

基于 FrFT 的 LFM 相参脉冲信号多普勒频率变化率估计算法

李宏 秦玉亮 李彦鹏 王宏强 黎湘
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘要: 线性调频信号(LFM)在雷达中广泛应用, 精确获取观测 LFM 信号中的多普勒频率变化率信息是单站无源定位与跟踪系统的一项关键技术。该文提出了基于分数阶 Fourier 变换(FrFT)的多普勒频率变化率估计算法, 在分数阶变换域上使信号能量聚集, 消除调频率对参数估计的影响的同时充分提高了信噪比, 进而利用保留的脉冲间相对相位关系获得了多普勒频率变化率的高精度估计。理论分析表明, 该算法估计精度接近理论下界, 数值仿真验证了算法的有效性。

关键词: 无源定位与跟踪; 分数阶 Fourier 变换; LFM 相参脉冲; 多普勒频率变化率

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)11-2718-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.01438

A FrFT Based Algorithm for Doppler Frequency Rate Estimation from LFM Coherent Pulse Train

Li Hong Qin Yu-liang Li Yan-peng Wang Hong-qiang Li Xiang

(School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: LFM signal is widely used in radar application. It is a key technology to obtain the high accuracy estimation of the Doppler frequency rate from the observed LFM signals. In this paper, a Fractional Fourier Transform (FrFT) based Doppler frequency rate estimation algorithm is proposed. The signal energy is congregated in the fractional Fourier transform domain. The signal to noise rate is strengthen and the infection of the frequency rate of LFM signal is eliminated. The coherent phase information is utilized to obtain the Doppler frequency rate estimates. The theoretical analysis indicates that the estimation variance approaches the theoretical low band. The simulation results validate the presented algorithm.

Key words: Passive locating and tracking; FrFT; Coherent LFM pulse; Doppler frequency rate

1 引言

运动辐射源相对于观测平台的径向加速度信息反映在观测信号的多普勒变化率中, 利用多普勒频率变化率信息可以对辐射源进行无源定位和跟踪, 其定位和跟踪的速度和精度优于传统基于角信息的定位方法^[1]。在实际场景中, 受实际目标运动速度和雷达载频的限制, 反映到观测信号中的多普勒频率变化率非常微弱, 通常为 10^2 Hz/s 量级^[2]。而在无源定位与跟踪系统中, 对多普勒频率变化率的估计精度要求精确到 10^0 Hz/s 量级, 因此高精度提取多普勒频率变化率是实现这一类无源定位与跟踪的关键技术。目前, 大多数雷达采用 LFM 脉冲压缩波形, 如火控雷达、探测、成像雷达等, 脉冲宽度通常为微秒量级, 通过对单个脉冲信号的处理提取多普勒频率变化率很难满足无源定位和跟踪的要求。

近年来, 许多研究者开展了利用雷达相参脉冲串信号的相参特性提高多普勒频率变化率估计精度的研究。文献[2]通过对相参脉冲在载频处的离散傅立叶变换谱做相关运算实现了多普勒频率变化率的精确估计; 文献[3]利用小波变换的时频局部化特性抑制噪声, 获得了多普勒频率变化率的高精度估计。但对脉内存在调制的 LFM 相参脉冲信号, 这些方法并不适用。文献[4]通过相参脉冲间的相关运算消除脉内调制的影响, 但相关运算引入了信号与噪声的交叉项, 算法估计性能非最优。文献[5]通过计算脉冲信号在小波脊线上的渐进小波变换在尺度域上抑制噪声, 提高低信噪比时多普勒频率变化率的估计精度。从充分利用 LFM 信号能量提高信噪比角度分析, 小波变换不是最优的。对于 LFM 信号, 分数阶 Fourier 变换与匹配滤波等效, 可获得最大输出信噪比^[6]。本文将分数阶 Fourier 变换应用于 LFM 相参脉冲多普勒频率变化率估计问题, 提出了一种新的多普勒频率变化率高精度估计算法。

本文第 2 节简单介绍了分数阶 Fourier 变换的定义;第 3 节给出了观测 LFM 相参脉冲信号模型;第 4 节详细推导了基于分数阶 Fourier 变换的 LFM 相参脉冲信号多普勒频率变化率估计算法,并给出了估计方差的理论值;第 5 节推导了参数估计的 Cramer-Rao 下界的表达式;第 6 节为算法性能分析及仿真实验,最后为本文的结论。

2 分数阶 Fourier 变换

分数阶 Fourier 变换是对经典 Fourier 变换的推广,具有时频旋转特性,是一种统一的时频变换。近年来,在光学、信号处理等领域得到越来越广泛的应用。

通常用 F^a 表示 a 阶分数 Fourier 变换算子,信号 $x(t)$ 分数 Fourier 变换的定义为^[7]

$$X^\alpha(u) = F^a[x(t)](u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(u, t)x(t)dt \quad (1)$$

式中 $\alpha = a\pi/2$ 可理解为时频平面旋转的角度,积分核函数 $K_\alpha(u, t)$ 表示为

$$K_\alpha(u, t) = \begin{cases} A_\alpha \exp[j\pi(u^2 \cot \alpha - 2ut \csc \alpha + t^2 \cot \alpha)], & \alpha \neq k\pi \\ \delta(u - t), & \alpha = k\pi \\ \delta(u + t), & \alpha = (2k + 1)\pi \end{cases} \quad (2)$$

式中

$$A_\alpha = \sqrt{1 - j \cot \alpha} = \frac{\exp[-j\pi \operatorname{sgn}(\sin \alpha)/4 + j\alpha/2]}{\sqrt{|\sin \alpha|}}$$

分数阶 Fourier 变换离散快速算法是其应用的关键,目前已经提出了几种离散型分数阶 Fourier 变换快速算法,计算复杂度与传统 Fourier 变换相当^[8]。

3 观测信号模型

在工程应用中一般将目标辐射源和观测平台的相对距离近似展开为时间的二次项,一次项表示目标相对于观测平台径向速度,二次项表示径向加速度,在接收信号中则体现为多普勒频率和多普勒频率变化率。文献[2-5]中,均假设观测平台在目标雷达一次扫描内接收到的信号时长很短,将此时间内多普勒频率变化率近似为一常量,本文沿用这一假设。

观测平台接收到的 LFM 相参脉冲信号可表示为

$$s(t) = \sum_{p=1}^P A \exp \left\{ j \left[2\pi(f_c + f_d)t + \pi\kappa(t - T_p)^2 + \pi\dot{f}_d t^2 + \varphi_0 \right] \right\} \operatorname{rect} \left(\frac{t - T_p}{\tau} \right) \quad (3)$$

式中 f_c 为信号载频, f_d 为多普勒频率, \dot{f}_d 为多普勒频率变化率, φ_0 为初相, T_p 为第 p 个脉冲到达时间, κ 为 LFM 信号调频斜率, $\operatorname{rect}(t/\tau)$ 为脉宽为 τ 的矩形函数。

接收信号经混频后得到的中频信号为

$$s(t) = \sum_{p=1}^P A \exp \left\{ j \left[2\pi f_I t + \pi\kappa(t - pT_p)^2 + \pi\dot{f}_d t^2 + \varphi_0 \right] \right\} \operatorname{rect} \left(\frac{t - T_p}{\tau} \right) \quad (4)$$

式中 $f_I = f_c + f_d - f_L$, f_L 为本振频率,混频后信号的初相仍用 φ_0 表示。

假设系统噪声为零均值加性复高斯平稳白噪声,其双边功率谱密度为 N_0 ,且在处理信号时长内其统计特性不变,则待处理信号可表示为信号加噪声的形式。

$$r(t) = s(t) + v(t) \quad (5)$$

经变量代换 $t = t + T_p$, 可得第 p 个脉冲的表达式为

$$r_p(t) = s_p(t) + v_p(t), \quad |t| \leq \tau/2 \quad (6)$$

式中 $v_p(t) = v(t + T_p)$, 信号项 $s_p(t)$ 表示为

$$s_p(t) = A \exp \left[j(2\pi f_p t + \pi\kappa_d t^2 + \varphi_p) \right], \quad |t| \leq \tau/2 \quad (7)$$

式中 $f_p = f_I + \dot{f}_d T_p$, $\kappa_d = \kappa + \dot{f}_d$, $\varphi_p = \varphi_0 + 2\pi f_I T_p + \pi\dot{f}_d T_p^2$ 。

4 分数阶 Fourier 变换估计多普勒频率变化率算法

4.1 相参 LFM 脉冲信号的分数阶 Fourier 变换

观测信号模型式(6)的分数阶 Fourier 变换可表示为

$$R_p^\alpha(u) = F^a[r_p(t)](u) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} K_\alpha(u, t)s_p(t)dt + F^a[v_p(t)](u), \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (8)$$

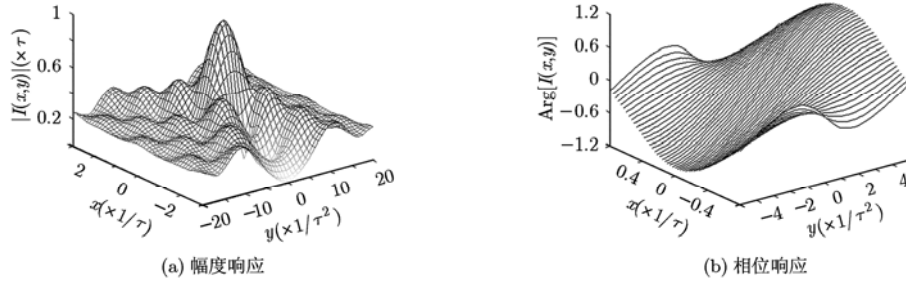
不失一般性,假设 $0 < \alpha < \pi/2$, 令 $\cot \alpha = -\kappa_\alpha$, $u \csc \alpha = f_\alpha$, 则

$$R_p^\alpha(u) = A(\csc \alpha)^{1/2} \exp \left\{ j \left[\vartheta(\alpha, u) + \varphi_p - \pi/4 \right] \right\} \cdot I(f_p - f_\alpha, \kappa_d - \kappa_\alpha) + \varepsilon_p(\alpha, u) \quad (9)$$

式中 $\vartheta(\alpha, u) = \alpha/2 + \pi u^2 \cot \alpha$, $I(x, y) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp \left\{ j \left[2\pi x t + \pi y t^2 \right] \right\} dt$, $\varepsilon_p(\alpha, u) = F^a[v_p(t)](u)$ 。

当 $\kappa_\alpha = \kappa_d$, $f_\alpha = f_p$ 时, $I(f_p - f_\alpha, \kappa_d - \kappa_\alpha)$ 达到最大值(见图 1(a)), 信号能量在分数阶 Fourier 变换域聚集, 式(9)中 $|R_p^\alpha|$ 将出现峰值, 因此, 信号参数 κ_d 和 f_p 估计过程可描述为

$$\left. \begin{aligned} [\hat{\alpha}_p, \hat{u}_p] &= \arg \max_{\alpha, u} |R_p^\alpha|^2 \\ \hat{\kappa}_d &= -\cot \hat{\alpha}_p \\ \hat{f}_p &= \hat{u}_p \csc \hat{\alpha}_p \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

图1 $I(x, y)$ 的幅度和相位响应

利用式(10)进行参数估计需要进行2维搜索, 当对估计精度较高时, 需要很大的运算量。文献[9]提出的拟Newton算法可兼顾精度和运算量的要求, 关于迭代初值的选取可参考文献[10]。

要获得 $I(x, y)$ 相位的解析表达式非常困难, 但从图1(b)仿真结果可以看出, $I(x, y)$ 的相位在 $|I(0, y)|$ 和 $|I(x, 0)|$ 的主波瓣区域内较平坦, 经计算其宽度分别为 $2/\tau$ 和 $72/5\tau$ 。当满足条件: $|x| \ll 1/\tau$, $|y| \ll 36/5\tau^2$ 时, 积分式 $I(x, y)$ 可采用如下近似:

$$I(x, y) \approx \tau \exp\left\{j \frac{\pi \tau^2 y}{12}\right\} \quad (11)$$

通常观测时长不超过 10^{-1} s 量级, \dot{f}_d 为 10^2 Hz/s 量级, 而脉冲宽度为 $10^{-6} \sim 10^{-5}$ s 量级, 因此有如下条件成立:

$$f_p - f_1 = \dot{f}_d(T_p - T_1) \ll 1/\tau \quad (12)$$

又根据式(7), 对于不同脉冲均有: $\kappa_d = \kappa + \dot{f}_d$, 根据式(11), 有

$$I(f_p - f_\alpha, \kappa_d - \kappa_\alpha) - I(f_1 - f_\alpha, \kappa_d - \kappa_\alpha) \approx 0, \quad p = 2, 3, \dots, P \quad (13)$$

即脉冲间参数 f_p 差异对式(9)中积分式 $I(f_p - f_\alpha, \kappa_d - \kappa_\alpha)$ 的幅度和相位影响可忽略不计。

假设第 p 个脉冲分数阶 Fourier 变换 $|R_p^\alpha|$ 的峰值位置估计为 $(\hat{u}_p, \hat{\alpha}_p)$, 则 κ_d 和 f_p 的估计值分别为 $\hat{\kappa}_p = -\cot \hat{\alpha}_p$ 和 $\hat{f}_p = \hat{u}_p \csc \hat{\alpha}_p$, 则有

$$R_p^{\hat{\alpha}_p}(\hat{u}_p) = A(\csc \hat{\alpha}_p)^{1/2} \exp\left\{j[\vartheta(\hat{\alpha}_p, \hat{u}_p) + \varphi_p - \pi/4]\right\} \cdot I(\Delta f, \Delta \kappa) + \varepsilon_p(\hat{u}_p, \hat{\alpha}_p) \quad (14)$$

式中 $\Delta f = f_p - \hat{f}_p$, $\Delta \kappa = \kappa_d - \hat{\kappa}_p$ 分别表示频率和调频斜率的估计偏差。当 κ_d 和 f_p 的估计精度较高时, 满足条件: $|\Delta f| \ll 1/\tau$, $|\Delta \kappa| \ll 36/5\tau^2$, $R_p^{\hat{\alpha}_p}(\hat{u}_p)$ 可近似表示为

$$R_p^{\hat{\alpha}_p}(\hat{u}_p) \approx A\tau(\csc \hat{\alpha}_p)^{1/2} \cdot \exp\left\{j[\varphi_p + \phi_p + \vartheta(\hat{\alpha}_p, \hat{u}_p) - \pi/4]\right\} + \tilde{\varepsilon}_p \quad (15)$$

式中 $\phi_p = \pi(\kappa_d - \hat{\kappa}_p)\tau^2/12$, $\vartheta(\hat{\alpha}_p, \hat{u}_p) = -\pi/4 + \hat{\alpha}_p/2 + \pi\hat{u}_p^2 \cot \hat{\alpha}_p$, $\tilde{\varepsilon}_p \triangleq \varepsilon_p(\hat{u}_p, \hat{\alpha}_p)$, 可见 $R_p^{\hat{\alpha}_p}(\hat{u}_p)$ 的相位受估计值偏差的影响较大, 不利于后续参数估计。

令 $\hat{f} = 1/P \sum_{p=1}^P \hat{f}_p$, $\hat{\kappa}_d = 1/P \sum_{p=1}^P \hat{\kappa}_p$, 则估计方差为原方差 $1/P$ 。将每个脉冲信号在 $(\hat{f}, \hat{\kappa}_d)$ 处作分数阶 Fourier 展开, 则式(15)可简化为

$$R_p^{\hat{\alpha}}(\hat{u}) \approx A\tau(\csc \hat{\alpha})^{1/2} \exp\left\{j[\varphi_p + \vartheta(\hat{\alpha}, \hat{u}) + \pi(\kappa_d + \cot \hat{\alpha})\tau^2/12 - \pi/4]\right\} + \tilde{\varepsilon}_p \quad (16)$$

式中 $\hat{\alpha}, \hat{u}$ 满足 $\hat{\kappa}_d = -\cot \hat{\alpha}$, $\hat{f} = \hat{u} \csc \hat{\alpha}$ 。可见, 式(16)消除了脉冲间由于估计偏差引入的相位误差。

由于分数阶 Fourier 变换为线性变换, 式(16)中噪声项 $\tilde{\varepsilon}_p$ 仍为复高斯平稳白噪声, 其均值和方差分别为

$$E[\tilde{\varepsilon}_p] = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} K_{\hat{\alpha}}(\hat{u}, t) E[v_p(t)] dt = 0$$

$$E[\tilde{\varepsilon}_p \tilde{\varepsilon}_p^*] = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} K_{\hat{\alpha}}(\hat{u}, t) K_{\hat{\alpha}}^*(\hat{u}, t') \cdot E[v_p(t)v_p^*(t')] dt' dt = \tau N_0 \csc \hat{\alpha} \quad (17)$$

因此, $R_p^{\hat{\alpha}}(\hat{u})$ 的信噪比表示为: $\text{SNR}_{RP} = E/N_0$, 其中 $E = A^2\tau$ 表示脉冲信号能量。

由式(16), 式(17)可见, 相参脉冲串信号中各 LFM 脉冲在分数阶 Fourier 变换域 $(\hat{\alpha}, \hat{u})$ 处变换不仅保留了原脉冲串相位间相对关系, 即保留了相参性, 而且充分提高了信噪比。

4.2 多普勒频率变化估计算法

根据文献[11], 若式(16)表示信号的信噪比较高 (≥ 10 dB) 时, 高斯白噪声 $\tilde{\varepsilon}_p$ 可等效为零均值实相位高斯白噪声 ξ_p , 式(16)的相位测量值可表示为

$$\text{Arg}[R_p^{\hat{\alpha}}(\hat{u})] \approx [\varphi_0 + 2\pi f_I T_p + \pi \dot{f}_d T_p^2 + \theta(\hat{\alpha}, \hat{u}) + \xi_p]_{2\pi} \quad (18)$$

式中 $[x]_{2\pi} = \{(x + \pi) \bmod 2\pi\} - \pi$, 即 $[x]_{2\pi} \in [-\pi, \pi)$ 。利用相位测量值构造如下统计量:

$$Z(p) = \text{Arg}\left\{R_{p+1}^{\hat{\alpha}}(\hat{u})\left[R_p^{\hat{\alpha}}(\hat{u})\right]^*\right\} \cdot R_{p-1}^{\hat{\alpha}}(\hat{u}) \exp\left(-j2\pi \hat{f} e_1(p)\right) \cdot \left[2\pi(f_I - \hat{f})e_1(p) + \pi \dot{f}_d e_2(p) + \nu(p)\right]_{2\pi} \quad (19)$$

式中 $e_1(p) = T_{p+1} - 2T_p + T_{p-1}$ 可看作脉冲重复周期的抖动误差; $e_2(p) = T_{p+1}^2 - 2T_p^2 + T_{p-1}^2$, 设 \bar{T}_{PRI} 表示

脉冲重复间隔的均值, 则 $e_2(p) \approx 2\bar{T}_{\text{PRI}}^2$; $\nu(p) = \xi_{p+1} - 2\xi_p + \xi_{p-1}$ 。

式(19)表示的相位测量值 $Z(p)$ 不发生相位模糊的条件为

$$\left. \begin{aligned} |f_I - \hat{f}| \sigma_{\max} &\ll 1 \\ |\hat{f}_d| &< \frac{1}{2\bar{T}_{\text{PRI}}^2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中 $\sigma_{\max} = \max\{e_1(p)\}$ 。若满足式(20)表示的条件, 则相位测量值 $Z(p)$ 可写为

$$Z(p) = 2\pi(f_I - \hat{f})e_1(p) + \pi\hat{f}_de_2(p) + \nu(p) \quad (21)$$

若定义 $\mathbf{x} = [f_I - \hat{f} \quad \hat{f}_d]^T$, 则可将相位测量值 $Z(p)$ 表示为矢量形式。

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (22)$$

根据最小方差准则可得 \mathbf{x} 的估计值和方差分别为

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Z} \quad (23)$$

式中 \mathbf{C}^{-1} 表示噪声 $\nu(p)$ 的协方差矩阵的逆。噪声 $\nu(p)$ 为二阶滑动平均过程, 其协方差矩阵为^[4,5]

$$\mathbf{C} = E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} = \sigma_\nu^2 \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & -4 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & -4 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -4 & 6 & -4 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}_{(P-2) \times (P-2)} \quad (24)$$

若脉冲重复频率稳定度很高, 即 $e_1(p) = 0$, 则式(19)可简化为

$$Z(p) = 2\pi\hat{f}_dT_{\text{PRI}}^2 + \nu(p), \quad p = 2, 3, \dots, P-1 \quad (25)$$

式中 T_{PRI} 表示脉冲重复周期。式(25)的最小方差解可表示为加权求和的形式^[12]:

$$\hat{f}_d = \frac{1}{2\pi T_{\text{PRI}}^2} \sum_{p=2}^{P-1} w(p)Z(p) \quad (26)$$

式中

$$w(p) = \frac{30p(p-1)[P-(p-1)](P-p)}{P(P^2-1)(P^2-4)}$$

估计误差的方差为

$$\text{var}(\hat{f}_d) \approx \frac{1}{\eta E/N_0} \frac{90}{\pi^2 P^5 T_{\text{PRI}}^4} \quad (27)$$

式中 η 表示由于 LFM 信号调频率和初始频率偏离真值引起的信噪比损失因子。利用式(26)估计多普勒频率变化率 \hat{f}_d 无须计算 \mathbf{C}^{-1} 及矩阵运算, 减小了计算量。式(26)给出的估计方法的信噪比门限约为 10 dB^[12]。

4.3 快速处理算法

前述算法需要对脉冲串中每个脉冲进行分数阶 Fourier 变换估计参数 f_p 和 κ_d , 需要很大运算量。根据式(12)–式(16)的分析可知, 若获得脉冲串中一个脉冲的参数估计值, 假设在分数阶 Fourier 变换域该估计值表为 $(\hat{\alpha}_0, \hat{u}_0)$, 那么只需计算所有脉冲信号在 $(\hat{\alpha}_0, \hat{u}_0)$ 处的分数阶 Fourier 变换值, 这一简化处理避免了对每个脉冲都进行大运算量的调频斜率和等效载频参数估计过程, 可大大降低算法的运算量, 但对 $(\hat{\alpha}_0, \hat{u}_0)$ 的估计精度要求稍高。

5 多普勒频率变化率估计的 Cramer-Rao 下界

本节推导式(4)信号多普勒频率变化率 \hat{f}_d , 载频 f_I , 初相 φ_0 及脉内调制参数 κ 联合估计时 \hat{f}_d 的 Cramer-Rao 下界(CRLB)。将式(4)表示为更一般的形式:

$$s(t) = \sum_{p=1}^P A \exp\left\{j\left[a_0 + a_1(t + T_p) + a_2(t + T_p)^2 + a_3 t^2\right]\right\}, \quad |t| \leq \tau/2 \quad (28)$$

式中 $a_0 = \varphi_0$, $a_1 = 2\pi f_I$, $a_2 = \pi\hat{f}_d$, $a_3 = \pi\kappa$ 。

假设采样率为 $1/\Delta$, 每个脉冲采样点数均为 N , 则离散观测信号模型可表示为

$$\begin{aligned} r_p(n) &= s_p(n) + v_p(n) \\ &= A \exp\left\{j\left[a_0 + a_1 n_p + a_2 n_p^2 + a_3 n^2\right]\right\} + v_p(n), \\ n &= n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + N - 1, \\ p &= 0, 1, \dots, P - 1 \end{aligned} \quad (29)$$

式中 $n_p = n + K_p$ 。

$$\begin{aligned} \text{令 } r_p(n) &= X_p(n) + jY_p(n), \quad s_p(n) = \mu_p(n) + jv_p(n), \\ \varphi_p(n) &= a_0 + a_1 n_p + a_2 n_p^2 + a_3 n^2, \quad \text{则} \\ \mu_p(n) &= A \cos[\varphi_p(n)], \quad v_p(n) = A \sin[\varphi_p(n)] \end{aligned} \quad (30)$$

设 $\boldsymbol{\theta} = [a_0, a_1, a_2, a_3]^T$, 则 $r_p(n)$ 的联合概率密度为

$$f(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{1}{\pi\sigma_v^2}\right)^{PN} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_v^2} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \left[(X_p(n) - \mu_p(n))^2 + (Y_p(n) - v_p(n))^2 \right]\right\} \quad (31)$$

Fisher 信息矩阵 \mathbf{J} 的元素由式(32)给出:

$$\begin{aligned} J_{ij} &= -E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j} \ln f(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta})\right\} \\ &= \frac{2}{\sigma_v^2} \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \left[\frac{\partial\mu_p(n)}{\partial\theta_i} \frac{\partial\mu_p(n)}{\partial\theta_j} + \frac{\partial v_p(n)}{\partial\theta_i} \frac{\partial v_p(n)}{\partial\theta_j} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

脉冲重复频率固定, 则 $K_p = K \cdot p$ 。当 $n_0 = -(N-1)/2$ 时, CRLB 达到最小值。当 $N \gg 1, P \gg 1$ 时, 可利用如下近似关系^[13]:

$$\sum_{n=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} n^2 \approx \frac{N^3}{12}, \quad \sum_{n=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} n^4 \approx \frac{N^5}{80} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=0}^{P-1} p &\approx \frac{1}{2} P^2, & \sum_{p=0}^{P-1} p^2 &\approx \frac{1}{3} P^3, \\ \sum_{p=0}^{P-1} p^3 &\approx \frac{1}{4} P^4, & \sum_{p=0}^{P-1} p^4 &\approx \frac{1}{5} P^5 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

经过计算可得

$$\begin{aligned} \text{CRLB}\{a_2\} &= \{\mathbf{J}^{-1}\}_{3,3} \\ &\approx \frac{\sigma_v^2}{A^2} \frac{90}{K^2 N P^3 (5N^2 + K^2 P^2) \Delta^4} \end{aligned} \quad (35)$$

又 $K = T_{\text{PRI}}/\Delta$, $\tau = N\Delta$, 通常满足关系: $\tau \ll T_{\text{PRI}}$, 故式(35)可进一步简化为

$$\text{CRLB}\{a_2\} \approx \frac{\sigma_v^2}{A^2 N} \frac{90}{P^5 T_{\text{PRI}}^4} \quad (36)$$

因此, 多普勒频率变化率 \dot{f}_d 估计的近似 CRLB 可表示为

$$\text{CRLB}\{\dot{f}_d\} \approx \frac{\sigma_v^2}{A^2 N} \frac{90}{\pi^2 P^5 T_{\text{PRI}}^4} \quad (37)$$

6 性能分析与仿真实验

6.1 统计性能分析

对于离散采样信号, 式(27)中的 E/N_0 等效为 $A^2 N/\sigma_v^2$, 因此对于离散采样序列, 式(27)等效的估计方差为

$$\text{var}(\hat{f}_d) \approx \frac{\sigma_v^2}{\eta A^2 N} \frac{90}{\pi^2 P^5 T_{\text{PRI}}^4} \quad (38)$$

当每个 LFM 脉冲的调频率和初始频率估计精度较高时 $\eta \approx 1$, 因此本文算法的估计方差可逼近 CRLB。

由文献[14]可知, LFM 信号分数 Fourier 变换峰值点的模平方的输出信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\text{SNR}_{RP}^2}{2\text{SNR}_{RP} + 1} \quad (39)$$

根据文献[15]的分析, 分数阶 Fourier 变换的 LFM 信号参数估计精度表示为

$$\sigma_f^2 = \frac{6}{(2\pi)^2 \tau^2} \frac{\text{SNR}_{RP} + 1}{\text{SNR}_{RP}^2} \quad (40)$$

$$\sigma_\kappa^2 = \frac{90}{\pi^2 \tau^4} \frac{\text{SNR}_{RP} + 1}{\text{SNR}_{RP}^2} \quad (41)$$

为了可靠检测峰值, 通常要求: $[\text{SNR}_{\text{out}}]_{\text{dB}} \geq 13.2 \text{ dB}$, 此时 $3\sigma_f \ll 1/\tau$, $3\sigma_\kappa \ll 7.2/\tau^2$, 达到式(11)的近似条件。由式(39)知, 式(16)表示信号的信

噪比满足如下关系:

$$\frac{\text{SNR}_{\text{out}}}{\text{SNR}_{RP}} = \frac{1}{2 + 1/\text{SNR}_{RP}} < 1 \quad (42)$$

即满足: $[\text{SNR}_{\text{out}}]_{\text{dB}} \geq 13.2 \text{ dB}$ 时, 必然满足 $[\text{SNR}_{RP}]_{\text{dB}} > 13.2 \text{ dB}$, 大于式(26)估计算法的信噪比门限。

综合以上分析, 可知当信噪比满足 $[\text{SNR}_{\text{out}}]_{\text{dB}} \geq 13.2 \text{ dB}$ 时, 本文提出的算法都能给出高精度多普勒频率变化率估计。

6.2 仿真实验

为了检验本文多普勒频率变化率估计算法的性能, 利用 Matlab2008a 对其进行了 Monte-Carlo 仿真实验。仿真的中频信号参数设置如下: 中频频率: $f_f = 30 \text{ MHz}$; 脉冲重复频率: $f_{\text{prf}} = 1 \text{ kHz}$; 脉冲宽度: $\tau = 8 \mu\text{s}$; 带宽: $B = 4 \text{ MHz}$; 多普勒频率变化率真值: $\dot{f}_d = 62.5 \text{ Hz/s}$; 采样频率: $f_s = 100 \text{ MHz}$; 观测时长: $T_{\text{ob}} = 50 \text{ ms}$ 。

对算法在不同信噪比下分别进行了 500 次 Monte-Carlo 仿真试验, 信噪比从 -20 dB 到 20 dB , 步进 2 dB , 仿真结果如图 2 所示, 图中还给出了文献[4,5]中算法的仿真结果作为比较项。从中可以看出, 在 LFM 脉冲调频率和初始频率满足一定精度条件下, 本文多普勒频率变化率估计算法估计性能在信噪比大于 -10 dB 时与理论分析吻合较好。文献[4]中基于脉冲间相关方法在高信噪比时与理论分析结果一致, 但在低信噪比时, 与理论结果有较大偏差, 不是最优估计, 这与文献[4]中分析结论一致。文献[5]中基于渐进小波变换方法的估计性能与所选取的小波脊线变换点有关, 图 2 给出了一组较好的结果, 但在高信噪比下与理论结果仍有较大偏差。

通常相参脉冲雷达的脉冲重复频率稳定度很高, 短期稳定度达到 10^{-10} Hz/s 量级, 对算法的影响非常小。

7 结论

本文提出了一种基于分数阶 Fourier 变换的

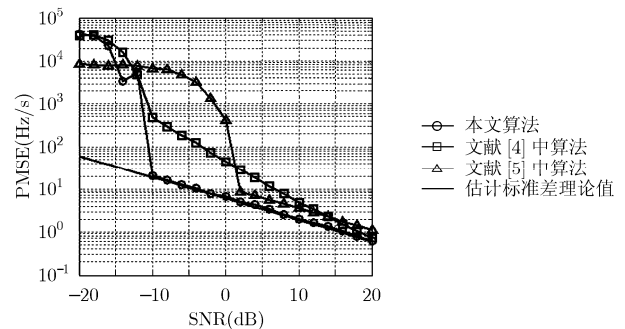


图 2 不同多普勒频率变化率估计性能

LFM 相参脉冲信号多普勒频率变化率高精度估计方法,通过对信号进行分数阶 Fourier 变换在分数阶变换域充分提高了信噪比,分数阶 Fourier 变换结果进行相关变换完成相位差分,消除相位模糊,获得了多普勒频率变化率的最小方差估计。在脉冲重复频率稳定度很高时,本文算法估计精度简接近理论下界,相比已有算法具有更低的信噪比门限,可用于低信噪比条件下 LFM 相参脉冲信号多普勒频率变化率估计。

参 考 文 献

- [1] 冯道旺. 利用径向加速度信息的单站无源定位技术研究[D]. [博士论文], 长沙, 国防科技大学, 2003.
- [2] 冯道旺, 周一宇, 李宗华. 相参脉冲序列多普勒变化率的一种快速高精度测量方法[J]. 信号处理, 2004, 20(1): 40-43.
Feng Dao-wang, Zhou Yi-yu, and Li Zhong-hua. A fast and accurate estimator for Doppler rate-of-change with the coherent pulse train[J]. *Signal Processing*, 2004, 20(1): 40-43.
- [3] 郁春来, 吕韶昱, 万方等. 基于小波变换的多普勒频率变化率高精度估计方法[J]. 电子学报, 2007, 35(9): 1656-1659.
Yu Chun-lai, Lü Shao-yu, and Wan Fang, et al. An accurate estimation algorithm for doppler frequency rate-of-change based on wavelet transform[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, 35(9): 1656-1659.
- [4] 郁春来, 万建伟, 占荣辉. 一种 PCM 相参脉冲序列多普勒频率变化率估计算法[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(10): 2303-2306.
Yu Chun-lai, Wan Jian-wei, and Zhan Rong-hui. An estimation algorithm for Doppler frequency rate-of-change with PCM coherent pulse train[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(10): 2303-2306.
- [5] 郁春来, 万方, 占荣辉等. 一种关于 LFM 相参脉冲信号多普勒频率变化率的估计算法[J]. 信号处理, 2008, 24(4): 546-550.
Yu Chun-lai, Wan Fang, and Zhan Rong-hui, et al. An estimation algorithm for Doppler frequency rate-of-change with LFM coherent pulse signal. *Signal Processing*, 2008, 24(4): 546-550.
- [6] Wang M S, Chan A K, and Chui C K. Linear frequency-modulated signal detection using Radon-ambiguity transform[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(3): 571-586.
- [7] 陶然, 邓兵, 王越. 分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的研究进展[J]. 中国科学 E 辑, 2006, 36(2): 113-136.
Tao Ran, Deng Bing, and Wang Yue. Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2006, 49(1): 1-25.
- [8] 陶然, 张峰, 王越. 分数阶 Fourier 变换离散化的研究进展[J]. 中国科学 E 辑, 2008, 38(4): 481-503.
Tao Ran, Deng Bing, and Wang Yue. Research progress on discretization of fractional Fourier transform [J]. *Science in China Series F: Information Sciences*. 2008, 51(7): 859-880.
- [9] 齐林, 陶然, 周思永等. 基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计[J]. 中国科学 E 辑, 2003, 33(8): 754-759.
Qi Lin, Tao Ran, and Zhou Si-yong, et al. Detection and parameter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2004, 47(2): 184-198.
- [10] 胥嘉佳, 刘渝, 邓振森. LFM 信号参数估计的牛顿迭代方法初始值研究[J]. 电子学报, 2009, 37(3): 598-602.
Xu Jia-jia, Liu Yu, and Deng Zhen-miao. The starting point problem of parameters estimation for LFM signal based on Newtons method[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(3):598-602.
- [11] Tretter S A. Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1985, IT-31(6): 832-835.
- [12] Händel P and Tichavský P. Frequency rate estimation at high SNR[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(8): 2101-2105.
- [13] Ristic B and Boashash B. Comments on "The Cramer-Rao lower bounds for signals with constant amplitude and polynomial phase"[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(6): 1708-1709.
- [14] 刘建成, 刘忠, 王雪松等. 高斯白噪声背景下的 LFM 信号的分数阶 Fourier 域信噪比分析[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(10): 2337-2340.
Liu Jian-cheng, Liu Zhong, and Wang Xue-song, et al. SNR analysis of LFM signal with gaussian white noise in fractional fourier transform domain[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(10): 2337-2340.
- [15] 刘建成, 王雪松, 刘忠等. 基于分数阶 Fourier 变换的 LFM 信号参数估计精度分析[J]. 信号处理, 2008, 24(2): 197-200.
Liu Jian-cheng, Wang Xue-song, and Liu Zhong, et al. Parameters resolution of LFM signal based on fractional fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2008, 24(2): 197-200.

- 李 宏: 男, 1982 年生, 博士生, 从事精确制导、LPI 雷达信号截获方面的研究。
- 秦玉亮: 男, 1980 年生, 博士, 讲师, 从事精确制导、信息对抗方面的研究。
- 李彦鹏: 男, 1972 年生, 副研究员, 从事精确制导、信息融合、目标识别性能评估等领域的研究。
- 王宏强: 男, 1970 年生, 研究员, 主要从事精确制导、信息融合、目标识别等领域的研究。
- 黎 湘: 男, 1967 年生, 教授, 主要从事精确制导、信息融合、非线性信号处理等领域的研究。