

## 一种数值稳健且低复杂度的信号子空间估计新方法

庄学彬\* 陆明泉 冯振明  
(清华大学电子工程系 北京 100084)

**摘 要:** 该文提出了一种数值稳健且低复杂度的信号子空间估计新方法。该方法通过多级维纳滤波器前向迭代构造观测数据协方差矩阵三对角化的转换矩阵,其列向量为信号子空间的一组正交基。与传统的相关相减结构相比,该文的多级维纳滤波器前向迭代通过 Householder 酉变换实现,显著增强了有限精度运算中信号子空间基向量的正交性,提高了数值稳健性。此外,基于 Householder 矩阵的酉性质和矩阵后向累积提出了一种转换矩阵的快速计算方法,降低了计算复杂度。计算机仿真结果验证了该方法的数值稳健性和计算效率。

**关键词:** 信号子空间估计; 多级维纳滤波器; Householder 酉变换; 后向累积

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)01-0090-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.01392

## A Numerically Robust and Low-complexity Method of Signal Subspace Estimation

Zhuang Xue-bin Lu Ming-quan Feng Zhen-ming

(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** A numerically robust and low-complexity method of signal subspace estimation is proposed in the paper. The transform matrix to tridiagonalize the covariance matrix of observation data is constructed in the forward recursion of multistage Wiener filter (MSWF), and its columns span the signal subspace. Compared with the traditional method of correlation subtractive structure, the forward recursion in the method is implemented with the Householder unitary transform. Therefore, it strengthens significantly the orthogonality of basis vectors in the signal subspace and improves the numerical robustness, especially in the finite-precision implementation. Besides, a method of calculating the transform matrix is proposed to reduce the computational complexity based on the unitary property of the Householder matrix and backward accumulation of matrices. Finally, simulation results demonstrate the numerical robustness and computational efficiency of the proposed method.

**Key words:** Signal subspace estimation; MultiStage Wiener Filter (MSWF); Householder unitary transform; Backward accumulation

### 1 引言

信号子空间估计问题已经成为许多领域的关键问题之一,如相控阵雷达的波达方向(DOA)估计和空时自适应处理(STAP)等。传统的信号子空间估计方法通常是对观测数据协方差矩阵进行特征值分解(EVD),对应大特征值的特征向量张成信号子空间,其余特征向量张成噪声子空间。然而 EVD 的计算复杂度非常高,运算量为  $O(M^3 + M^2N)$ ,其中  $M$  为观测数据的维数,  $N$  为形成协方差矩阵的采样支持长度。在很多工程应用中,特别是相控阵雷达和第三代移动通信系统,观测数据的维数  $M$  通常很大,从而限制了实时应用。

学者们提出了一系列方法来实现信号子空间的快速估计。Xu 等人<sup>[1]</sup>提出了基于 Lanczos 的快速子

空间分解方法,其运算量为  $O(M^2P + M^2N)$ ,其中  $P$  为信号子空间的维数。当  $P$  远小于  $M$  时,该方法的计算量得到一定程度减轻,然而其仍然需要计算观测数据协方差矩阵。另外一种方法是基于多级维纳滤波器(MSWF)<sup>[2]</sup>前向迭代来估计信号子空间。基于数据层次(data level)和相关相减结构(CSS)<sup>[3]</sup>,黄磊等人<sup>[4-6]</sup>提出了基于最小描述长度(MDL)的信号个数估计方法,避免了协方差矩阵的估计,其运算量仅为  $O(MNP)$ 。此外,沈明威等人<sup>[7]</sup>提出了基于 MSWF 的非均匀  $\Sigma\Delta$ -STAP 并行处理算法,在非均匀环境下能快速检测动目标。另外,刘敏等人<sup>[8]</sup>基于 MSWF 提出了一种改进的信号子空间估计方法。然而基于 data level 的 MSWF 前向迭代,特别是基于 CSS 的阻塞矩阵选择,尽管降低了计算复杂度,其数值稳健性却无法得到保证,尤其在有限精度运算中基向量的正交性可能急剧恶化,从而影响算法的数值稳健性。为了解决 CSS-MSWF 在有限精度运

2009-10-29 收到, 2010-10-15 改回

\*通信作者: 庄学彬 zhuangxb06@mails.tsinghua.edu.cn

算中的数值稳健性问题, Werner 等人<sup>[9]</sup>提出了基于 Householder 酉变换的 MSWF(HMSWF), 并将其应用于 GPS 抗干扰的 STAP 算法中。本文在 HMSWF 的基础上提出了一种数值稳健且低复杂度的信号子空间估计方法。首先构造了观测数据协方差矩阵三对角化的转换矩阵, 证明了其列向量为信号子空间的一组正交基。与传统的基于 CSS-MSWF 信号子空间估计方法相比, 本文的 MSWF 前向迭代通过 Householder 酉变换实现, 因此显著增强了有限精度运算中基向量的正交性, 提高了数值稳健性。此外, 本文基于 Householder 矩阵的酉性质和矩阵后向累积提出了一种转换矩阵的快速计算方法, 降低了计算复杂度。

## 2 相关知识

### 2.1 信号模型

假设  $M$  个阵元的均匀线阵(ULA)接收到  $P$  个窄带远场信号,  $M \times 1$  维的观测数据可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \\ &= [x_1(k), x_2(k), \dots, x_M(k)]^T \\ &= [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)][s_1(k), s_2(k), \dots, s_P(k)]^T \\ &\quad + [n_1(k), n_2(k), \dots, n_M(k)]^T, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $k$  为快拍时刻;  $x_M(k)$  代表第  $M$  个天线阵元的信号数据;  $\mathbf{s}(k)$ ,  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$  和  $\mathbf{n}(k)$  分别表示信号矢量、导向矩阵以及噪声矢量;  $\mathbf{a}(\theta_i)$  代表 DOA 为  $\theta_i$  的信号导向矢量, 并且具有如下形式:

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{j\varphi_i}, \dots, e^{j(M-1)\varphi_i}]^T \quad (2)$$

其中  $\varphi_i = 2\pi d \sin \theta_i / \lambda$ ,  $d$  和  $\lambda$  分别表示 ULA 阵的阵元间距以及接收信号的载波波长。

为了便于分析, 假设接收信号具有不同的波达方向  $\theta_i$ , 并且所有信号为零均值的平稳高斯过程; 此外, 噪声假设为时域白、空域白的零均值平稳高斯过程, 并且和信号不相关, 即有  $E\{\mathbf{s}(k)\mathbf{n}^H(k)\} = \mathbf{0}$ ,  $E\{\mathbf{n}(k)\mathbf{n}^H(k)\} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , 其中  $\sigma^2$  为噪声方差。

### 2.2 多级维纳滤波器 MSWF

MSWF 是一种有效的降秩算法, 其不需要对观测数据协方差矩阵求逆即可得到维纳-霍夫方程的渐近最优解, 甚至不用计算观测数据协方差矩阵<sup>[2]</sup>。图 1 给出了  $P$  级的 MSWF 前向迭代过程。

```

for  $i = 1, 2, \dots, P$ 
   $\mathbf{h}_i = E\{\mathbf{x}_{i-1}(k)d_{i-1}^*(k)\}$ 
   $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}_i / \sqrt{\mathbf{h}_i^H \mathbf{h}_i}$ 
   $d_i(k) = \mathbf{h}_i^H \mathbf{x}_{i-1}(k)$ 
   $\mathbf{B}_i = \text{null}\{\mathbf{h}_i\}$ 
   $\mathbf{x}_i(k) = \mathbf{B}_i \mathbf{x}_{i-1}(k)$ 

```

图 1 MSWF 前向迭代

相关相减结构(CSS-MSWF)是实现 MSWF 前向迭代的一种有效算法<sup>[3]</sup>, 其阻塞矩阵  $\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H$ ,  $\mathbf{h}_i$  为互相关矢量。因此 CSS-MSWF 前向迭代的第  $i$  级数据  $\mathbf{x}_i(k)$  可通过式(3)得到

$$\mathbf{x}_i(k) = (\mathbf{I} - \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H) \mathbf{x}_{i-1}(k) = \mathbf{x}_{i-1}(k) - \mathbf{h}_i d_i(k) \quad (3)$$

其中  $d_i(k)$  为 MSWF 前向迭代的第  $i$  级期望信号。CSS-MSWF 通过式(3)避免了计算矩阵向量乘法  $\mathbf{B}_i \mathbf{x}_{i-1}$ , 因此计算量明显减小。此外, CSS-MSWF 由一组互相关矢量  $\mathbf{h}_i (i = 1, 2, \dots, P)$  构成了转换矩阵  $\mathbf{T}_P = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P]$ 。文献[5]严格证明了在给定某一初始期望信号条件下,  $\mathbf{h}_i (i = 1, 2, \dots, P)$  为信号子空间的一组正交基。

然而 CSS-MSWF 中阻塞矩阵  $\mathbf{B}_i$  不具有酉性质, 即  $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^H \neq \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}_i^H \mathbf{B}_i \neq \mathbf{I}$ 。因此其将导致有限精度运算中的舍入误差通过 MSWF 前向迭代而传播, 舍入误差积累, 使算法的数值稳健性降低。为了解决 CSS-MSWF 在有限精度运算中的数值稳健性问题, Wiener 等人<sup>[9]</sup>提出了 HMSWF 并将其应用于 GPS 抗干扰的 STAP 算法中。HMSWF 前向迭代利用 Householder 酉变换矩阵  $\mathbf{Q}_i$  实现了基于阻塞矩阵  $\mathbf{Q}_{B,i}$  和互相关矢量  $\mathbf{h}_i$  的正交子空间分解(即观测数据的逐级分解), 其具有如下的关系:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_i &= [\mathbf{q}_i, \mathbf{Q}_{B,i}^H], \quad \mathbf{q}_i = \kappa_i^* \mathbf{h}_i \\ \mathbf{Q}_{B,i} \mathbf{h}_i &= \mathbf{Q}_{B,i} \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中  $\kappa_i^*$  为单位范数的相位旋转因子。显然 Householder 矩阵  $\mathbf{Q}_i$  的第 1 列  $\mathbf{q}_i$  等价于 CSS-MSWF 的互相关矢量  $\mathbf{h}_i$ ,  $\mathbf{Q}_{B,i}$  则相当于阻塞矩阵  $\mathbf{B}_i$ 。HMSWF 基于 Householder 酉变换矩阵  $\mathbf{Q}_i$  实现正交子空间分解, 而  $\mathbf{Q}_i$  具有严格的酉性质, 即  $\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_i^H = \mathbf{Q}_i^H \mathbf{Q}_i = \mathbf{I}$ 。酉变换减小了有限精度运算的舍入误差在 MSWF 前向迭代中的传播, 使算法的数值稳定性明显提高。

## 3 数值稳健的子空间估计方法

文献[9]给出了 HMSWF 前向迭代过程, 并应用于 STAP, 但未涉及子空间估计问题。此外, 其虽然强调了 HMSWF 的数值稳健性在于 Householder 矩阵的酉性质, 但未涉及到转换矩阵基向量的正交性弱化问题, 并且其性能仿真也局限于空时自适应处理后的信干噪比(SINR), 未研究转换矩阵基向量的正交性性能。本文在 HMSWF 的基础上, 构造了观测数据协方差矩阵  $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}$  三对角化的转换矩阵  $\mathbf{T}_P$ , 证明  $\mathbf{T}_P$  的列向量为信号子空间的一组正交基。最后的计算机仿真也着重研究基向量的正交性性能。

首先假设 HMSWF 前向迭代的期望信号向量为

$$\mathbf{d}(k) = [d_0(k), d_1(k), \dots, d_{P-1}(k)] \quad (5)$$

该期望信号向量的协方差矩阵为三对角矩阵, 并且转换矩阵  $\mathbf{T}_P$  实现  $\mathbf{R}_x$  的三对角化, 即

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{T}_P^H \mathbf{R}_x \mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} \sigma_{d_0}^2 & \delta_{01} & & & \\ \delta_{10} & \sigma_{d_1}^2 & \delta_{12} & & \\ & \delta_{21} & \sigma_{d_2}^2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \delta_{(P-2)(P-1)} \\ & & & \delta_{(P-1)(P-2)} & \sigma_{d_{P-1}}^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中  $\sigma_{d_i}^2 = E\{d_i^2\}$  和  $\delta_{i(i-1)} = E\{d_i(k)d_{i-1}^*(k)\}$  分别是 MSWF 前向迭代的各级期望信号方差和相邻级期望信号的协方差。由式(6)可以得到, MSWF 前向迭代的本质是通过基于互相关矢量和阻塞矩阵的正交分解实现  $\mathbf{R}_x$  的三对角化。由式(6)及 HMSWF 原理, 可得 HMSWF 的转换矩阵  $\mathbf{T}_P$ :

$$\mathbf{T}_P = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_P] = \left[ \mathbf{h}_1, \mathbf{Q}_{B,1}^H \mathbf{h}_2, \dots, \prod_{k=1}^{P-1} (\mathbf{Q}_{B,k}^H \mathbf{h}_P) \right] \quad (7)$$

其中  $\mathbf{t}_i = \prod_{k=1}^{i-1} (\mathbf{Q}_{B,k}^H \mathbf{h}_i)$ 。下面证明式(7)转换矩阵  $\mathbf{T}_P$  的列向量为信号子空间的一组正交基。首先证明  $\mathbf{t}_i (i=1, 2, \dots, P)$  的正交性。假设任意的  $\mathbf{t}_i$  和  $\mathbf{t}_j (1 \leq i < j \leq P)$ , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_j^H \mathbf{t}_i &= \left( \prod_{k=1}^{j-1} \mathbf{Q}_{B,k}^H \right) \mathbf{h}_j^H \left( \prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{Q}_{B,k}^H \right) \mathbf{h}_i \\ &= \mathbf{h}_j^H \left( \prod_{k=j-1}^i \mathbf{Q}_{B,k} \right) \left( \prod_{k=i-1}^1 \mathbf{Q}_{B,k} \right) \left( \prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{Q}_{B,k}^H \right) \mathbf{h}_i \quad (8) \end{aligned}$$

阻塞矩阵  $\mathbf{Q}_{B,i}$  满足  $\mathbf{Q}_{B,i} \mathbf{Q}_{B,i}^H = \mathbf{I}$ , 因此有

$$\mathbf{t}_j^H \mathbf{t}_i = \mathbf{h}_j^H \left( \prod_{k=j-1}^i \mathbf{Q}_{B,k} \right) \mathbf{h}_i = \mathbf{h}_j^H \left( \prod_{k=j-1}^{i-1} \mathbf{Q}_{B,k} \right) \mathbf{Q}_{B,i} \mathbf{h}_i \quad (9)$$

由式(4)有  $\mathbf{Q}_{B,i} \mathbf{h}_i = \mathbf{0}$ , 因此  $\mathbf{t}_j^H \mathbf{t}_i = 0$ 。之后, 类似文献[5]中的 CSS-MSWF 信号子空间的证明, 可以证明  $\mathbf{t}_i (i=1, 2, \dots, P)$  张成了 Krylov 子空间  $\text{Krylov}\{\mathbf{R}_x, \mathbf{r}\}$ , 即

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_P\} &= \text{Krylov}\{\mathbf{R}_x, \mathbf{r}\} \\ &= \text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{R}_x \mathbf{r}, \dots, \mathbf{R}_x^{P-1} \mathbf{r}\} \quad (10) \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{r} = E\{\mathbf{x}_0(k)d_0^*(k)\}$ 。另外亦可证明  $\text{Krylov}\{\mathbf{R}_x, \mathbf{r}\}$  和  $\mathbf{A}(\theta)$  的列空间张成同一值域空间, 因此  $\mathbf{T}_P$  的列向量即为信号子空间的一组正交基。基于 Householder 酉变换的 MSWF 正交分解, 最大化地减小了有限精度运算的舍入误差在 MSWF 前向迭代中的积累, 保证了信号子空间基向量的正交性, 从而显著提高了子空间估计的数值稳健性。

#### 4 子空间估计的快速计算方法

尽管利用式(7)可以数值稳健地估计信号子空

间, 计算式(7)却可能极大增加计算复杂度(涉及矩阵向量乘法)。文献[9]比较了 HMSWF 与 CSS-MSWF 的乘法计算复杂度, 虽然得出了 HMSWF 比 CSS-MSWF 略低的结论, 但这是由于空时自适应处理无需计算转换矩阵  $\mathbf{T}_P$ 。传统的基于 CSS-MSWF 的信号子空间估计仅需要执行  $P$  次的 MSWF 前向迭代即可直接获得  $\mathbf{T}_P = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_P]$ , 主要运算量仅涉及向量内积。而基于 HMSWF 估计信号子空间, 不仅需要进行  $P$  次的 MSWF 前向迭代, 还需要额外计算式(7)。本文利用 Householder 矩阵  $\mathbf{Q}_i$  的酉性质和矩阵后向累积快速地计算式(7)的转换矩阵  $\mathbf{T}_P$ 。相比于直接计算式(7), 本文提出的方法降低了计算复杂度, 其过程如下。

首先, 式(7)的转换矩阵  $\mathbf{T}_P$  可证明为矩阵  $\mathbf{Q}$  的前  $P$  列(证明过程略), 并且  $\mathbf{Q}$  为如下矩阵  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  的累积:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= [\mathbf{q}_1, \mathbf{Q}_{B,1}^H] \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{q}_2, \mathbf{Q}_{B,2}^H] \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{P-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{q}_P, \mathbf{Q}_{B,P}^H] \end{bmatrix} \\ &= \prod_{k=1}^P \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^P \bar{\mathbf{Q}}_k \quad (11) \end{aligned}$$

其中  $\bar{\mathbf{Q}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_k \end{bmatrix}$ , 且  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  的  $(k-1) \times (k-1)$  主子式

为单位矩阵  $\mathbf{I}_{k-1}$ 。计算 Householder 矩阵  $\mathbf{Q}$  (即  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  的累积)有两种方法: 前向累积和后向累积<sup>[10]</sup>, 如图 2 所示。

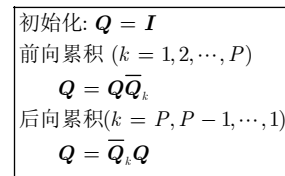


图2 矩阵的前向累积和后向累积

$\bar{\mathbf{Q}}_k$  的后向累积中(即第 1 步先计算  $\bar{\mathbf{Q}}_P \bar{\mathbf{Q}}_{P-1}$ , 再计算  $\bar{\mathbf{Q}}_P \bar{\mathbf{Q}}_{P-1} \bar{\mathbf{Q}}_{P-2}$ , 依此类推), 中间矩阵的  $(k-1) \times (k-1)$  主子式逐渐消失(最初主子式为  $\mathbf{I}_{P-1}$ ); 而  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  的前向累积中(即第 1 步先计算  $\bar{\mathbf{Q}}_1 \bar{\mathbf{Q}}_2$ , 再计算  $\bar{\mathbf{Q}}_1 \bar{\mathbf{Q}}_2 \bar{\mathbf{Q}}_3$ , 依此类推), 中间矩阵不存在单位矩阵的主子式。利用该性质, 本文转换矩阵  $\mathbf{T}_P$  的快速计算方法为: 不按照 MSWF 前向迭代的顺序(即前向累积)来计算矩阵  $\mathbf{Q}$ , 而是通过其后向累积计算  $\mathbf{Q}$ , 其过程如图 3 所示。图中  $\mathbf{v}_i$  和  $\beta_i$  为 HMSWF 前向迭代得到的 Householder 向量和系数因子。值得强调的是上述方法源于矩阵论中 Householder 矩阵累积的快速计算方法, 而本文则建立了信号处理中信号子

```

初始化:  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ 
累积:   for  $i = P : 1$ 
            $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_i(i : M, i : M) \times \mathbf{Q}(i : M, i : M)$ 
            $= (\mathbf{I} - \beta_i \mathbf{v}_i(i : M) \mathbf{v}_i^H(i : M)) \times \mathbf{Q}(i : M, i : M)$ 
       end
截取:    $\mathbf{T}_p = \mathbf{Q}(:, 1 : P)$ 

```

图 3 转换矩阵  $\mathbf{T}_p$  的快速计算过程<sup>[10]</sup>

空间估计与矩阵论中 Householder 矩阵累积之间的联系,从而提出了上述信号子空间快速计算方法。

下面将分析传统 EVD 方法、CSS-MSWF 方法、直接计算式(7)的 HMSWF 方法以及基于图 3 的 HMSWF 方法的计算复杂度。传统 EVD 方法需要计算协方差矩阵并进行特征值分解,总计算量为  $O(M^2N + M^3)$ 。因此其计算量与  $M^3$  成比例,且随  $M$  增加而急剧变大。CSS-MSWF 方法仅需要执行  $P$  次的 MSWF 前向迭代即可得到转换矩阵  $\mathbf{T}_p$ ,而基于 HMSWF 的子空间估计方法需要额外计算转换矩阵  $\mathbf{T}_p$ 。表 1 给出了 3 种 MSWF 方法的运算量(仅考虑乘法运算)。由表 1 可知, CSS-MSWF 方法的计算量与  $M$  成比例,计算量增加缓慢。而 HMSWF 方法由于需要计算  $\mathbf{T}_p$ ,一定程度上增加了计算量,并且增加的计算量与  $M^2$  成比例。上述仅定性分析了各种方法的计算量,且 3 种 MSWF 方法的计算量难以直观比较。相比直接计算式(7)的 HMSWF 方法,本文提出的计算方法在一定程度上降低了计算复杂度,在下一节实际仿真结果中将得到验证。

## 5 仿真结果

为了验证本文提出的信号子空间估计方法的数值稳健性并与传统的 CSS-MSWF 方法比较,在有限精度定点运算中进行了仿真实验。所有的实验结果都是基于 100 次独立的 Monte-Carlo 实验得到的。假设阵元个数  $M=50$ ,阵元间距为半波长。阵元接收到 6 个相等功率的非相干窄带信号( $P=6$ ),DOA 分别为  $\{0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ\}$ ,观测数据采样支持长度  $N=200$ 。仿真中,定义如下的正交性误差<sup>[10]</sup>:

$$Z(\mathbf{T}_p) = \|\mathbf{T}_p^H \mathbf{T}_p - \mathbf{I}\|_2 \quad (12)$$

图 4 是转换矩阵  $\mathbf{T}_p$  的正交性误差随 SNR 变化的曲线图。算法在定点运算中实现,定点数的小数

比特数  $L=18$ 。由图 4 可以看到,传统的 CSS-MSWF 方法得到的  $\mathbf{T}_p$  正交性误差随着 SNR 增加而增加,而本文方法的  $\mathbf{T}_p$  正交性误差却基本不变,并且明显为 CSS-MSWF 方法的  $10^{-4} \sim 10^{-1}$  左右。图 5 给出了转换矩阵  $\mathbf{T}_p$  的正交性误差随定点数的小数比特数  $L$  变化的曲线图,实验中 SNR=18 dB。由图看出,两种方法的正交性误差随  $L$  减小而逐渐增加,并且两者的变化速率基本一致。而本文方法的误差为 CSS-MSWF 方法的  $10^{-3}$  左右,且当  $L \leq 12$ , CSS-MSWF 方法的误差接近最大值 1,基向量已基本失去正交性。图 4 和图 5 的仿真结果表明,与传统的 CSS-MSWF 方法相比,本文方法得到的信号子空间基向量的正交性保持得非常好,其本质原因是 Householder 酉变换最大化地减小了有限精度运算的舍入误差在 MSWF 前向迭代中的传播。

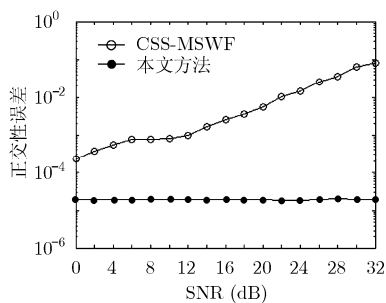
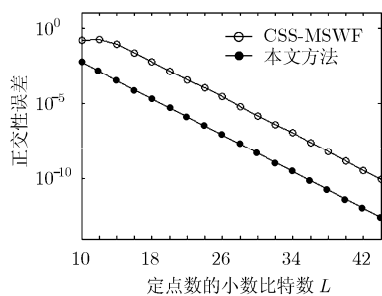
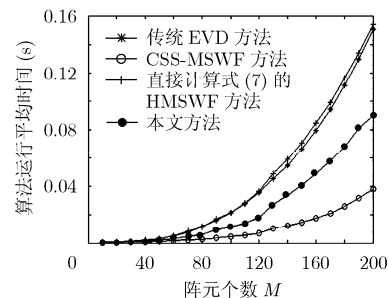
为了比较传统 EVD 方法和表 1 中 3 种 MSWF 方法的计算复杂度并验证本文提出的计算方法的有效性,仿真中利用 Matlab 的 TIC 和 TOC 函数对上述 4 种算法进行实际仿真计数。图 6 给出了各种算法的平均运行时间随阵元个数  $M$  变化的曲线图,其中采样支持长度  $N=4M$ 。由图可见,当阵元数  $M \leq 40$  时,4 种算法的运行时间较为接近。当  $M > 40$  时,传统 EVD 方法和直接计算式(7)的 HMSWF 方法的运行时间显著增加且最大,而 CSS-MSWF 方法的运行时间随  $M$  缓慢变化且最小,从而验证了第 4 节中 CSS-MSWF 方法的计算量与  $M$  成比例,而传统 EVD 方法的计算量与  $M^3$  成比例。而 HMSWF 方法计算量显著增加主要取决于转换矩阵  $\mathbf{T}_p$  的计算。此外,相比于传统 CSS-MSWF 方法,本文的子空间估计方法尽管提高了数值稳健性,但转换矩阵  $\mathbf{T}_p$  的计算也同时增加了计算复杂度。而由图 6 可见,相比直接计算式(7)的 HMSWF 方法,本文提出的计算方法显著降低了计算复杂度,尤其当  $M$  较大时。

## 6 结论

本文提出了一种数值稳健且低复杂度的信号子空间估计方法。该方法首先构造了观测数据协方差矩阵三对角化的转换矩阵,其列向量为信号子空间的一组正交基。Householder 酉变换减小了有限精度运算的舍入误差在 MSWF 前向迭代中的传播,增强

表 1 3 种 MSWF 估计方法的运算量

方法	MSWF 前向迭代	转换矩阵 $\mathbf{T}_p$ 计算
CSS-MSWF	$3NMP$	0
直接计算式(7)的 HMSWF	$3NMP - 3NP^2 / 2$	$\sum_{i=1}^{P-1} (M-i)(M-i+1)(P-i)$
本文提出的方法	$3NMP - 3NP^2 / 2$	$2 \sum_{i=M-P+1}^M i^2$

图4  $Z(\mathbf{T}_p)$  随 SNR 变化的曲线,  $L=18$ 图5  $Z(\mathbf{T}_p)$  随  $L$  变化的曲线, SNR=18 dB图6 算法运行时间随  $M$  变化的曲线

了基向量的正交性,从而提高了算法的数值稳健性。此外,本文基于 Householder 矩阵的正交性和矩阵后向累积提出了一种转换矩阵的快速计算方法,在提高算法数值稳健性的同时,降低了计算复杂度。计算机仿真结果验证了本文方法的数值稳健性和计算效率。该方法在 DOA 估计的实时应用中具有一定的前景。

### 参考文献

- [1] Xu G and Kailath T. Fast subspace decomposition [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(3): 539-551.
- [2] Goldstein J S, Reed I S, and Scharf L L. A multistage representation of the Wiener filter based on orthogonal projections [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1998, 44(7): 2943-2959.
- [3] 丁前军, 王永良, 张永顺. 自适应阵列中多级维纳滤波器的有效实现算法[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(5): 936-940.  
Ding Qian-jun, Wang Yong-liang, and Zhang Yong-shun. Efficient algorithms for implementation multistage Wiener filter in adaptive arrays. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2006, 28(5): 936-940.
- [4] Huang L and Wu S. Low-complexity MDL method for accurate source enumeration [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(9): 581-584.
- [5] Huang L, Wu S, and Li X. Reduced-rank MDL method for source enumeration in high-resolution array processing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(12): 5658-5667.
- [6] Huang L, Long T, and Wu S. Source enumeration for high resolution array processing using improved Gerschgorin radii

without eigendecomposition [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(12): 5916-5925.

- [7] 沈明威, 朱岱寅, 朱兆达. 基于多级维纳滤波器的非均匀  $\Sigma \Delta$ -STAP 研究[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(6): 1308-1311.  
Shen Ming-wei, Zhu Dai-yin, and Zhu Zhao-da. Study on  $\Sigma \Delta$ -STAP in nonhomogeneous environment based on multistage Wiener filter. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(6): 1308-1311.
- [8] 刘敏, 金光明, 戴旭初. 一种基于多级维纳滤波器的信号子空间快速估计方法[J]. 中国科学技术大学学报, 2009, 39(8): 792-797.  
Liu Min, Jin Guang-ming, and Dai Xu-chu. Fast estimation of signal subspace based on multistage Wiener filter. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2009, 39(8): 792-797.
- [9] Werner S, With M, and Koivunen V. Householder multistage Wiener filter for space-time navigation receivers [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(3): 975-988.
- [10] Golub G and Loan C V. *Matrix Computations* [M]. 3rd ed. Baltimore. The Johns Hopkins University Press, 1996: 208-213.

庄学彬: 男, 1983 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、GPS 信号处理和抗干扰技术。

陆明泉: 男, 1964 年生, 教授, 硕士生导师, 研究方向为通信信号处理、卫星导航系统、导航战和区域性信息支持系统。

冯振明: 男, 1946 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为信号处理、通信与信息系统、卫星导航系统。