array}{l} \min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a} = 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Capon 波束形成器给出的解是

$$\mathbf{w}_{\text{Capon}} = \frac{\mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}} \quad (4)$$

这里  $\mathbf{R}_{i+n}$  是干扰加噪声协方差矩阵, 由于在实际处理中无法得到  $\mathbf{R}_{i+n}$ , 通常用  $\mathbf{R}_x$  的估计值来代替, 即在时间上多次快拍采样对  $\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^H(i)$  求平均来完成,  $N$  为快拍数, 令  $\mathbf{R}_x$  的估计值为

$$\mathbf{R}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{X}(i)\mathbf{X}^H(i) \quad (5)$$

输出信干噪比 SINR 为

$$\text{SINR} = \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w}} \quad (6)$$

这里  $\sigma_s^2$  是期望信号功率。

## 3 基于失配误差正交分解的算法

针对失配误差模上限难以选取和概率分布建模困难的问题, 本文提出了一种新的基于误差正交分

解(Errors Orthogonal Decomposition, EOD)的稳健自适应波束形成, 算法描述如下。

### 3.1 算法描述

在 Capon 波束形成器中, 其输出功率为

$$p(\mathbf{a}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} = \frac{1}{\mathbf{a}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{a}} \quad (7)$$

由于实际导向矢量  $\mathbf{a}$  与假定的导向矢量  $\tilde{\mathbf{a}}$  存在误差, 有  $p(\tilde{\mathbf{a}}) \leq p(\mathbf{a})$  成立, 这意味着只要最大化  $p(\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{e})$  就可以有效估计出误差  $\mathbf{e}$ , 也就是对式(7)的分母最小化, 从而通过求解以下优化问题可以得到失配误差向量  $\mathbf{e}$ :

$$\min_{\mathbf{e}} (\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{e})^H \mathbf{R}_x^{-1} (\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{e}) \quad (8a)$$

$$\text{s.t.} \quad (\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{e})^H \mathbf{P}_a^\perp = 0 \quad (8b)$$

$$\|\tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{e}\| = \sqrt{M} \quad (8c)$$

其中  $\mathbf{P}_a^\perp$  是与包含实际导向矢量  $\mathbf{a}$  的子空间正交的投影矩阵。式(8b)的约束主要防止修正后的导向矢量与包含干扰的导向矢量相混合, 强加这个约束可以保证修正后的导向矢量仍然存在于导向矢量  $\tilde{\mathbf{a}}$  的邻域内。出于这种考虑, 不妨建立两个正交的子空间: 一个子空间包含期望信号的导向矢量, 另一个子空间包括所有干扰信号的导向矢量。

首先构造一个正定矩阵  $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \int_{\Theta} g(\theta) \mathbf{g}^H(\theta) d\theta \quad (9)$$

这里  $\Theta = [\theta_1, \theta_2]$  是一个代表期望信号角度方位的空间扇形区域,  $\mathbf{g}(\theta)$  是假定的从  $\theta$  方向入射的信号导向矢量。值得注意的是: 扇形  $\Theta$  不应该包含任何的干扰信号方向。我们可以认为扇形  $\Theta$  是以假定的期望信号方向为中心的一个邻域, 所以只要准确估计假定的期望信号方向, 就可以准确估计  $\Theta$ 。为此, 建立列正交矩阵

$$\mathbf{V} = [v_1, v_2, \dots, v_K] \quad (10)$$

其中  $\{v_k\}_{k=1}^K$  是矩阵  $\mathbf{G}$  的  $K$  个主要特征向量,  $K$  是  $\mathbf{G}$  主要特征值的个数。

根据定义, 实际导向矢量  $\mathbf{a}$  包含于由  $\mathbf{V}$  的列向量张成的子空间里, 因此, 投影矩阵  $\mathbf{P}_a^\perp$  可以由式(11)得到(满足  $\mathbf{V}^H \mathbf{P}_a^\perp = 0$ ):

$$\mathbf{P}_a^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^H \quad (11)$$

在式(8c)加等式约束的目的在于使修正后的导向矢量和  $\tilde{\mathbf{a}}$  具有同样的模。然而, 这种等式约束域不是一个凸集, 式(8)的优化问题不是凸优化问题, 无法通过高效方式求解。为此, 把失配误差  $\mathbf{e}$  正交分解成两个部分, 一部分与  $\tilde{\mathbf{a}}$  正交, 另一部分与  $\tilde{\mathbf{a}}$  平行。  $\mathbf{e}^\perp$  表示  $\mathbf{e}$  正交于  $\tilde{\mathbf{a}}$  的分量, 根据矢量的物理意义, 搜索  $\mathbf{e}$  的正交分量并和  $\tilde{\mathbf{a}}$  矢量相加作为导向

矢量的更新值,同时,约束更新值的模为 $\sqrt{M}$ ,然后,继续搜索与更新后的导向矢量正交的 $e^\perp$ 并和 $\tilde{\mathbf{a}}$ 矢量相加作为“新”的更新值,直到满足一些收敛准则。图 1 说明了这种搜索、更新和约束的过程。

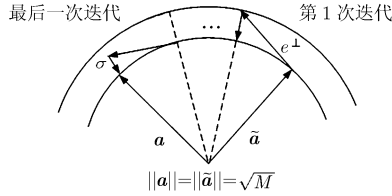


图 1 算法的迭代搜索示意图

### 3.2 基于凸二次规划的解决方案

失配误差 $e$ 正交分解以后,则式(8)可以重写为

$$\min_{e^\perp} (\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp)^H \mathbf{R}_x^{-1} (\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp) \quad (12a)$$

$$\text{s.t.} \quad (\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp)^H \mathbf{P}_a^\perp = 0 \quad (12b)$$

$$\|\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp\| \leq \sqrt{M} \quad (12c)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^H e^\perp = 0 \quad (12d)$$

这里为体现 $e^\perp$ 和 $\tilde{\mathbf{a}}$ 的正交性,给了额外的约束式(12d)。另外,把式(8c)由等式约束变成了不等式约束。不过这种松弛并不会改变优化问题性质,因为易知 $\|\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp\| \geq \|\tilde{\mathbf{a}}\| = \sqrt{M}$ ,所以 $e^\perp = 0$ 是式(12c)中的唯一解。由此在不等式的右边加一个很小的松弛变量 $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ),使得本文算法在搜索 $e^\perp$ 时有一定的搜索空间。那么式(12)修正为

$$\min_{e^\perp} (\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp)^H \mathbf{R}_x^{-1} (\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp) \quad (13a)$$

$$\text{s.t.} \quad (\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp)^H \mathbf{P}_a^\perp = 0 \quad (13b)$$

$$\|\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp\| \leq \sqrt{M} + \sigma \quad (13c)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}^H e^\perp = 0 \quad (13d)$$

式(13)是一个凸二次规划问题,可以使用内点法有效地解决。当得到满足式(13)中目标函数的 $e^\perp$ 以后,更新假定的导向矢量,并且重新投影和 $\sqrt{M}$ 模约束。值得指出的是: $\sigma$ 的值不会影响式(13)的最优解,只会影响收敛速度。具体来说,如果 $\sigma$ 很小,则算法的迭代次数很大,反之则反。

由于目标函数是最小化,所以一旦不等式 $(\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp)^H \mathbf{R}_x^{-1} (\tilde{\mathbf{a}} + e^\perp) \leq \tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{R}_x^{-1} \tilde{\mathbf{a}}$ 不成立,即 $e^{1H} \mathbf{R}_x^{-1} e^\perp + 2\text{Re}\{\tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{R}_x^{-1} e^\perp\} \leq 0$ 不成立, $\text{Re}\{\cdot\}$ 代表求实部,也就是说目标函数并没有减小,这个条件会导致迭代终止,中断算法运行。

### 3.3 算法流程

至此,本文算法流程总结如下:

- (1)求解式(13)得到 $e^\perp$ 的估计;
- (2)若 $e^{1H} \mathbf{R}_x^{-1} e^\perp + 2\text{Re}\{\tilde{\mathbf{a}}^H \mathbf{R}_x^{-1} e^\perp\} \geq -10^{-3}$ ,转到

(5),算法终止,否则转到(3);

(3)更新假定的导向矢量:  $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{a}} + e^\perp$ ;

(4)令 $\tilde{\mathbf{a}} = \frac{\sqrt{M}}{\|\tilde{\mathbf{a}}\|} \tilde{\mathbf{a}}$ ,转到(1);

(5)使用修正后的导向矢量计算稳健自适应波

束形成器的权值  $\mathbf{w}_{\text{EOD}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \tilde{\mathbf{a}}}{\tilde{\mathbf{a}}^H \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \tilde{\mathbf{a}}}$

## 4 仿真实验

仿真实验中假设阵列为半波长均匀线阵,阵元数 $M = 10$ ,所加噪声为零均值的高斯白噪声。假设两个干扰分别从 $30^\circ$ 和 $60^\circ$ 入射,干噪比(Interference to Noise Ratio, INR)均为30 dB,期望信号的方向角为 $0^\circ$ 。快拍数 $N = 100$ ,实验结果来自500次独立的蒙特卡洛实验。在实验中,把本文提出的算法(EOD)和采样矩阵求逆算法(Sample Matrix Inversion, SMI)、对角加载算法(Diagonally Loaded SMI, LSMI)<sup>[6]</sup>、基于二阶锥规划(Second Order Cone Programming, SOCP)<sup>[8]</sup>以及基于概率约束(Probability Constrained, PC)<sup>[9]</sup>的稳健自适应波束形成算法进行比较。在本文算法中,认为期望信号来自区间 $\Theta = [-5^\circ, 5^\circ]$ ,松弛变量 $\sigma = 0.1$ ,矩阵 $\mathbf{G}$ 的主要特征值个数为6。文中使用MATLAB CVX工具箱解决式(13)、基于SOCP和基于PC的稳健自适应波束形成的权值。

**实验 1** 假设观测方向误差为 $3^\circ$ ,也就是说假定的导向矢量由 $(3 + 0)^\circ$ 计算得到。在LSMI算法中,对角加载因子为 $10\sigma_n^2$ , $\sigma_n^2$ 是噪声功率。在SOCP波束形成器中,分别采用 $\varepsilon = 0.1M$ 和 $\varepsilon = 0.3M$ ,其中第1个值过小而第2个值等于失配误差的模。概率约束波束形成方法中, $\rho = 0.95$ ,设定失配误差服从高斯分布。实验仿真了输出信干噪比(SINR)和输入信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)的关系,可见本文提出的算法在高信噪比区域具有最好的性能,高于PC和SOCP有4 dB左右,具体性能比较见图2。

**实验 2** 同时考虑观测方向误差和阵元位置误差。假设每个阵元和理想位置之间的误差在区间 $[-0.1\lambda/2, 0.1\lambda/2]$ 内均匀分布, $\lambda$ 是波长;而观测方向误差均匀分布于 $[-3^\circ, 3^\circ]$ 。在SOCP波束形成器中,分别采用 $\varepsilon = 0.1M$ 和 $\varepsilon = 0.3M$ 进行计算。在概率约束波束形成方法中, $\rho = 0.95$ ,失配误差服从高斯分布。实验仿真输出信干噪比(SINR)和输入信噪比(SNR)的关系,可以看出,本文提出的算法有效修正了失配误差,较其他算法有一定的优势,性能比较结果见图3。

**实验 3** 观察方向误差为 $3^\circ$ ,在SOCP波束形

成器中, 采用  $\varepsilon = 0.3M$  进行计算; 固定  $\text{SNR} = -10$  dB, 实验中仿真 SINR 和快拍数  $N$  的关系, 其中输出 SINR 归一化后取对数, 最小快拍数为阵元数的两倍, 结果见图 4。可以看出, 本文算法输出 SINR 在快拍数为 40 时已经有收敛的趋势, 可见算法在小快拍采样时具有较大的性能优势。

## 5 结论

针对目前工程应用中亟待解决的稳健自适应波

束形成问题, 本文提出了一种基于失配误差正交分解(EOD)的方法。文中详细给出了算法描述和基于二次凸规划的解决方案, 理论推导和仿真实验验证了算法的有效性。由于不需要模上限估计和概率分布的建模, 从而避免了现有算法由于参数选择不当和建模不准确导致性能下降的问题。因此本文所提的算法更有利于工程实现。

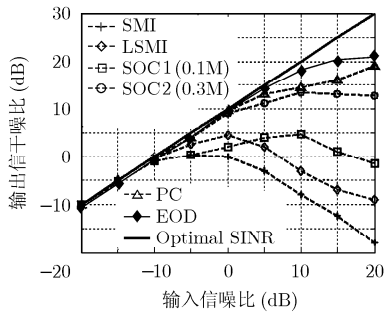


图 2 存在观测误差时性能比较

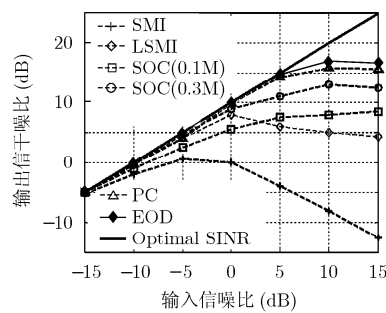


图 3 存在观测误差和阵元误差时性能比较

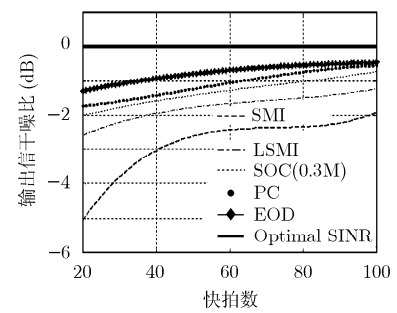


图 4 SINR 与快拍数关系曲线(SNR = -10 dB)

## 参考文献

- [1] Curletto S, Palmese M, and Trucco A. On the optimization of the transmitted beam in contrast-enhanced ultrasound medical imaging[J]. *IEEE Transactions on Instrument Measurement*, 2007, 56(4): 1239-1248.
- [2] Lee Heunchul, Park Seokhwan, and Lee Inkyu. Transmit beamforming method based on maximum-norm combining for MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2009, 8(4): 2067-2075.
- [3] Myllyla V and Hamalainen M. Adaptive beamforming methods for dynamically steered microphone array systems[C]. ICASSP 2008, Las Vegas, Nevada, USA, March 30-April 4, 2008: 305-308.
- [4] Kumatani K, McDonough J, Rauch B, Klakow D, Philip N.Garner, and Li Wei feng. Beamforming with a maximum negentropy criterion[J]. *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2009, 17(5): 994-1008.
- [5] Gaudes C C, Santamaría I, and Vía J, et al. Robust array beamforming with sidelobe control using support vector machines[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(2): 574-584.
- [6] Li J, Stoica P, and Wang Z. On robust capon beamforming and diagonal loading[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1702-1715.
- [7] Li J, Stoica P, and Wang Z. Doubly constrained robust capon beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2407-2423.
- [8] Vorobyov S A, Gershman A B, and Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(2): 313-324.
- [9] Vorobyov S A, Chen Haihua, and Gershman A B. On the relationship between robust minimum variance beamformers with probabilistic and worst-case distortionless response constraints[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(11): 5719-5724.

邹翔: 男, 1979年生, 博士生, 研究方向为自适应波束形成和智能计算。

张旻: 男, 1966年生, 教授, 博士, 从事通信信号处理、计算智能等方向研究。

钟子发: 男, 1957年生, 教授, 博士生导师, 从事通信信号处理、数据融合等方向研究。