

一种基于二维拉格朗日连续水平集图像分割方法

刘建磊^{①②} 冯大政^②

^①(西安电子科技大学计算机学院 西安 710071)

^②(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室 西安 710071)

摘要: 在图像分割领域中, 基于离散水平集的图像分割方法不但对低信噪比图像难以实现正确地分割, 而且分割速度较慢。针对这一问题, 该文提出了一个基于连续水平集的图像分割方法。利用2维拉格朗日基函数的线性组合把水平集函数表示成连续函数。最小化实现图像分割的能量函数, 建立基函数系数演化的微分方程。因此能量函数的最小值可直接根据拉格朗日的系数值获得。利用简单有限差分法对系数演化微分方程求解, 实现了低信噪比图像的快速分割。实验结果表明该方法具有理想的分割结果。

关键词: 图像分割; 活动轮廓模型; 水平集; 2维拉格朗日基函数

中图分类号: TP751.1

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)07-1712-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.01111

An Image Segmentation Approach Based on Two-Dimension Lagrange Continuous Level Set

Liu Jian-lei^{①②} Feng Da-zheng^②

^①(College of Computer, Xidian University, Xi'an 710071, China)

^②(National Key Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: In the field of image segmentation, the image segmentation approach based on discrete level set can not accurately segment an image with low SNR value, and the speed of image segmentation is lower. In order to solve these problems, an alternative approach is proposed based on continuous level-set. The level-set function is modeled as a continuous parametric function using the line combination of two-dimension Lagrange basis. The difference equation is derived by minimizing the energy formulation for image segmentation. As a consequence, the minimization of the energy formulation is directly obtained in term of the Lagrange coefficient. The fast segmentation of image with low SNR value is implemented by the numerical solution of the coefficient difference equation that is solved by simple finite-difference methods. Experimental results demonstrate that the proposed approach can gain better perfect effect.

Key words: Image segmentation; Active contours model; Level sets; Two-dimension Lagrange basis function

1 引言

借鉴一些流体中的重要思想, 1988年Osher等人首次提出了水平集方法^[1], 该方法提出以后就得到了广泛的应用^[2-4]。近年来, 这种方法已被应用在图像分割领域。例如, 曹宗杰^[5]等人将基于统计模型的水平集方法应用到了SAR图像的分割中。梅雪等^[6]将变分水平集方法应用到了红外图像的分割中。王斌等^[7]提出了用于医学图像分割的水平集接力方法。Chan等^[8]提出了一种基于水平集方法的两相位图像分割模型。在上述水平集方法的应用中, 水平集函数都以离散形式表示, 然而基于离散水平集的图像

分割方法有如下的主要缺点: (1)为了保证离散水平集函数稳定地演化, 需要周期性地重新初始化水平集函数为符号距离函数。反复初始化不但降低了分割速度, 而且也降低了活动曲线拓扑结构变化的灵活性^[9]。(2)由于水平集函数以离散形式表示, 为了保证偏微分方程数值解的精确性, 时间步长不能取的太大, 这又进一步降低了分割速度。(3)对噪声的抑制能力有限^[10]。因此, Olivier等^[11]提出了一种利用2维3阶B样条基函数把水平集函数表示成连续形式的图像分割方法。该方法虽然能有效地抑制噪声, 但其计算复杂度较高。

拉格朗日插值是一种多项式插值方法。它不但具有简单的基函数而且在整数结点的基函数的系数值可以由该点处的函数值直接获取。由于基函数比

2009-08-21 收到, 2010-02-04 改回

国家自然科学基金(60672128)资助课题

通信作者: 刘建磊 jianleiliu@mail.xidian.edu.cn

较简单,利用该基函数表示的连续水平集的函数值可以实现快速的更新,从而提高分割速度。另外,由于图像的像素点都在整数栅格点上,所以基函数的初始系数值就等于像素点的水平集函数值。基函数初始系数值的直接获取不仅进一步提高了分割速度,也保证的水平集函数更新的稳定性,从而提高了图像的分割精度。基于以上分析,本文提出了一个基于2维拉格朗日基函数的连续水平集的图像分割方法。利用2维拉格朗日基函数的线性组合把水平集函数表示成连续函数。本文方法通过限制拉格朗日基函数系数值的范围,避免了水平集函数的重新初始化过程,提高了活动曲线的演化速度。水平集函数以连续的形式表示,因此可采用简单的有限差分方法求取微分方程的数值解。这样时间步长可取较大的值,进一步提高了活动曲线的演化速度。在本文方法中拉格朗日基函数起到了一个滤波器的作用,因此可以通过改变拉格朗日基函数的空间尺度,有效地分割不同信噪比的图像。

2 水平集方法

水平集方法主要是从界面传播等研究领域逐步发展起来的,它是处理封闭运动界面随时间演化过程中几何拓扑变化的有效计算工具。水平集方法的基本思想为:以隐式的方法来描述演化曲线,即2维演化曲线 C 被隐含地表达为3维连续曲面 $\phi(x,y)$ 的一个具有相同函数值的同值曲线,通常是 $C = \{(x,y)|\phi(x,y) = 0\}$,称为零水平集,而 $\phi(x,y)$ 称为水平集函数。

水平集函数通常是由闭合活动曲线 C 生成的符号距离函数(Signed Distance Function, SDF)。设 $\phi(x,y), (x,y) \in R^2$ 是SDF,则有 $\phi(x,y) = \pm d$,其中 d 是点 (x,y) 到闭合活动曲线 C 的最短距离,等号右边的符号根据点 (x,y) 在 C 的内外部而定,一般在 C 内部的点取正号,外部的点取负号。

3 2维拉格朗日连续水平集的图像分割方法

3.1 能量函数

在基于水平集的图像分割方法中,闭合活动轮廓曲线 C 由水平集函数 $\phi(x,y)$ 中的零水平集隐含表示为 $C = \{(x,y)|\phi(x,y) = 0\}$,并且满足 $\phi(\text{inside}(C)) > 0, \phi(\text{outside}(C)) < 0$;其中 $\text{inside}(C)$ 表示活动曲线 C 的内部区域, $\text{outside}(C)$ 表示活动曲线 C 的外部区域。

为了简明地说明水平集方法在图像分割中的应用,本文考虑两相位图像的分割问题。这类问题的能量函数可以用水平集 $\phi(x,y)$ 表示为如下形式^[12]:

$$J(\phi(x,y)) = v_{\text{in}} \int_{\Omega} g_{\text{in}}((x,y), \phi(x,y)) H(\phi(x,y)) dx dy + v_{\text{out}} \int_{\Omega} g_{\text{out}}((x,y), \phi(x,y)) \cdot (1 - H(\phi(x,y))) dx dy + v_C \int_{\Omega} g_C((x,y), \phi(x,y)) \delta(\phi(x,y)) \cdot \|\nabla \phi(x,y)\| dx dy \quad (1)$$

其中 Ω 是图像的定义域,函数 $g_{\text{in}}(\cdot)$ 和 $g_{\text{out}}(\cdot)$ 分别描述了目标区域和背景区域的特征; $g_C(\cdot)$ 是反应活动曲线 C 特征的函数。 $v_{\text{in}}, v_{\text{out}}$ 和 v_C 都是大于零的参数。 $H(\cdot)$ 和 $\delta(\cdot)$ 分别表示Heaviside函数和Dirac函数。当式(1)所示的能量函数达到最小值时,水平集函数中的零水平集会演化到目标的边缘处,从而完成图像的分割。

3.2 水平集函数的连续表示

在传统的基于水平集的图像分割方法中,水平集函数是以离散形式表示的。本文用2维拉格朗日基函数的线性组合把水平集函数表示为如下的连续形式:

$$\phi(x,y) = \sum_{(i,j) \in \Omega} c_{i,j} L_{i,j}^2(x-i, y-j) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$L_{i,j}^2(x-i, y-j) = \begin{cases} \frac{\prod_{\substack{m=-h \\ m \neq 0}}^{m=h} (x-i-m)(y-j-m)}{(h!)^4}, & |x-i| \leq h, |y-j| \leq h \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $L_{i,j}^2(x-i, y-j)$ 是2维拉格朗日基函数,其结点位于图像定义域 Ω 的整数栅格点上, h 是正整数表示基函数的空间尺度, $c_{i,j}$ 是2维拉格朗日基函数的系数。

3.3 能量函数的最小化

由于水平集函数可以用式(2)表示成连续形式,因此最小化能量函数式(1)可以通过改变2维拉格朗日基函数的系数值 $c_{i,j}$ 来实现。为了最小化能量函数,首先应求解能量函数式(1)关于 $c_{i,j}$ 的导数,其求解过程如下:分别把式(1)右边的3项简化表示为如下形式:

$$\left. \begin{array}{l} J_{\text{in}} = \int_{\Omega} g_{\text{in}} H dx dy \\ J_{\text{out}} = \int_{\Omega} g_{\text{out}} (1-H) dx dy \\ J_c = \int_{\Omega} g_C \delta \|\nabla \phi\| dx dy \end{array} \right\} \quad (3)$$

求式(3)关于 $c_{i,j}$ 的导数可得到如下结果。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_{\text{in}}}{dc_{i,j}} &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial g_{\text{in}}}{\partial \phi} H + g_{\text{in}} \frac{\partial H}{\partial \phi} \right] \cdot \frac{d\phi}{dc_{i,j}} dx dy \\ \frac{dJ_{\text{out}}}{dc_{i,j}} &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial g_{\text{out}}}{\partial \phi} (1-H) - g_{\text{out}} \frac{\partial H}{\partial \phi} \right] \cdot \frac{d\phi}{dc_{i,j}} dx dy \\ \frac{dJ_C}{dc_{i,j}} &= \int_{\Omega} \left[\frac{dg_C}{d\phi} \delta |\nabla \phi| + \frac{d\delta}{d\phi} g_C |\nabla \phi| + g_C \delta \frac{d|\nabla \phi|}{d\phi} \right] \cdot \frac{d\phi}{dc_{i,j}} dx dy \end{aligned} \right\} (4)$$

利用式(2), 式(4)可得出能量函数式(1)关于 $c_{i,j}$ 的导数:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ}{dc_{i,j}} &= \int_{\Omega} w(x,y) L_{i,j}^2(x-i, y-j) dx dy \\ w(x,y) &= \left(v_{\text{in}} g_{\text{in}}(x,y) - v_{\text{out}} g_{\text{out}}(x,y) \right. \\ &\quad \left. - v_C \operatorname{div} \left(g_C(x,y) \frac{\nabla \phi(x,y)}{\|\nabla \phi(x,y)\|} \right) \right) \delta(\phi(x,y)) \end{aligned} \right\} (5)$$

其中 $w(x,y)$ 反映了被分割目标的特征, 本文称之为特征函数。

利用式(5)求解能量函数式(1)关于每个 2 维拉格朗日基函数系数的导数。然后利用梯度下降流法得到能量函数式(1)关于 $c_{i,j}$ 的微分方程为

$$\frac{dc_{i,j}}{dt} = -\nabla c J \quad (6)$$

其中 t 是时间参数, $\nabla c J$ 是能量函数式(1)关于 2 维拉格朗日基函数系数 $c_{i,j}$ 的能量梯度为

$$\nabla c J = \frac{dJ}{dc_{i,j}} = \int_{\Omega} w(x,y) L_{i,j}^2(x-i, y-j) dx dy \quad (7)$$

从式(7)中可知能量梯度可以看作特征函数 $w(x,y)$ 与 2 维拉格朗日基函数的卷积。这样就可以通过调整 2 维拉格朗日基函数的空间尺度 h 来平滑图像中的噪声。空间尺度越大, 平滑噪声的能力越强, 但计算复杂度会随着空间尺度的增加而提高。因此空间尺度的选取应根据具体的图像而定。对于信噪比较低的图像, 应取较大的空间尺度 ($h=3$); 相反, 对于没有噪声或高信噪比的图像, $h=1$ 即可。

由于图像在计算机中是以离散形式表示的, 因此在实际计算能量梯度式(7)的值时需要把其离散化, 也就是分别离散化特征函数 $w(x,y)$ 和 2 维拉格朗日基函数 $L_{i,j}^2(x-i, y-j)$ 。本文采用如下表达式求解式(7)的离散形式:

$$\nabla c J = \frac{dJ}{dc_{i,j}} = \begin{cases} \sum_{(x,y) \in \Omega} w_{\varepsilon}(x,y) l_{i,j}^2(x-i, y-j), & |x-i| \leq h, |y-j| \leq h \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

其中 Ω 是给定图像的定义域; h 是拉格朗日基函数的空间尺度; $w_{\varepsilon}(x,y)$ 是用 $H_{\varepsilon}(\cdot)$ 和 $\delta_{\varepsilon}(\cdot)$ 分别代替能量函数式(1)中的 Heaviside 函数 $H(\cdot)$ 和 Dirac 函数 $\delta(\cdot)$ 后得到的特征函数 (H_{ε} 和 δ_{ε} 是正则化的 Heaviside 函数和 Dirac 函数)。 $L_{i,j}^2(x-i, y-j)$ 是拉格朗日基函数 $L_{i,j}^2(x-i, y-j)$ 在整数结点离散采样后的结果。

由于水平集函数被表示成了连续函数, 特征函数 $w(x,y)$ 中所包含的几何特征项(如曲率, 法线)很容易求出其解析解^[11,13], 因此对该函数在整数栅格点进行采样就可得到其离散值。根据式(8)求出能量函数式(1)关于 2 维拉格朗日基函数系数 $c_{i,j}$ 的能量梯度的离散值后, 就可以使用式(9)所示的简单有限差分法求解式(6)所示的微分方程。

$$c_{i,j}^{(p+1)} = c_{i,j}^{(p)} - \nabla t \cdot \nabla c J \quad (9)$$

其中 p 表示迭代次数, ∇t 是迭代步长或者称为时间步长。

3.4 连续水平集函数值的约束

通过约束水平集函数值的范围, 可以避免水平集函数的重新初始化过程^[11,13]。由于水平集函数被 2 维拉格朗日基函数的线性组合表示成连续函数, 因此 2 维拉格朗日基函数的系数值 $c_{i,j}$ 的范围决定了水平集函数值的范围。所以约束水平集函数值的范围可以很容易通过约束基函数的系数值 $c_{i,j}$ 来实现。这种方法不但计算量小而且不会降低水平集函数拓扑结构变化的灵活性。

根据水平集函数的特点可知, 水平集函数 $\phi(x,y)$ 乘以一个非零的系数 σ 并不改变它的特性^[13]。由式(2)可知, $\phi(x,y)$ 乘以 σ 与 $c_{i,j}$ 乘以 σ 相等。因此可以把由式(9)得到 $c_{i,j}$ 的值, 利用 $c_{i,j}^{(p+1)} = \frac{c_{i,j}^{(p+1)}}{\left| c_{i,j}^{(p+1)} \right|_{\max}}$ 把

水平集函数的值约束在 $[-(2h+1)^2, (2h+1)^2]$ 的范围内, 其中 h 是 2 维拉格朗日基函数的空间尺度, $\left| c_{i,j}^{(p+1)} \right|_{\max}$ 是在 $i+1$ 次迭代后, 所有系数取绝对值后的最大值。

3.5 算法的计算量分析

算法运行所需的乘除数是衡量其计算量的常用标准。因为 2 维拉格朗日基函数的初始系数值可由水平集函数值直接获取, 所以本文算法的计算代价主要体现在根据式(8)和式(9)更新基函数的系数值方面。更新每一个基函数的系数需要运算 $((2h+1)^2+1)$ 次乘法, 基函数的个数等于图像所含有像素的个数。因此, 更新所有基函数的系数值需要运算 $((2h+1)^2+1)(M \times N)$ 次乘法, 其中 h 是基函数的空间尺度, $M \times N$ 表示图像所含像素个数。所以本文算法的时间复杂度为 $((2h+1)^2+1)(M \times N)$ 。

4 试验与讨论

4.1 分割函数

本文方法的仿真实验所选择的能量函数是 C-V 模型^[8]的能量函数，因为 C-V 模型是典型的两相位图像的分割模型。C-V 模型的能量定义为如下形式：

$$\begin{aligned}
 J(\phi(x, y), c_1, c_2) = & \int_{\Omega} (u(x, y) - c_1)^2 H_{\varepsilon}(\phi(x, y)) dx dy \\
 & + \int_{\Omega} (u(x, y) - c_2)^2 \\
 & \cdot (1 - H_{\varepsilon}(\phi(x, y))) dx dy \\
 & + v \int_{\Omega} \|\nabla \phi(x, y)\| \delta_{\varepsilon}(\phi(x, y)) dx dy \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中 c_1, c_2 是能量函数的两个参数， v 是大于零的参数用来均衡区域项和轮廓项对能量函数值的影响。

$u(x, y)$ 是给定的图像； H_{ε} 和 δ_{ε} 是正则化的 Heaviside 函数和 Dirac 函数： $H_{\varepsilon}(x) = 1/2 + (1/\pi) \arctan(x/\varepsilon)$ ， $\delta_{\varepsilon}(x) = (d/dx)H_{\varepsilon}(x)$ ，根据式(5)可得到式(10)的特

征函数： $w_{\varepsilon}(x, y) = \begin{cases} (u(x, y) - c_1) - (u(x, y) - c_2) - v \cdot \end{cases}$

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{\nabla \phi(x, y)}{\|\nabla \phi(x, y)\|} \right\} \delta_{\varepsilon}(\phi(x, y))。$$

4.2 仿真实验参数选取

(1) 实验中所有图像的大小都是 128×128 (像素)，灰度级都是 256。迭代步长 $t = 5$ 。

(2) 正则化后的 Dirac 函数是非紧支函数，为了简化计算，参数 ε 的值取为 1。

(3) 根据闭合活动曲线 C 生成符号距离函数时，位于 C 内部的像素点取正号，外部的取负号。

4.3 分割结果

图 1 显示了本文方法和基于 C-V 模型的离散水平集方法对不同信噪比图像的分割结果对比。第 1 行从左到右分别是信噪比等于 20 dB、15 dB 和 10 dB 的原始图像。第 2 行是基于 C-V 模型的离散水平集方法的分割结果 ($v = 5 \cdot 255^2$ ，迭代 500 次，耗时 9.54 s)。第 3 行是本文方法使用 $h = 1, v = 0$ 的分割结果 (迭代 3 次，耗时 1.98 s)。第 4 行是本文方法使用 $h = 2, v = 0$ 的分割结果 (迭代 3 次，耗时 4.59 s)。第 5 行是本文方法使用 $h = 3, v = 0$ 的分割结果 (迭代 3 次，耗时 9.02s)。从分割结果可以看出：(1) 离散水平集方法仅依赖 C-V 模型中曲率项平滑图像中的噪声，对高信噪比图像能得到满意的分割结果，但对低信噪比图像的分割结果很不理想。(2) 本文方法不但能有效地分割高信噪比图像而且对低信噪比图像也能得到满意的分割结果，并且基函数的空间尺度 h 越大对噪声的抑制能力越强。(3) 本文方法的分割速度远快于基于 C-V 模型的离散水

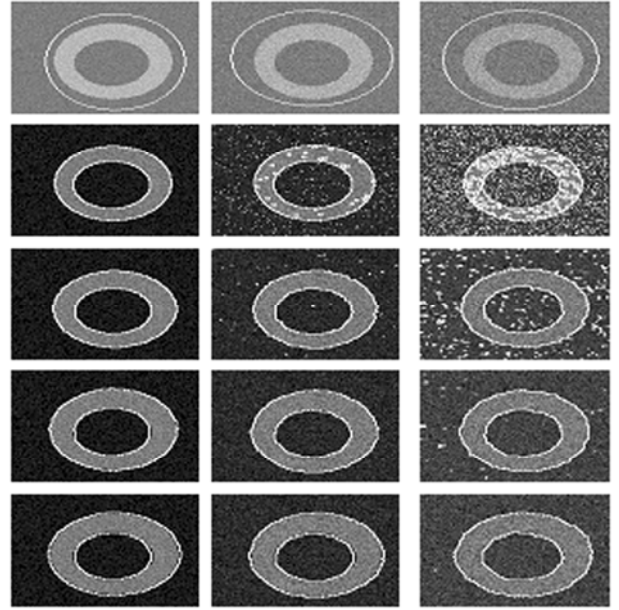


图 1 不同信噪比图像的分割结果

平集方法的分割速度。

图 2 给出了本文方法对一幅 SAR 图像的分割结果和其对应的水平集函数图像 ($h = 2, v = 0$)。为了增加目标与活动曲线的对比度，本文使用了与目标灰度值差别较大的活动曲线。图 2(a) 是原始图像，图 2(d) 是其对应的水平集函数图像；图 2(b) 是迭代 3 次的分割结果，图 2(e) 是其对应的水平集函数图像；图 2(c) 和图 2(f) 分割是最终的分割结果和其对应的水平集函数图像。从分割结果可以看出，利用本文方法不但分割出了大目标，而且小目标也得到了有效地分割。这是因为本文方法没有周期性地重新初始化水平集函数为符号距离函数，从而保证了活动曲线发生拓扑结构变化的灵活性。另外，基函数的空间尺度 ($h = 2$) 对图像中的噪声起到了较好的抑制作用。

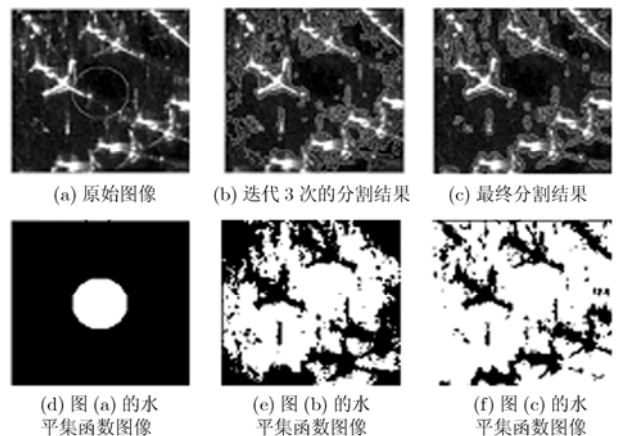


图 2 本文方法对 SAR 图像的分割结果

为了进一步说明本文方法的有效性,图 3 给出了本文方法和文献[11]提出的方法对一幅复杂自然图像分割结果的对比。图 3(a)原始图像;图 3(b)是本文方法的分割结果($h = 1$, $v = 2 \cdot 255^2$, 迭代 5 次,耗时 3.31 s);图 3(c)是文献[11]提出方法的分割结果($h = 1$, $v = 2 \cdot 255^2$, 迭代 5 次,耗时 8.84 s)。从分割结果可以看出,两种方法的分割性能差别不大,但本文方法的分割速度要快于文献[11]提出方法的分割速度。这是因为 2 维 3 阶 B 样条基函数比 2 维拉格朗日基函数具有更复杂的表达式。因此在计算特征函数与基函数卷积的过程中 2 维 3 阶 B 样条基函数需要更长的计算时间。

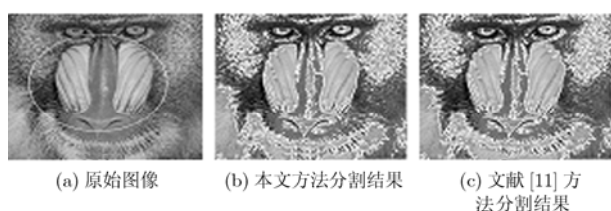


图 3 复杂自然图像分割结果

5 结论

本文提出了一种基于 2 维拉格朗日基函数连续水平集的图像分割方法。利用拉格朗日基函数的线性组合把水平集函数表示成连续函数。通过改变基函数的系数值驱使水平集函数的零水平集向目标边界演化,以完成图像分割。从实验结果可以看出,本文方法的分割速度不但远优于基于离散水平集的图像分割方法,而且对低信噪比的图像也能得到满意的分割结果。另外,虽然本文方法与基于 2 维 3 阶 B 样条连续水平集的图像分割方法的分割性能差别不大,但本文方法具有更快的分割速度。

参考文献

- [1] Osher S and Sethian J A. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49.
- [2] Osher S and Shu C W. High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equation [J]. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1991, 28(4): 907-922.
- [3] 曹广真, 金亚秋. 基于水平集方法的多源遥感数据融合及城区道路提取[J]. *电子与信息学报*, 2007, 29(6): 1464-1470. Cao Guang-zhen and Jin Ya-qiu. Data fusion of multi-source remote sensing based on level set method and application to urban road extraction [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(6): 1464-1470.
- [4] Kimmel R, Amir A, and Bruckstein A M. Finding shortest paths on surfaces using level sets propagation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1995, 17(6): 635-640.
- [5] 曹宗杰, 闵锐, 庞伶俐等. 基于统计模型的变分水平集 SAR 图像分割方法[J]. *电子与信息学报*, 2008, 30(12): 2862-2866. Cao Zong-jie, Min Rui, and Pang Ling-li, et al. A variational level set SAR image segmentation approach based on statistical model [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(12): 2862-2866.
- [6] 梅雪, 夏良正, 李久贤. 一种基于变分水平集的红外图像分割算法[J]. *电子与信息学报*, 2008, 30(7): 1700-1702. Mei Xue, Xia Liang-zheng, and Li Jiu-xian. A segmentation algorithm of infrared image based on variational formulation level set model [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(7): 1700-1702.
- [7] 王斌, 高新波. 基于水平集接力的图像自动分割方法[J]. *软件学报*, 2009, 20(5): 1185-1193. Wang Bin and Gao Xin-bo. Automatic image segmentation method using sequential level set [J]. *Journal of Software*, 2009, 20(5): 1185-1193.
- [8] Chan T F and Vese L A. Active contours without edges[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(2): 266-277.
- [9] Tsai R and Osher S. Level set methods and their applications in image science[J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2003, 1(4): 1-20.
- [10] Lee Suk-ho and Seo Jin-keun. Level set-based bimodal segmentation with stationary global minimum [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(9): 2843-2852.
- [11] Olivier B, Denis F, Philippe T, and Michael U. Variational B-spline level-set: A linear filtering approach for fast deformable model evolution [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(6): 1179-1191.
- [12] Aubert G, Barlaud M, Faugeras O, and Jehan-Besson S. Image segmentation using active contours: Calculus of variations or shape gradients[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2003, 63(6): 2128-2154.
- [13] Gelas A, Bernard O, Friboulet D, and Prost R. Compactly supported radial basis functions based collocation method for level-set evolution in image segmentation[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(7): 1873-1887.

刘建磊: 男, 1981年生, 博士生, 研究方向为信号和图像处理。

冯大政: 男, 1959年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为自适应信号处理、阵列信号处理、智能信息处理。