未知频偏下长码直扩信号的盲解扩

牟青 魏平

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

摘要:该文提出一种新的数据模型用于盲解扩含未知频偏的长码直扩信号。它将长码直扩信号重排为含有缺失数据的短码直扩信号,然后扩展使用了短码伪码周期的盲同步算法,最后采用交替投影算法恢复出信号子空间,并用于盲解扩。仿真实验表明提出的方法不受未知载频的影响,在低信噪比下表现了良好的性能。
 关键词:信号处理;长码直扩信号;盲解扩;低秩缺失数据模型;交替投影算法
 中图分类号:TN911.7
 文献标识码: A
 文章编号: 1009-5896(2010)08-1797-05
 DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.01210

Blind Despreading of Long-code DS-SS Signals with Unknown Carrier Offset

Mou Qing Wei Ping

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: A novel signal model with missing-data is proposed to directly blindly despread the long-code Direct Sequence Spread Spectrum (DS-SS) signals with unknown carrier frequency. The long-code DS-SS signals are represented as the short-code ones with missing data, and then the blind synchronization algorithm of the short-code DS-SS signals is extended to the long-code ones. Finally, the Alternative Projection (AP) algorithm is used to restore the signal subspace so that blind despreading can be obtained. The simulation results show that the proposed approach is immune to the unknown carrier and show good performance in low-SNR scenarios. **Key words**: Signal processing; Long-code DS-SS Signals; Blind dispreading; Low-rank model with missing data;

Alternative Projection (AP) algorithm

1 引言

直接序列扩频信号在军用和民用领域有着非常 多的应用。由于它往往具有很低的功率谱密度,给 非合作条件下的检测和截获带来了不小的困难。通 常针对非合作直扩通信接收系统的研究以短码直扩 信号为主,同时由于其形式比较简单,其方法比较 成熟^[1]。而对于长码直扩信号,即伪码周期大于信息 码宽度,公开的研究结果并不多见。这主要是因为 其研究比较困难。从非合作接收的角度,长码直扩 信号分为两种,一种是伪码周期特别长,以至于接 收机无法接收到完整的伪码序列,对于此种长码直 扩信号, 伪码序列的估计需要对其发生机制具有一 定的了解:另一种为接收机可以收到重复的伪码序 列,在这种情况中,恢复伪码波形不需要知道伪码 的发生机制^[2]。对于此类长码直扩信号的盲解扩研究 最近已引起了一定的兴趣^[3-6]。其中大都讨论的是 伪码周期恰好为信息码宽度的整数倍的特例^[4-6],

尽管在理论研究中常假定接收到的是基带直扩 信号[1-6],但接收到的直扩信号含有未知载频是实 际中遇到的一种普遍情况。主要原因有两点:首先, 在未知伪码的情况下提前精确估计载频是比较困难 的,因为此时信噪比往往很低,特别是对于圆信号, 如 QPSK 调制,通常的载频估计算法往往失效;其 次,如果存在多普勒效应,载频估计和跟踪将更加 困难。对于短码直扩信号,未知的载频往往可以被 吸收至伪码波形中,因此频偏的存在不影响盲解扩。 但是对于长码直扩信号却不能如此。Agee 等人提出 的 DMDS 算法^[2]只针对了基带长码直扩信号,在存 在频偏下其伪码估计性能会有所下降,同时文献[2] 还建议在盲解扩之后需要设计专门的锁相环以便消 除信息码序列中载频的残差,但未深入讨论。Qui 等人提出一种分段估计算法^[3],长码直扩信号被分割 为相互重叠的小段,每段内近似地只含有一位信息 码,因而可采用短码直扩信号伪码估计算法分段估

由于这种情况可视为短码直扩信号的直接扩展⁶⁹,本 文不做讨论,而将考虑伪码周期不是信息码宽度整 数倍的更一般情况。

²⁰⁰⁹⁻⁰⁹⁻¹¹ 收到, 2009-12-01 改回 通信作者:魏平 pwei@uestc.edu.cn

计伪码,然后根据重叠部分拼接出完整的伪码估计。因为这种方法只能用来拼接实信号,因此也不适用于这里所讨论的复信号。据作者所知,目前还未见专门的含有未知载频长码直扩信号盲解扩的公开研究,本文将填补这一空白。

本文的核心是提出了一种含缺失数据模型以便 把长码直扩信号重构为短码直扩信号。在该模型中, 信息码序列的延时可通过短码盲同步算法估计得 到,同时载频也被吸收至伪码波形,盲解扩问题被 转化为含缺失数据的低秩逼近问题。本文提出采用 AP 算法估计出含载频的伪码波形,并由它对直扩信 号进行盲解扩。所提出的方法不受未知载频的影响, 也不需像文献[2]那样在盲解扩后需要设置专门的锁 相环来消除残留载频。

2 有频偏的长码直扩信号缺失数据模型

假定伪码周期,信息码速率已知,这些参数也 可以事先估计得到^[7,8]。设接收机端中频长码直扩信 号经过采样后,可表示为

$$y(n) = \sqrt{E_s} e^{j\omega n} d(n-\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(n-mL) + w(n),$$

$$n = 0, 1, \cdots, N-1$$
(1)

其中

$$d(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b(k)q(n-kG)$$
(2)

式(1),式(2)中,*E*_s为信号功率,*w*(*n*)为方差为 σ^2 的复高斯白噪声, ω 是载波频率。*L*和*G*分别是伪码周期长度和信息码宽度,假定均为整数。*c*(*n*), 0 ≤ *n* < *L* 时为伪码波形序列,*n* 取其它值时*c*(*n*) = 0。令 $||c(n)|| = \sqrt{L}$, ||•||为 Frobenius 范数。扩频 波形是伪码序列与广义的信道冲击响应(包括发射, 信道传输和接收环节)的卷积,它的长度假设为*L*, 这种假设当*G*远大于信道相对最大时延时是很好的 近似。整数 0 ≤ τ < *G* 为信息码波形 *d*(*n*)的相对时 延,{*b*(*k*)}为独立同分布等概率的信息码序列且 *E*{|*b*(*k*)|²}=1。*q*(*n*)为矩形门函数,即*q*(*n*)只在 0 ≤ *n* < *G* 时为 1,其它值为 0。定义信噪比为 *E*_s/ σ^2 。

频偏长码直扩信号缺失数据模型是构造一个短码直扩信号模型,前者所有的样本点均可放入后者,后者其它的点即为缺失数据点,同时因为含有载频,放入时还要保留样本点的先后顺序。假定 τ 已知(τ 的估计见下节),则缺失数据模型是一个(L+G-1)× M_0 矩阵 $Z(\tau)$, $M_0 = [(N+\tau)/G]$,[a]表示对a上取整。 $Z(\tau)$ 的取值如下: $Z(\tau)$ 的第1列的第1至 $G - \tau$ 元素依次为 {y(n)} $_{n=0}^{G-\tau-1}$,从第 m_0 列的第 $mod((m_0 - 1)G - \tau, L) + 1$ 个元素开始顺次写入 {y(n)} $_{n=(m_0-1)G-\tau}^{m_0G-\tau-1}$,1< $m_0 < M_0$,mod(x, y)表示对x

进行模 y 运算,最后从第 M_0 列的第 mod(($M_0 - 1$) $G - \tau, L$) +1 个元素开始顺次写入 {y(n)}^{$N-1}</sup>_{<math>n=(M_0-1)G-\tau$}。 $Z(\tau)$ 中没有被写入的元素即为缺失数据,记为 0。 标志 $Z(\tau)$ 缺失数据位置可用一个和矩阵 $Z(\tau)$ 相同 维数的 $Q(\tau)$, $Q(\tau)$ 中与 $Z(\tau)$ 中缺失元素相同位置的 元素为 0,否则为 1。注意到 $Z(\tau)$ 中每列的元素均属 同一信息码,同时非缺失元素连续排列,即</sup>

$$\boldsymbol{Z}(\tau) = \boldsymbol{Q}(\tau) \odot \boldsymbol{X} \tag{3}$$

其中⊙为点乘,*X*为存在频偏的同步短码直扩信号的观测矩阵

$$\boldsymbol{X} = \sqrt{E_s} \boldsymbol{s} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \operatorname{diag} \left(\boldsymbol{a}(\varphi) \right) + \boldsymbol{W}$$
(4)

其 中 $s = [c(0) c(1)e^{j\omega} \cdots c(L-1)e^{j(L-1)\omega} c(0)e^{jL\omega}$ $c(1)e^{j(L+1)\omega} \cdots c(G-2)e^{j(L+G-2)\omega}]^{T}$, $b = [b(0) \cdots$ $b(M_0 - 1)]^{T}$, $a(\varphi) = [e^{j\varphi[0/L]} e^{j\varphi[(G-\tau)/L]} e^{j\varphi[(2G-\tau)/L]} \cdots$ $e^{j\varphi[((M_0 - 1)G-\tau)/L]}]^{T}$, 这里 $e^{j\varphi} = e^{j\omega L}$, [a]表示对 a 下 取整, W 是观测噪声。diag(•) 是对角操作符,如果 (•) 是向量,则 diag(•) 是对角矩阵且其对角元素为 (•),如果 (•) 是矩阵,则 diag(•) 为 (•) 对角元素组成 的向量。式(4)中载频已被吸收至伪码波形s, $a(\varphi)$ 为 残留的相差项。如果 $\omega = 2k\pi/L$, $k \in \mathbb{N}$, 相差为 0, 式(4)退化为基带同步短码直扩信号。但在 ω 未知的 情况下,通常相差总是存在的。

3 信息码波形时延 τ 的估计

在上节的缺失数据模型基础上, τ 的估计可采 用由文献[9]所提出的短码直扩信号的盲同步算法, Frobenius 范数法。步骤如下:

(1)构造检测统计量

$$T(k) = \left\| \boldsymbol{Z}(k)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}(k) - \operatorname{diag}\left(\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{Z}(k)\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}(k)\right)\right) \right\|,$$

$$k = 0, 1, \cdots, G - 1$$
(5)

该 检 测 统 计 量 *T*(*k*) 与 文 献 [9] 中 略 有 不 同, *Z*(*k*)*Z*^H(*k*)对角线上的元素因为对判决没有贡献,略 去以便减小噪声。

(2) τ 的估计为 $\hat{\tau} = \operatorname*{argmax}_{k} T(k)$ (6)

由于只有当Z(k)恰好为同步短码直扩信号时, 它的样本自相关矩阵的每个元素才是来自同一信息 码内样本的相关累积;否则,总有部分元素的计算 来自不同信息码内样本的非相干积累,损失了这些 元素的模值,因此当N足够大时, $Z(\tau)$ 最大。

4 基于缺失数据模型的伪码波形的估计

由上节得到的[÷],本节在模型式(3)的基础上估 计*s*。由式(4)观察可得,同步短码直扩信号是秩-1 信号。因此*s*的估计可通过子空间方法得到。但是 由于缺失数据的影响,*Z*([÷])不能直接被用于子空间 分解。加权低秩近似(WLRA)作为一种广义的主成 分分析可适用于这种情况,即

$$\langle \hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}} \rangle = \underset{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}}{\operatorname{argmin}} \left\| \left(\boldsymbol{Z}(\hat{\tau}) - \boldsymbol{u} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \right) \odot \boldsymbol{Q}(\hat{\tau}) \right\|$$
(7)

则由伪码估计固有的复标量模糊,s的估计 $\hat{s} = k\hat{u}$, $k \in \mathbb{C}$ 。

WLRA 问题近来已获得了相当的注意^[10]。由于 WLRA 问题通常并不存在解析解,且由于非凸而没 有有效的算法保证会收敛至全局极值点,这里将采 用 AP 算法求解。和其他 WLRA 算法比起来,AP 算法的一个重要优点是能保证至少收敛至局部极 值。此外,下面推导表明,它在求解式(7)时将表现 出很高的计算效率。以下将推导出 AP 算法。

式(7)中目标函数可表示为

$$\left\| \left(\boldsymbol{Z}(\hat{\tau}) - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \right) \odot \boldsymbol{Q}(\hat{\tau}) \right\| = \left\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{v} \right\| = \left\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{u} \right\| \quad (8)$$

其中 $y = [y(0) \ y(1) \ \cdots \ y(N-1)]^{T}$,

$$\boldsymbol{F} = f_{\text{vec}(\boldsymbol{Q})}(\boldsymbol{I}_{M_0} \otimes \boldsymbol{u}) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{G} = f_{\text{vec}(\boldsymbol{Q})}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{I}_L) \tag{10}$$

其中 \otimes 是 Kronecker 积, vec(A) 为把 A 按列排列成 向量, I_M 为 $M \times M$ 维单位矩阵, $f_{\text{vec}(Q)}(A)$ 为保留 vec(Q) 中含元素 1 的行,而删除其余的行。最小化 式(8)可得

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$$
(11)

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}$$
(12)

AP 算法就是从给定的初始值(种子)开始交替迭代 更新 〈**u**, **v**〉。整理式(11)和式(12)可得

$$\hat{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{Z}(\hat{\tau})^{\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{u}}^{*}). / \left(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{u}} \odot \, \hat{\boldsymbol{u}}^{*}) \right)$$
(13)

$$\hat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{Z}(\hat{\tau})\hat{\boldsymbol{v}}^*)./(\boldsymbol{Q}(\hat{\boldsymbol{v}}\odot\hat{\boldsymbol{v}}^*))$$
(14)

其中./表示点除。式(13)和式(14)表明 AP 算法不需 要任何矩阵求逆过程,因此计算简单稳定。AP 算法 的步骤总结如下:

(1)随机产生一个种子 $\hat{u}^{(0)}$,设k=0。

(2)由式(13)和式(14)得到 $\hat{v}^{(k)}$ 和 $\hat{u}^{(k)}$ 。判断是否 $||\hat{u}^{(k)} - \hat{u}^{(k-1)}|| < \varepsilon$, ε 为很小的正数,如果成立,则 表明迭代已收敛,于是中止循环,如果不成立,设 k = k + 1,继续(2)直至收敛。

(3)把 $\hat{u}^{(k)}$ 和 $\hat{v}^{(k)}$ 作为初始值 $\hat{u}^{(0)}$ 下式(7)的解,计 算 目 标 函 数 $\operatorname{error}(\hat{u}^{(k)}, \hat{v}^{(k)}) = ||(\mathbf{Z}(\hat{\tau}) - \hat{u}^{(k)} \hat{v}^{(k)T})$ $\odot \mathbf{Q}||_{\circ}$

(4)产生不同的种子,重复步骤(1)到步骤(3), 得到若干组解,比较它们各自的目标函数,把具有 最小目标函数的解作为最终的解(*û*,*î*)。

原则上由于 AP 算法只能收敛到局部极值,选 取多次不同的种子反复计算是必要的。尽管全局最 优解仍是未知的,但根据实际经验,AP 算法在问题 中表现得相当稳健,在多次计算下收敛至相同的 û(在标量模糊的意义上),因此在很多场合往往一 次计算就足够了,多次计算对结果的改善并不明显。

5 长码直扩信号的盲解扩估计信息码

由式(4)可知,为了估计b,除了估计出s外, 还需先估计 $e^{j\varphi}$ 。观察到

 $s(l)e^{j\varphi} = s(l+L), \ l = 0,1,\dots,G-2$ (15) 其中 $s(l) \ge s$ 的第l+1个元素。 $e^{j\varphi}$ 的估计 $e^{j\varphi}$ 可直接 从式(15)的最小二乘解得到,即

$$e^{j\hat{\varphi}} = \left(\sum_{l=0}^{G-2} \hat{s}(l+L)\hat{s}(l)\right) / \left|\sum_{l=0}^{G-2} \hat{s}(l+L)\hat{s}^{*}(l)\right|$$
(16)

通过e^{jŵ}还可进一步改善s的估计,即家

$$\overline{s}(l) = \begin{cases} \left(\hat{s}(l) + \hat{s}(G+l)e^{-j\varphi}\right)/2, \ l = 0, 1, \cdots, G-2\\ \hat{s}(l), \qquad l = G-1, G, \cdots, L-1\\ \left(\hat{s}(l)e^{j\varphi} + \hat{s}(G+l)\right)/2, \ l = L, L+1, \cdots, L+G-2 \end{cases}$$
(17)

最后,b的估计 \hat{b} 可由解扩后的判决量决定

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \operatorname{dec}\left(\left(\boldsymbol{Z}(\hat{\tau})^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{s}}^{*}\right) \odot \boldsymbol{a}(-\varphi)\right)$$
(18)

其中 dec(x) = $e^{j2\pi d/M}$ 是 M -PSK 符号的判决函数, $2\pi d/M - \pi/M \le \angle x \le 2\pi d/M + \pi/M$, $\angle x$ 是 x 的 相位。由于盲解扩问题固有的模糊性, **b** 常常在假 设为差分编码的情况下衡量其估计的性能。

6 仿真实验

本节将从同步环节和盲解扩环节考察本文提出 的方法的性能。长码直扩信号的伪码周期L = 63, 信息码宽度G = 31,定义信噪比 SNR = E_s / σ^2 ,信 息码采用 QPSK 调制。每次仿真实验中,伪码按独 立同分布复高斯随机序列产生, τ 按[0,G - 1]内均匀 分布产生, ω 按在[0,2 π)间均匀分布产生。在 AP 算 法估计伪码时,每次实验只产生一次种子, \hat{u} 初始 值为独立同均匀分布的复序列, $\varepsilon = 10^{-9}\sqrt{L}$ 。为了 评估 τ 和s,采用归一化均方误差(NMSE),即

$$\text{NMSE}_{\tau} = E\left\{ \left(\mod(\tau - \hat{\tau} + G/2, G) - G/2 \right)^2 / G^2 \right\}$$
(19)

为了评估信息码的估计性能,在信息码为差分编码 的假设下,采用误码率(BER)作为指标。图中每点 均经过 100 次仿真实验。

实验1 同步环节中 τ 的估计性能图 1 为-3 dB 和-10 dB 两种信噪比下 NMSE_{τ}随样本长度变化的 情况。从图中可以看到,NMSE_{τ}随样本长度变长而 迅速下降。即使在不长的样本下, τ 的估计也能得 到满意的结果。

实验 2 盲解扩方法的性能 图 2 为-3 dB 和 -10 dB两种信噪比下盲解扩的信息码误码率随样本 长度变化的情况。图中还给出了合作解扩下的信息 码误码率,即假定知道c和 τ 。从图中可以看到, 随着样本长度的增加, 盲解扩的误码率接近各自的 合作解扩下的误码率,因为未知参数的估计随着样 本长度的增加而逐渐精确。

实验3 本文方法与文献[2]提出的 DMDS 算法 性能比较以及存在载频频偏时对性能的影响

本实验中考察 N = 3150 下,本文提出方法和 DMDS 在 $\omega = 0$ 和 $\omega = 0.2\pi$ 下的信息码误码率,同 时也给出合作解扩下信息码的误码率。图中可以看 到,即使是对基带信号,本文提出的方法也明显好 于 DMDS, 特别是在误码率比较低的场合。这是因 为本文提出的方法充分利用了长码直扩信号的结 构,采取了同步算法使扩频波形的估计更为精确, 而 DMDS 算法在扩频波形估计时没有同步步骤而 降低了估计精度。从图中还可以看到,随着信噪比 的降低,它们的性能均下降,因为有限的样本长度 给伪码估计带来的误差随着信噪比降低而增大。 $\omega = 0.2\pi$ 时, DMDS 方法几乎失效, 因为 DMDS 算法是在基带信号模型下推导的,而本文提出的方 法不受影响。尽管文献[2]针对其在存在载频频偏时 失效的情况建议在解扩之后增加一个残留载频的锁 相环,但没有做详细的讨论,因此这里的仿真也没 有考虑。不过由于在基带时, DMDS 的性能就不如 本文提出的方法,再考虑到锁相环存在的估计误差, 使得 DMDS 的性能在增加锁相环后将比基带时表 现得更差。

7 结束语

本文讨论了中频长码直扩信号的盲解扩问题。 按照一种缺失数据模型重构了长码直扩信号,在此 模型之上,首先扩展应用了盲同步算法,然后提出 交替投影算法恢复出信号子空间,最后完成盲解扩。 和传统的盲解扩研究不同,本原理无需专门设计环 节去除残余载频。由于提出的盲解扩原理不需要事 先进行下变频,特别适合低信噪比场合和圆调制信 号。仿真实验验证了方法的有效性,同时,其性能 即使在基带信号下也优于传统的 DMDS 算法。



图 1 Frobenius 同步算法在缺失数据模型下的性能

参考文献

- Chang Liang, Wang Fu-ping, and Wang Zan-ji. Low [1] complexity method for spreading sequence estimation of DSSS signal in non-cooperative communication systems[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(1): 41 - 49.
- [2] Agee B G, Kleinman R J, and Reed J H, Soft synchronization of direct sequence spread spectrum signals[J]. IEEE Transactions on Communications, 1996, 44(11): 1527-1536.
- Qui P Y, Huang Z T, and Jiang W L, et al. Improved [3] blind-spreading sequence estimation algorithm for direct sequence spread spectrum signals[J]. IET Signal Process, 2008, 2(2): 139-146.
- 张天骐,周正中,林孝康等.低信噪比长伪码直扩信号的盲估 [4]计方法[J]. 信号处理, 2008, 24 (6): 370-376.

Zhang Tian-qi, Zhou Zheng-zhong, and Lin Xiao-kang, et al.. Appraoch to blind estimation of lower SNR long code DS signals[J]. Signal Processing, 2008, 24(6): 370-376.

- 王满喜,李宏,马刈非等.低信噪比下非周期性直扩信号的盲 [5]估计 [J]. 电子科技大学学报, 2009, 38(2): 177-181. Wang Man-xi, Li Hong, and Ma Yi-fei, et al.. Blind estimation of lower SNR aperiodic DS signals[J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2009, 38(2): 177-181.
- [6]Daneshmand S, Aghaeinia H, Tohidian M, and Jahromi A J. Blind estimation of signal in periodic long-code DSSS communications[C]. SARNOFF '09. IEEE, Princeton, 2009: 1-6.
- 张天骐,代少升,杨柳飞等.在残余频偏下微弱直扩信号伪码 [7] 周期的谱检测[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(40):

777-781.

Zhang Tian-qi, Dai Shao-sheng, and Yang Liu-fei, *et al.*. Method of spectra for periodic detection of the PN sequence in the weak DS-SS signals with residual carrier[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(4): 777–781.

- [8] 徐海源,王丰华,黄知涛等.长码直扩信号的符号速率盲估计 方法[J].国防科技大学学报,2007,29(6):44-48.
 Xu Hai-yuan, Wang Feng-hua, and Huang Zhi-tao, et al. Blind estimation of the symbol rate of a long code DSSS signal[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2007, 29(6): 44-48.
- [9] Bouder C, Azou S, and Burel G. A robust synchronization

procedure for blind estimation of the symbol period and the timing offset in spread spectrum transmissions [C]. IEEE International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications, Prague, 2002: 238–241.

- [10] Manton J, Mahony R, and Hua Y. The geometry of weighted low-rank approximations [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(2): 500–514.
- 牟 青: 男,1977年生,博士生,研究方向为非合作直扩通信系 统、弱信号检测.
- 魏 平: 男,1966年生,教授,博士生导师,从事无源定位系统、 电子侦察与无线电监视、阵列信号处理等方面研究.