第 32 卷第 10 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.32No.10
2010 年 10 月 Journal of Electronics & Information Technology Oct. 2010

# 基于双树小波通用隐马尔可夫树模型的图像压缩感知

练秋生 王 艳
(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

**摘 要**：标准压缩感知图像重构仅利用图像小波系数具有稀疏性的先验知识，未能利用小波系数的结构分布特性。利用基于模型压缩感知重构思想，将能有效描述图像小波系数分布特性的隐马尔可夫树(HMT)模型引入到图像的压缩感知重构。经过理论推导，将基于 HMT 模型的重构转化为型如标准图像压缩感知重构的优化问题，并提出基于贝叶斯优化的凸集交替投影法进行求解。为进一步提高重构质量和速度，引入了双树小波域通用 HMT (uHMT)模型及改进的 uHMT (iuHMT)模型代替小波域 HMT 模型。实验结果表明，基于双树小波域 iuHMT 模型的重构图像的平均峰值信噪比(PSNR)比 uHMT 模型高 0.97 dB.

**关键词**：压缩感知；模型压缩感知；双树小波；uHMT 模型；凸集交替投影

**中图分类号**：TN911.73 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2010)10-2301-06

**DOI**: 10.3724/SP.J.1146.2009.01153

# Image Compressed Sensing Based on Universal HMT of the Dual-tree Wavelets

Lian Qiu-sheng Wang Yan
(*Institute of information science and technology*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

**Abstract**: The standard Compressed Sensing (CS) reconstructions of image exploit simply the sparse priors of the wavelet coefficients, ignoring the structural information of the wavelet coefficients. In this paper, the Hidden Markov Tree ( HMT ) model is integrated in the compressed sensing，which has been found successful in capturing the key features of the joint probability density of the wavelet coefficients of real-world image. An optimization issue which is similar to the standard compressed sensing is derived from the MAP reconstructions for the image based on HMT model, and an alternating convex projection algorithm based on Bayesian optimization is proposed. What's more, a universal HMT (uHMT) model based on the dual-tree wavelet transform and its improved form are integrated to improve the reconstruction performance further, instead of the HMT model of the orthogonal wavelet transform. As the experiments show, the average Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) of the reconstructed image based on the improved uHMT (iuHMT) model in the dual-tree wavelets domain outperforms uHMT model 0.97 dB.

**Key words**: Compressed Sensing (CS); Model-based CS; Dual-tree wavelet; uHMT model; Alternating convex projection

## 1 引言

图像压缩感知(CS)是近几年图像处理领域的重大突破，它是由 Donoho 和 Candes 等人[1,2]在稀疏表示和优化理论的基础上提出的一种成像理论。其本质是直接将采样与压缩相结合，在对图像进行随机投影得到少量观测值后，利用图像表示的稀疏性先验知识，从观测值中恢复原始图像的过程。图像稀疏性是指其小波域只有少数与图像边缘纹理相对应的系数不为零或具有较大值，而与图像光滑部分相对应的大多数系数为零或近似为零。CS 理论利用图像稀疏性先验知识，所需观测值远远小于 Nyquist 采样定理所要求的数目。目前的 CS 重构算法包括最优化算法和贪婪算法两大类。最优化算法将重构转化为特定优化问题，利用各类优化算法对其求解，常用算法有凸优化算法、非凸优化算法及光滑 $\ell_0$ 范数(SL0)算法等。凸优化算法用 $\ell_1$ 范数等价代替 $\ell_0$ 范数，将重构转化为带约束的凸优化问题，然后求其最优解。迭代硬阈值法(IHT)[3]，凸集交替投影法(POCS)[4]，迭代加权法[5]等都属于此类算法。非凸优化算法[6]将 $\ell_0$ 范数转化为 $\ell_p\,(p<1)$范数，将重构转化为非凸优化问题，然后求其最优解，而光滑 $\ell_0$ 范数法[7]则通过构建一个光滑函数来逼近 $\ell_0$ 范数，然

2009-09-01 收到，2010-05-13 改回
国家自然科学基金(60772079)和河北省自然科学基金(F2010001294)资助课题
通信作者：练秋生 lianqius@263.net

后对光滑函数进行优化实现重构。贪婪算法在每次迭代过程中选取一个或几个与观测值余量最大相关的基，寻找一组与观测值匹配的最稀疏基，从而实现信号的重构。匹配追踪(MP)、正交匹配追踪法(OMP)及它们的各种改进方法(如 CoSaMP[8]，ROMP[9])均为此类算法。与传统基于 Nyquist 采样的重构相比，CS 是一个重大突破。但标准 CS 重构只利用图像稀疏性先验知识，重构自由度大。实际上，图像的小波系数除具有稀疏性外，还具有一些结构上的分布特征，如与边缘纹理相对应的大系数往往呈树状分布，小波系数幅值在尺度间呈指数衰减等，将这些先验知识引入的 CS 重构中可改善重构效果，减少重构所需的采样值数目。Baraniuk 在文献[10]中提出了基于模型的 CS 重构理论，证明了将描述信号小波系数分布的结构模型引入到 CS 重构理论的正确性及有效性，为基于模型的 CS 图像重构提供了理论依据。文献[11]提出了 TMP(Tree-based Matching Pursuit) 和 TOMP(Tree-based Orthogonal Matching Pursuit)算法，将信号小波系数呈树状分布结构用于 MP 或 OMP 算法中。这两种算法先利用 MP 或 OMP 算法寻找位于小波树顶端的大系数，然后沿着有大系数的子树向下搜索它的子系数，而对于没有大系数的子树不再进行搜索，与 MP 或 OMP 相比，此方法极大地缩小了搜索空间，减少了计算量，实现信号的快速重构。文献[12]提出了 BOMP 算法(Block-based Orthogonal Matching Pursuit)，将信号小波系数的块分布模型引入到 OMP 算法中。TMP,TOMP 和 BOMP 算法相比与标准的 CS 重构有了较大改进，但上述算法引入的模型较为简单，不能精确刻画信号小波系数的结构分布特征，且上述算法对于一维信号的重构效果较好，但对于图像重构，算法计算开销大，重构效果不理想。图像小波域的隐马尔可夫模型(HMT)能较为精确地描述图像小波系数的分布特征，它已广泛应用于图像去噪[13]和图像复原[14]中。文献[15]将该模型引入到一维信号的 CS 重构中，采用重置权重的 $\ell_1$ 范数最优化算法，直接将 HMT 模型参数引入的重置权重的修正中。但文献[15]未对算法的合理性做相应的理论推导，缺少理论依据。本文将 HMT 模型引入到图像的 CS 的重构中，从最大后验概率(MAP)出发，经过理论推导，将基于 HMT 的图像重构转化为与标准图像 CS 重构形式相似的优化问题，并提出采用基于贝叶斯优化的凸集交替投影法(Projections Onto Convex Sets，POCS)求解该优化问题。另外本文将具有更多方向选择性的双树小波域通用 HMT(universal HMT，uHMT)模型代替小波域 HMT 模型，省去了使用 HMT 模型的计算开销巨大的训练过程。为进一步提高图像重构质量，本文对 uHMT 模型进行修正，提出了改进的 uHMT 模型(improved uHMT, iuHMT)，它能更精确刻画小波系数的局部分布特性，实验结果表明了算法的有效性。

## 2 稀疏变换域的 uHMT 模型及其改进

### 2.1 小波域 HMT 模型

图像的小波系数分布具有以下特征：(1)小波系数的非高斯性分布：即只有极少数小波系数具有较为显著的较大值，而绝大多数小波系数的幅值较小，近似为零。(2)小波系数状态的尺度持续性：小波系数“大”或“小”的状态具有在尺度间传递的特性。图像小波域 HMT 模型[14]能有效描述小波系数的上述特性。图像小波系数呈树状图分布，其 HMT 模型为每个小波系数 $w_i$ 设置对应的隐状态变量 $S_i$。HMT 模型采用混合高斯模型来模拟小波系数分布的非高斯性：如果已知第 $i$ 个结点隐状态变量的概率分布，则小波系数 $w_i$ 的概率密度与其他小波系数及隐状态变量无关，即

$$f_{W_i}(w_i)=\sum_{m=1}^{M}p_{S_i}(m)f_{W_i|S_i}(w_i\mid S_i=m) \tag{1}$$

式中 $p_{S_i}(m)=p(S_i=m)$ 为隐状态变量概率分布，它们满足 $\sum_{m=1}^{M}p_{S_i}(m)=1$。$f_{W_i|S_i}(w_i\mid S_i=m)=g(w_i;\mu_{i,m},\sigma_{i,m}^2)$ 为高斯概率密度函数，$m$ 为小波系数隐状态变量的一个实现，隐状态变量在 $1,\cdots,M$ 中取值，本文中 $M=2$。$m=1$ 的高斯成分具有较小的方差，刻画与图像光滑部分对应的小波系数分布特征；$m=2$ 的高斯成分具有较大方差，刻画与图像边缘纹理对应的大系数的分布特征。

小波系数状态沿尺度的持续性可采用隐状态变量沿尺度的状态转移概率表征：任一结点小波系数的隐状态仅依赖于其父结点 $\rho(i)$ 的隐状态，这种依赖关系由条件概率 $\varepsilon_{i,\rho(i)}^{mr}=p_{S_i|S_{\rho(i)}}(m\mid S_{\rho(i)}=r)$ 来表征，它构成了此结点状态转移矩阵。上述参数 $p_{S_i}(m)$、$\varepsilon_{i,\rho(i)}^{mr}$、$\mu_{i,m}$、$\sigma_{i,m}^2$ 加上根结点处隐状态变量概率分布 $p_{S_1}(m)$ 构成了 HMT 模型参数，记为 $\boldsymbol{\theta}$。文献[16]假设同一级小波系数具有相同的模型参数，因此参数个数近似为 $4J$ ($J$ 为小波分解的级数)，它们可以通过 EM 算法训练得到。已知小波系数 $\boldsymbol{w}$ 和模型参数 $\boldsymbol{\theta}$，可通过 Upward-Downward 算法获得小波系数的后验概率 $p(S_i=m\mid\boldsymbol{w},\boldsymbol{\theta})$。在 HMT 模型下，由于小波变换的正交性，小波 3 个子带相互独立，小波系数的联合概率分布可表示为

$$f(\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{\theta}) = \prod_{1 \le i \le N} \sum_{m=1}^{2} p_{S_i}(m) f_{W_i|S_i}(w_i \mid S_i = m) \quad (2)$$

### 2.2 小波及双树小波域 uHMT 模型

上述 HMT 模型在使用中需经过大量的训练才能获得具体的参数值，计算量较大。文献[17]提出一种小波域通用 HMT(universal HMT，uHMT)模型，它根据图像小波系数的幅值沿尺度呈现指数衰减特性得到HMT模型的各级高斯成分方差有以下关系：$\sigma_{j;1}^2 = C_{\sigma_S} 2^{-j\alpha_S}$，$\sigma_{j;2}^2 = C_{\sigma_L} 2^{-j\alpha_L}$，式中 $j$ 表示小波变换级数，$j = 1,2,\cdots,J$。小波系数的“大”或“小”的状态持续性沿尺度呈指数增强的特性，其状态转移矩阵可表示如下：

$$\boldsymbol{A}_j = \begin{bmatrix} 1 - C_{SS} 2^{-\gamma_S j} & C_{SS} 2^{-\gamma_S j} \\ \dfrac{1}{2} - C_{LL} 2^{-\gamma_L j} & \dfrac{1}{2} + C_{LL} 2^{-\gamma_L j} \end{bmatrix}$$

根据上述特性将 HMT 模型参数由原来的 $4J$ 个减少为 9 个，即 $\boldsymbol{\theta} = \{\alpha_S, C_{\sigma_S}, \alpha_L, C_{\sigma_L}, \gamma_S, C_{SS}, \gamma_L, C_{LL}, p_{j_0}^L\}$。文献[17]提出的小波域 uHMT 模型参数为

$$\boldsymbol{\theta} = \{\alpha_S = 3.1, C_{\sigma_S} = 2^{11}, \alpha_L = 2.25, C_{\sigma_L} = 2^{11}, \gamma_S = 1, C_{SS} = 2^{2.3}, \gamma_L = 0.4, C_{LL} = 2^{0.5}, p_{j_0}^L = 1/2\}$$

该模型参数对于大多数自然图像都是适用的，因此用 uHMT 代替 HMT 能省去计算量较大的训练步骤，有效减少了计算开销。

普通的正交或双正交 2 维小波变换的方向选择性差(只有水平、垂直和对角线 3 个方向)，并且不具有平移不变性，它不能实现图像几何信息(如边缘和纹理)的最优表示。为提高图像压缩感知系统的性能，本文应用具有六方向选择性和平移不变性的双树小波[18]来实现图像稀疏表示。双树小波有实小波和复小波两种，为减少冗余度和计算量，本文应用冗余度为 2 的双树实小波。双树小波的 uHMT 模型参数与小波 uHMT 模型参数类似，经过对多幅图像的训练获得双树小波域 uHMT 模型参数为

$$\boldsymbol{\theta} = \{\alpha_S = 3.2, C_{\sigma_S} = 2^{10}, \alpha_L = 2.25, C_{\sigma_L} = 2^{13}, \gamma_S = 1, C_{SS} = 2^{2.3}, \gamma_L = 0.4, C_{LL} = 2^{0.5}, p_{j_0}^L = 1/2\}$$

### 2.3 改进的 uHMT(iuHMT)模型

上述 uHMT 模型将同级所有小波系数的 uHMT 模型的高斯成分简化为具有相同的方差。然而由于小波系数的分布具有局部性，不同子带不同位置的高斯成分方差并不相同，且成分方差与小波系数的局部能量相关。基于这一特性本文提出了局部自适应性的改进 uHMT 模型(iuHMT,improved uHMT)，将高斯成分的方差与小波系数的局部能量相关联。设 $\boldsymbol{w}$ 为图像小波系数或双树小波系数，图像的噪声为 $\sigma^2$，则某点处小波系数 $w_i$ 的局部能量表示为：$e_i = \dfrac{1}{M}\sum_{j \in N_i} w_j^2 - \sigma^2$，其中 $N_i$ 是以 $i$ 点为中心的邻域，$M$ 为邻域大小，本文取 $M = 3\times 3$。$w_i$ 两个高斯成分的方差可分别表示为：$\sigma_{i,1}^2 = k_S e_i$，$\sigma_{i,2}^2 = k_L e_i$，则 iuHMT 模型的参数可改为：$\boldsymbol{\theta} = \{k_S, k_L, \gamma_S, C_{SS}, \gamma_L, C_{LL}, p_{j_0}^L\}$。其中参数 $k_S$ 和 $k_L$ 分别表示两个高斯成份的方差与该点小波系数局部能量的比例关系。通过对多幅图像的统计结果，$k_L$ 为 0.1，$k_S$ 分别为 0.2 和 0.25 时小波与双树小波域的 iuHMT 性能最好。本文中小波域的 iuHMT 模型的参数取值为

$$\boldsymbol{\theta} = \{k_S = 0.2, k_L = 0.1, \gamma_S = 1, C_{SS} = 2^{2.3}, \gamma_L = 0.4, C_{LL} = 2^{0.5}, p_{j_0}^L = 1/2\}$$

双树小波域的 iuHMT 模型的参数取值为

$$\boldsymbol{\theta} = \{k_S = 0.25, k_L = 0.1, \gamma_S = 1, C_{SS} = 2^{2.3}, \gamma_L = 0.4, C_{LL} = 2^{0.5}, p_{j_0}^L = 1/2\}$$

iuHMT 的模型参数比 uHMT 少两个，并且由于高斯成分的方差具有局部性和自适应性，它能更精确描述小波或双树小波系数的分布特征。

## 3 基于双树小波 uHMT 模型的压缩感知图像重构

### 3.1 图像压缩感知

设信号 $\boldsymbol{x}$ 的稀疏变换为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{\Psi}$ 为信号的稀疏基，$\boldsymbol{w}$ 为信号的稀疏系数。采用投影矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 对信号进行投影，得到信号的观测值 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}$。理论证明只要 $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}$ 满足限制等容性[1,2](Restricted Isometry Property, RIP)，利用观测值 $\boldsymbol{y}$，即可重构信号 $\boldsymbol{x}$。信号 $\boldsymbol{x}$ 的重构可表示为求解以下优化问题：

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \min_{\boldsymbol{w}} \|\boldsymbol{w}\|_0, \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\eta} \quad (3)$$

式中 $\boldsymbol{\eta}$ 为观测噪声。式(3)表示在满足观测值条件下，寻找 $\boldsymbol{x}$ 的非零变换系数最少的解，即 $\boldsymbol{x}$ 的最稀疏解。由于上述优化问题是一个典型的 NP-hard 问题，通常采用 $\ell_1$ 范数等价代替 $\ell_0$ 范数[1,2]，即优化问题式(3)等价为

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \min_{\boldsymbol{w}} \|\boldsymbol{w}\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{\eta} \quad (4)$$

求解上式的典型算法包括迭代硬阈值法(IHT)和迭代软阈值法(IST)。

### 3.2 重构模型的推导

引入 HMT 模型后，根据最大后验概率(MAP)准则，压缩感知图像重构可表示为

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \arg\max\{f(\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{y})\} \quad (5)$$

式中 $f(\boldsymbol{w}\mid\boldsymbol{y})$ 为小波系数的条件概率密度，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi\Psi w}+\boldsymbol{\eta}$ 为图像 $\boldsymbol{x}$ 的观测值，$\boldsymbol{\eta}$ 为高斯白噪声：$\boldsymbol{\eta}\sim N(\mu,\sigma^2)$。根据贝叶斯公式式(5)等价为

$$\widehat{\boldsymbol{w}}=\arg\max\left\{f(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{w})f(\boldsymbol{w})/f(\boldsymbol{y})\right\} \tag{6}$$

式中 $f(\boldsymbol{w})$ 和 $f(\boldsymbol{y})$ 分别为 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的概率密度函数，$f(\boldsymbol{y})$ 为常数，$f(\boldsymbol{w})$ 即为式(2)表示的 HMT 模型的联合概率密度函数。由于 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}$ 为高斯分布，因此有

$$f(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{w})=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^N}\exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}\|_2^2}{2\sigma^2}\right) \tag{7}$$

对式(6)右端取自然对数得

$$\widehat{\boldsymbol{w}}=\arg\max\{\ln f(\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{w})+\ln f(\boldsymbol{w})-\ln f(\boldsymbol{y})\} \tag{8}$$

将式(2)，式(7)代入式(8)并去掉常数项得

$$\widehat{\boldsymbol{w}}=\arg\max\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}\|_2^2 +\sum_{i=1}^{N}\ln\sum_{m=1}^{2}p_{S_i}(m)f_{W_i|S_i}(w_i\mid S_i=m)\right\} \tag{9}$$

将式(9)的右边乘 $-1$ 有

$$\widehat{\boldsymbol{w}}=\arg\min\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}\|_2^2 -\sum_{i=1}^{N}\ln\sum_{m=1}^{2}p_{S_i}(m)f_{W_i|S_i}(w_i\mid S_i=m)\right\} \tag{10}$$

式中第 2 项 $-\ln\sum_{m=1}^{2}p_{S_i}(m)f_{W_i|S_i}(w_i\mid S_i=m)$ 可近似为[14] $\dfrac{w_i^2}{2(p_{S_i}(1)\sigma_{i,1}^2+p_{S_i}(2)\sigma_{i,2}^2)}$，将其代入式(10)得

$$\widehat{\boldsymbol{w}}=\arg\min\sum_{i=1}^{N}\frac{w_i^2}{2(p_{S_i}(1)\sigma_{i,1}^2+p_{S_i}(2)\sigma_{i,2}^2)}+\alpha\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}\|_2^2 \tag{11}$$

式中 $\alpha=\dfrac{1}{2\sigma^2}$。令 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\left\{\dfrac{1}{2(p_{S_i}(1)\sigma_{i,1}^2+p_{S_i}(2)\sigma_{i,2}^2)}\right\}$，式(11)可表示成向量形式为

$$\widehat{\boldsymbol{w}}=\arg\min\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pw}+\alpha\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}\|_2^2 \tag{12}$$

根据拉格朗日乘子法，式(12)可以写成下列形式：

$$\widehat{\boldsymbol{w}}=\arg\min\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pw},\quad \text{s.t.}\quad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}\|_2^2\le\xi \tag{13}$$

式(13)与式(4)类似，均为在满足观测值条件下寻找满足要求的最优解，关键区别为式(4)是只利用了信号的稀疏性先验知识，而式(13)则包含了 HMT 模型蕴含的稀疏性和树结构分布先验知识。

### 3.3 重构算法的实现

式(13)为凸优化问题，本文采用基于贝叶斯优化的凸集交替投影(POCS)算法求解，优化问题涉及以下两个凸集：

$$C_1=\left\{\boldsymbol{w}\mid\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}\|_2^2\le\xi\right\},\quad C_2=\left\{\boldsymbol{w}\mid\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pw}\le R\right\}$$

POCS 算法交替向两个凸集 $C_1$ 和 $C_2$ 进行投影，$C_1$ 和 $C_2$ 的交点即为式(13)的最优解：

$$\{\widehat{\boldsymbol{w}}\}=C_1\cap C_2$$

POCS 算法迭代步骤如下：

(1)将第 $t$ 次迭代的结果 $\boldsymbol{w}^t$ 向 $C_1$ 投影：

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{w}^t+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\Phi\Psi w}^t) \tag{14}$$

(2)利用梯度下降法将 $\boldsymbol{\beta}$ 向 $C_2$ 投影：

$$\boldsymbol{w}^{t+1}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\lambda}\frac{\partial((\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\lambda P\beta} \tag{15}$$

梯度下降法需在每次迭代中在下降方向上寻找最优步长，即进行一次线性优化搜索，计算开销较大。本文采用贝叶斯优化[17]代替梯度下降法。令 $\boldsymbol{\lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_i)$，其中 $\lambda_i$ 为

$$\lambda_i=\sigma^2\frac{(p_{S_i}(2)\sigma_{i,1}^2+p_{S_i}(1)\sigma_{i,2}^2+\sigma^2)}{(\sigma_{i,1}^2+\sigma^2)(\sigma_{i,2}^2+\sigma^2)}\cdot(p_{S_i}(1)\sigma_{i,1}^2+p_{S_i}(2)\sigma_{i,2}^2)$$

根据式(15)得到 $\boldsymbol{w}^{t+1}$ 的第 $i$ 个分量为

$$w_i^{t+1}=\beta_i-\frac{\lambda_i}{p_{S_i}(1)\sigma_{i,1}^2+p_{S_i}(2)\sigma_{i,2}^2}\beta_i \tag{16}$$

将 $\lambda_i$ 的值代入并化简得

$$w_i^{t+1}=\sum_{m=1}^{2}p_{S_i}(m)\frac{\sigma_{i,m}^2}{\sigma_{i,m}^2+\sigma^2}\beta_i \tag{17}$$

式(17)即为文献[17]给出的 HMT 模型的贝叶斯优化结果。贝叶斯优化方法根据模型参数，对系数进行统计优化，避免了每次迭代过程对步长的优化搜索，减小了计算量。

基于双树小波 iuHMT 模型的压缩感知重构算法具体步骤包括：

(1)初始化：设置最小误差 $E_{\min}$ 和最大迭代次数 $t_{\max}$，$\boldsymbol{w}^1=\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$，$t=1$。

(2)利用式(14)将 $\boldsymbol{w}^t$ 投影到 $C_1$ 得到 $\boldsymbol{\beta}$。式中 $\boldsymbol{\Phi}$ 表示 PDCT(Permuted Discrete Cosine Transform)投影，$\boldsymbol{\Psi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$ 表示双树小波变换及其逆变换。

(3)利用稳健中值算子估计 $\boldsymbol{\beta}$ 所含噪声的方差 $\sigma^2$。

(4)利用双树小波域 iuHMT 模型参数及 Upward-Downward 算法估计 $\boldsymbol{\beta}$ 的隐状态变量后验概率 $p_{S_i}(m)$。

(5)将 $\boldsymbol{\beta}$ 投影到 $C_2$，即利用式(17)获得 $\boldsymbol{w}^{t+1}$。

(6) $\boldsymbol{x}^{t+1}=\boldsymbol{\Psi w}^{t+1}$，若 $\|\boldsymbol{x}^{t+1}-\boldsymbol{x}^t\|_2^2<E_{\min}$ 或 $t>t_{\max}$ 则转移到下一步，否则令 $t=t+1$ 转到(2)继续执行。

(7)输出重构图像 $\boldsymbol{x}^{t+1}$。

## 4　实验结果

为验证算法有效性，本文将基于 uHMT 模型和 iuHMT 模型的图像压缩感知重构与标准的图像压缩感知重构算法进行比较。本文实验选取 barbara, boat, couple, hill, lena, man, fingerprint 7 幅 512×512 的标准灰度图像进行重构。实验中分别用 DWTIHT, DWTuHMT, DWTiuHMT, TDWTIHT, DTDWTuHMT, DTDWTiuHMT 表示小波域的 IHT 重构、小波域 uHMT 模型重构、小波域 iuHMT 模型重构、双树小波域 IHT 重构、双树小波域 uHMT 模型重构及双树小波域 iuHMT 模型的重构。其中小波域的 uHMT 及 iuHMT 重构算法将上部分算法实现中步骤(2)的双树小波变换改为 Daubechies4 正交小波变换，步骤(4)中的参数相应改为小波域的模型参数值。

表 1 为 DWTuHMT、DWTiuHMT 和 DWTIHT 算法在不同采样率下重构的峰值信噪比(PSNR)比较。表中平均值一栏为各算法在各个采样率下 7 幅图像重构 PSNR 的平均值，黑体数字表示较高的 PSNR。由表 1 可以看出在采样率为 20%，30%和 40%时 DWTuHMT 算法重构的 PSNR 平均值要比 DWTIHT 算法的 PSNR 平均值分别高出 1.39 dB, 2.12 dB 和 2.50 dB，DWTuHMT 算法重构效果明显优越于 DWTIHT 算法；在采样率 10%，DWTuHMT 相比 DWTIHT 高出 0.25 dB。在 4 种采样率下，DWTiuHMT 重构的 PSNR 平均值较 DWTIHT 分别高 5.31 dB，5.34 dB，5.24 dB，4.93 dB，较 DWTuHMT 分别高 5.06 dB，3.95 dB，3.12 dB，2.43 dB，充分体现了基于 iuHMT 模型重构的优越性。表 2 为 DTDWTuHMT, DTDWTiuHMT 和 DTDWTIHT 算法对 7 幅图像重构 PSNR 平均值的比较。从表 2 可以看出在采样率为 20%、30%、40%时，DTDWTuHMT 算法重构 PSNR 平均值比 DTDWTIHT 算法分别高出 1.03 dB，1.51 dB，1.74 dB。在 4 种采样率下，DTDWTiuHMT 重构的 PSNR 平均值比 DTDWTIHT 分别高出了 1.30 dB，2.46 dB，2.39 dB，2.20 dB 之多，较 DTDWTuHMT 也分别高出了 1.13 dB，1.43 dB，0.88 dB，0.46 dB。基于 DTDWTiuHMT 模型的重构图像 PSNR 的平均值比 DTDWTuHMT 模型高 0.97 dB，同样体现了基于 iuHMT 模型重构算法的优越性。将表 1 中 DWTuHMT、DWTiuHMT 算法对各图像的重构 PSNR 与表 2 中 DTDWTuHMT, DTDWTiuHMT 算法对各图像的重构 PSNR 进行比较可以看出，DTDWTuHMT 在 4 种采样率下重构 PSNR 平均值比 DWTuHMT 分别高出 4.82 dB，4.17 dB，3.32 dB，2.47 dB；DTDWTiuHMT 的重构 PSNR 平均值比 DWTiuHMT 分别高出了 0.89 dB，1.65 dB，1.06 dB，1.50 dB，充分表明双树小波比普通小波更适合于压缩感知。

**表 1　小波域 uHMT、iuHMT 重构与 IHT 重构 PSNR 的比较**

| | 采样率(%) | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 平均值 | DWTIHT | 20.37 | 23.39 | 25.60 | 27.58 |
| | DWTuHMT | 20.62 | 24.78 | 27.72 | 30.08 |
| | DWTiuHMT | **25.68** | **28.73** | **30.84** | **32.51** |

**表 2 双树小波域的 iuHMT、uHMT 重构与 IHT 重构 PSNR 的比较**

| | 采样率(%) | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|
| 平均值 | DTDWTIHT | 25.27 | 27.92 | 29.53 | 30.81 |
| | DTDWTuHMT | 25.44 | 28.95 | 31.04 | 32.55 |
| | DTDWTiuHMT | **26.57** | **30.38** | **31.92** | **33.01** |

图 1 为采样率为 20%时各种算法对 barbara 重构结果的局部图像。图 1(a)为小波域 IHT 算法重构的图像，该图像纹理信息丢失严重，且含有大量噪声；图 1(b)为小波域的 uHMT 模型重构图像，与图 1(a)相比，该图像恢复了更多的纹理信息，重构效果有明显改善；图 1(c)为小波域的 iuHMT 模型重构图像，与图 1(a)，1(b)相比，纹理信息进一步增多，且所含噪声进一步降低；图 1(d)为双树小波域的 IHT 重构图图像，它恢复了较多的纹理信息，但图像过度平滑，造成模糊失真；图 1 (e)为双树小波域 uHMT 算法的重构图像，包含了更丰富的纹理信息，图像更清晰，有效改善了图 1(d)的模糊失真；图 1(f)为双树小波域 iuHMT 算法的重构效果图，与其余 5 幅图像相比，它的纹理和边缘信息最清晰，视觉效果最好。

## 5　结论

标准的压缩感知重构只是利用了小波系数稀疏性的先验知识，而未利用小波系数分布结构特征的先验知识。本文提出一种基于双树小波域改进 uHMT 模型的图像压缩感知重构算法，将有效描述图像小波系数分布的 HMT 模型引入的图像的压缩感知重构。从最大后验概率出发，经过理论推导，将基于 HMT 的重构转化为型如标准压缩感知重构的优化问题，并提出采用基于贝叶斯优化的 POCS 算法对优化问题求解。本文还提出了基于双树小波


图 1 采样率为 20%时 barbara 重构效果比较

域的 uHMT 模型，与小波相比，双树小波能更加有效地描述图像的几何信息，且采用 uHMT 模型省去了 HMT 模型所需的计算量巨大的训练过程，提高了重构质量和重构速度。另外本文对 uHMT 进行了改进，提出参数个数更少，更能精确描述双树小波变换系数分布特征的 iuHMT 模型，进一步提高了图像重构质量。

## 参 考 文 献


[1] Donoho D L. Compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306.

[2] Candes E J nd Romberg J T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509.

[3] Blumensath T and Davies M E. Iterative thresholding for sparse approximations[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5): 629–654.

[4] Bregman L M. The method of successive projection for finding a common point of convex sets [J]. *Soviet Math*, 1965, 6(3): 688–692.

[5] Chartrand R and Yin Wotao. Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Las Vegas, NV, USA, 2008: 3869–3872.

[6] Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(10): 707–710.

[7] Mohimani G H, Babaie-Zadeh M, and Jutten C. A fast sparse approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed $\ell_0$ norm [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1): 289–301.

[8] Needell D and Tropp J A. CoSaMP: Iiterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 26(3): 301–321.

[9] Needell D and Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(3): 317–334.

[10] Baraniuk R G, Cevher Volkan, and Marco T D, *et al*.. Model-Based compressive sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(4): 1982–2001.

[11] Duarte M F. Fast reconstruction from random incoherent projections[R]. Rice ECE Department Technical Report Tree, 2005.

[12] Yonina C E and Helmut B. Block-sparsity:coherence and efficient recovery[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Taipei, Taiwan, 2009: 2885–2888.

[13] Kivinen J J, Sudderth E B, and Jordan M I. Image denoising with nonparametric Hidden Markov trees[C]. IEEE International Conference on Image Processing, San Antonio, Texas, 2007, 3: 121–124.

[14] 赵书斌，彭思龙. 基于小波域 HMT 模型的图像超分辨率重构[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2003, 15(11): 1347–1352. Zhao Shu-bin and Peng Si-long. Wavelet-domain HMT-based image superresolution[J]. *Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics*, 2003, 15(11): 1347–1352.

[15] Marco F D, Wakin M B, and Baraniuk R G. Wavelet-domain compressive signal reconstruction using a hidden markov tree model[C]. IEEE International Conference on Acoutics, Speech and Signal Processing, Las Vegas, NV, USA, 2008: 5137–5140.

[16] Crouse Matthew S, Nowak R D, and Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using Hidden Markov Models[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 3(6): 1029–1035.

[17] Romberg J K, Hyeokho C, and Baraniuk R G. Bayesian tree-structured image modeling using wavelet-domain hidden markov models [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(7): 1056–1068.

[18] Selesnick I W and Baraniuk R G. The dual-tree complex wavelet transform[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2005, 22(6): 123–151.


练秋生： 男，1969 年生，博士，教授，研究方向为压缩感知、多尺度几何分析、图像处理.

王 艳： 女，1983 年生，硕士生，研究方向为压缩感知.