

## 物理层网络编码在数据会聚无线自组织网络中的容量增益研究

陈 晨<sup>①</sup> 程海川<sup>②</sup> 依 那<sup>①</sup> 项海格<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(北京大学信息科技学院 北京 100871)

<sup>②</sup>(陆军航空兵学院 北京 101123)

**摘 要:** 为研究物理层网络编码 (Physical-layer Network Coding, PNC) 方案在数据汇聚无线自组织网络中相对于传统方案能够获得的容量增益, 该文通过稀疏割容量分析推导得到 PNC 方案平均每节点信息传输速率的上界和下界。与传统路由方案及传统网络编码方案相比, 在数据汇聚无线自组织网络中应用 PNC 方案能够提升网络容量的数量级。

**关键词:** 无线自组织网络; 无线网络编码; 物理层网络编码; 网络容量

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)08-1932-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00728

## Study on the Capacity Benefit of Physical-layer Network Coding for Wireless Data-gathering Ad hoc Networks

Chen Chen<sup>①</sup> Cheng Hai-chuan<sup>②</sup> Yi Na<sup>①</sup> Xiang Hai-ge<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China)

<sup>②</sup>(Army Air Force Academy, Beijing 101123, China)

**Abstract:** This paper studies the network throughput capacity gain of Physical-layer Network Coding (PNC) in data-gathering wireless ad hoc networks. The throughput upper bound and lower bound with the PNC scheme are derived by utilizing the sparsity-cut capacity analysis. The result of this paper implies that by using PNC, an order capacity gain can be obtained over traditional routing and network coding schemes in wireless data-gathering Ad hoc networks.

**Key words:** Wireless Ad hoc networks; Wireless network coding; Physical-layer Network Coding (PNC); Network throughput capacity

### 1 引言

Gupta 和 Kumar<sup>[1]</sup>的经典研究结果显示, 当网络中节点个数为  $n$  时, 无线自组织网络容量界的数量级表示为  $\lambda(n) = \Theta(1/\sqrt{n \log n})$  (协议模型<sup>[1]</sup>), 这说明网络平均每节点通信速率随网络节点数目增加而下降。自此, 研究者一直在尝试寻找新的方法来突破这个容量界限, 以使无线网络能够更好地扩容。然而, 大量的研究结果显示, 无论是在纯粹的无线自组织网络<sup>[1]</sup>(网络中各无线节点分别相互通信)、还是混合型自组织网络<sup>[2]</sup>(存在有线连接的基础链路骨架的无线自组织网络), 以及本文考虑的数据会聚无线自组织网络<sup>[2,3]</sup>(网络中节点将各自的信息通过多跳传递到网络中某些数据汇聚节点, 这些汇聚节点将收集到的信息汇聚给信息中心)中, 当具有有线连接的节点数目少于  $\sqrt{n}$  时, 网络容量随节点数目变化的趋势都没有突破 Gupta 和 Kumar 给出的容量界。

尤其在本文考虑的数据会聚无线自组织网络中, 由于受限于汇聚节点的数量和分布位置, 数据会聚网络的性能与文献[1]中结果相比会更差<sup>[2-4]</sup>。

另一方面, 网络编码(NC)<sup>[5]</sup>允许节点对信息进行组合, 被认为具有提高网络容量的潜力。但是, Liu 等人<sup>[6]</sup>近期的研究表明, 应用网络编码的无线网络其容量仍为  $\lambda(n) = \Theta(1/\sqrt{n \log n})$  数量级。因此, 尽管网络编码方案可能使无线网络容量有一个常数倍数的提高, 但它仍然无法解决文献[1]中的网络扩容问题。作为网络编码理论的最新发展, Zhang 等人<sup>[7]</sup>近期提出了物理层网络编码(PNC)的新概念, 该方法允许节点接收干扰的混合信号, 并通过物理层技术处理这些信号以得到它们的信息组合。与传统网络编码相比, PNC 允许无线网络节点接收干扰的无线信号。然而, Lu 等人<sup>[8]</sup>的最新研究成果显示, 相对于传统方案, PNC 在纯粹的无线自组织网络中可提供的容量同样为  $\Theta(1/\sqrt{n \log n})$  的数量级, 与传统网络编码方案相同。因此, 如何最大限度地发挥

PNC 的作用以获得更高的容量增益是 PNC 发展的关键问题。但在本文之前的研究工作中,如文献[7-9]等,并没有出现与此问题相关的定量或定性的结论。

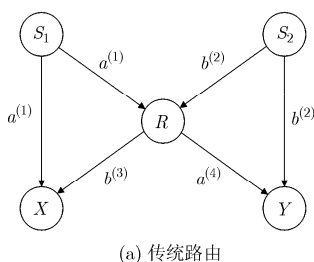
本文将各种属于物理层网络编码(PNC)<sup>[7]</sup>范畴的方案(利用物理层技术处理混合信号进行信息组合的方案,如 PNC<sup>[7]</sup>, ANC<sup>[9]</sup>等)统称为物理层网络编码(PNC)方案,并通过稀疏割容量分析<sup>[1,6]</sup>得到如下结论:在具有随机致密数据会聚无线自组织网络中,PNC 方案的网络容量具有上界  $\Theta(r(n))$  和下界  $\Theta(1/\sqrt{n \log n})$ 。与传统路由/网络编码方案<sup>[1,6]</sup>和 PNC 在纯粹的无线自组织网络中的容量<sup>[8]</sup>相比,应用 PNC 的数据会聚无线网络可获得  $\Theta(\log n)$  数量级或更大的容量增益。本文还将给出一种能够使 PNC 数据会聚无线自组织网络达到容量上界的确定性节点分布与传输方案。

## 2 模型与预备知识

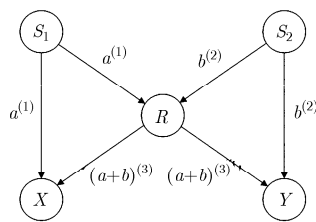
### 2.1 网络模型

本文参考 Gupta 和 Kumar<sup>[1]</sup>的网络模型,设  $n$  个节点随机、独立、均匀分布于单位面积固定区域组成数据会聚无线自组织网络,其中每个节点都是源节点(source node),源节点发送的信息经多跳方式传递到某些额外的信息汇聚节点(sink node),并由汇聚节点通过有线连接将这些信息汇集到信息中心,所有节点的工作模式为半双工。由于汇聚节点数目明显与该网络的容量相关<sup>[4]</sup>,为与其它研究结果公平比较,本文假设汇聚节点数目  $m$  与源节点数目  $n$  存在如下关系:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^d} = 0 (d > 1/2)$ ,即网络中信息汇聚节点数目少于  $\sqrt{n}$ 。设每节点传输半径  $r(n)$  为节点数目  $n$  的函数<sup>[1]</sup>,如果两节点间的距离小于  $r(n)$ ,则认为它们之间存在一条无线链路,我们归一化其传输速率(带宽)为 1 bit/s。本文研究的数据会聚网络其典型应用可为数据会聚无线传感器网络。

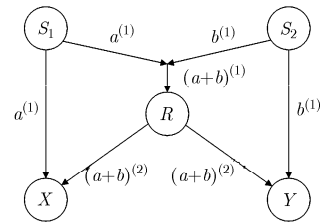
**定义 1** (数据会聚无线自组织网络的容量)由  $n$  个节点组成的数据会聚无线自组织网络的容量为:在最优传输方案下,平均每个源节点向信息中心传输数据的通信速率,即



(a) 传统路由



(b) 传统网络编码 (NC)



(c) PNC

图 1 传统路由、传统网络编码(NC)以及 PNC 的工作模式

$$C(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i(n) \quad (1)$$

其中  $\lambda_i(n)$  是单位时间内第  $i$  个源节点传输给信息中心的信息比特数。

**定义 2** (网络容量的数量级  $\Theta(f(n))$ )如果存在正数  $c$  和  $c'$ , 且  $c < c'$ , 有<sup>[1]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(C(n) = cf(n)) &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Prob}(C(n) = c'f(n)) &< 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

则说网络容量  $C(n)$  具有  $\Theta(f(n))$  的数量级, 其中  $\text{Prob}(C(n) = cf(n))$  表示网络容量  $C(n)$  能够达到  $cf(n)$  的概率。

### 2.2 传统路由、传统网络编码(NC)以及 PNC 的工作模式

图 1 为传统路由、传统网络编码(NC)以及 PNC 3 种不同方案的工作模式,其中  $S_1$  和  $S_2$  为源节点,  $X$  和  $Y$  为目的节点( $X$ 、 $Y$  可以是  $S_1$ 、 $S_2$  本身),  $S_1$  和  $S_2$  分别传输 2 个数据单元  $a$  和  $b$  到  $X$  和  $Y$ , 而  $a^{(i)}$  和  $b^{(i)}$  表示节点将在第  $i$  时隙发送数据  $a$  或  $b$ 。

(1)传统路由方案需要 4 个时隙来完成 2 个单元数据的传输:

(2)NC 方案总共需要 3 个时隙来实现传输,其中路由节点  $R$  将发送信息  $a$  和  $b$  的组合,接收节点  $X$ ,  $Y$  利用它们在 3 个时隙中累积收到的信息进行解码;

(3)PNC 方案中路由节点  $R$  将在时隙 1 收到  $S_1$  和  $S_2$  发来电磁波信号的物理叠加,利用物理层信号处理的方法,该混合信号将被转化为携带信息  $a$ ,  $b$  的组合结果(如  $a+b$ )的信号并在时隙 2 广播给  $X$  和  $Y$ , 完成 2 个单元数据传输只需要 2 个时隙。

### 2.3 PNC 的通信传输模型(协议模型)

本文采用基于传输范围的通信模型(即协议模型<sup>[1,6]</sup>)来判断网络中节点是否能够正确接收邻居节点发来的信息。由前面介绍的 PNC 传输模型可知,PNC 方案能够同时接收多个节点发来的信号,但接收节点只能得到这些信息的组合,而不是信息本身。

根据 PNC 的这种性质,本文假设接收节点可以收到其传输半径  $r(n)$  内所有节点传输信息的组合结

果, 而无法收到与之相距超过  $(1 + \Delta)r(n)$  的节点的信息, 其中  $\Delta$  为一正实数, 与无线通信介质属性有关<sup>[1,6]</sup>。(举例如图 2 所示, 接收节点  $i$  可以收到节点  $a, b, c, d, e$  所发送信息的组合, 接收节点  $j$  可以收到节点  $a, b, f, g$  所发送信息的组合。)

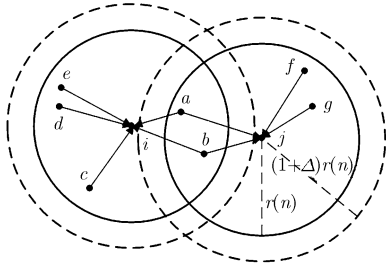


图 2 PNC 的协议模型

### 3 物理层网络编码(PNC)在数据会聚无线自组织网络中的网络容量

#### 3.1 PNC 方案的深入分析

**定义 3** (稀疏割)稀疏割(sparsity cut)<sup>[1,6]</sup>  $\Gamma$  是一条将网络分为两个部分的割, 在网络的所有割中, 穿过  $\Gamma$  的所有无线链路的带宽总和最小。

当网络节点分布确定后, 我们一定可以找到一条割  $\Gamma$  为网络的稀疏割(如图 3 所示, 为一长度为  $l_\Gamma$  的线段  $AB$ )。设  $\Gamma_{AB}$  将网络分为两部分  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ , 由定义 3,  $\Gamma_{AB}$  能够捕捉到穿过该网络瓶颈部分的平均流量<sup>[1,6]</sup>。在数据会聚无线自组织网络中, 如果我们在稀疏割  $\Gamma_{AB}$  的一侧设置一些信息汇聚节点与信息中心相连接, 则由定义 1, 该网络的容量只与单位时间内穿过  $\Gamma_{AB}$  的信息比特数有关, 而与其之前或之后的信息交换无关。由于只有  $\Gamma_{AB}$  两侧距离  $r(n)$  范围内的发送和接收节点对穿过  $\Gamma_{AB}$  的链路数量有贡献, 当网络节点接入与信息传输方案确定以后, 设在  $\Gamma_{AB}$  的左边区域  $R_T$  中有  $s$  个发送信息的独立源节点, 在  $\Gamma_{AB}$  的右边区域  $R_R$  中有  $d$  个接收信息的独立接收节点, 区域  $R_R$  中的各个接收节点收到的信息组合可用该稀疏割的伴随矩阵表示:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \xi_{r_1 t_1} & \xi_{r_1 t_2} & \cdots & \xi_{r_1 t_s} \\ \xi_{r_2 t_1} & \xi_{r_2 t_2} & \cdots & \xi_{r_2 t_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{r_d t_1} & \xi_{r_d t_2} & \cdots & \xi_{r_d t_s} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中元素  $\xi_{r_i t_j}$  为 0/1 变量, 表示接收节点  $r_i$  收到的信息组合是否包含来自源  $t_j$  的信息。当网络节点位置分布及其稀疏割两侧节点的接入和传输方案确定后, 就可以确定  $\mathbf{A}$  中各元素的值。

由于 PNC 的多跳传输策略经常通过传输一些

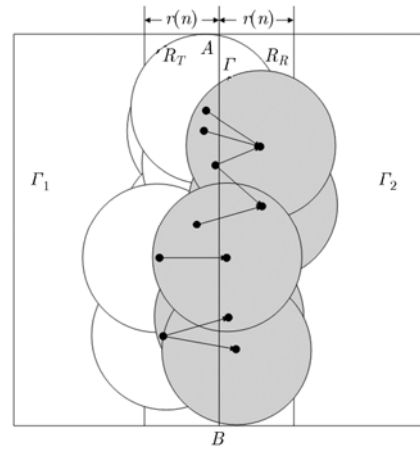


图 3 穿过稀疏割的链路

接收节点在之前时刻收到的信息来帮助路由和解码, 当考虑穿过稀疏割的网络流量时, 这些已知信息(在之前时刻已经穿过稀疏割的信息)不应计算在内, 因此只需计算单位时间内有多少新信息被传递通过网络的稀疏割。设  $\mathbf{X}=[x_{t_1}, \dots, x_{t_s}]^T$  表示稀疏割左边源节点分别发送的信息,  $\mathbf{Y}=[y_{r_1}, \dots, y_{r_d}]^T$  表示稀疏割右边接收节点分别接收到的信息组合, 我们有:

**定义 4** (可行的 PNC 方案)设  $x_{k_1}, \dots, x_{k_m} \in \mathbf{X}$  为信息向量  $\mathbf{X}$  中接收节点已知的信息 ( $k_1, \dots, k_m$  为  $t_1, \dots, t_s$  中的某些序号), 其对应的列向量为  $\tilde{\mathbf{X}}=[x_{k_1}, \dots, x_{k_m}]^T$ ;  $\tilde{\mathbf{A}}$  为  $\mathbf{A}$  的子矩阵, 由  $\mathbf{A}$  的第  $k_1, \dots, k_m$  列组成, 即  $\tilde{\mathbf{A}}=[(\xi_{r_1 k_1}, \dots, \xi_{r_d k_1})^T, \dots, (\xi_{r_1 k_m}, \dots, \xi_{r_d k_m})^T]$ 。则当  $\mathbf{X}^*$  (线性系统  $\mathbf{A}^* \mathbf{X}^* = \mathbf{Y}^*$  的解)存在时, 我们说这个 PNC 方案是可行的, 这里  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} \setminus \tilde{\mathbf{A}}$  为  $\mathbf{A}$  删除  $\tilde{\mathbf{A}}$  以后的剩余子矩阵,  $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} - (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{X}})$ , 而  $\mathbf{X}^* = \mathbf{X} \setminus \tilde{\mathbf{X}}$  为所有未知信息组成的向量。

因此, 当节点分布确定后, PNC 传输方案需对节点进行接入控制以使  $\mathbf{A}^* \mathbf{X}^* = \mathbf{Y}^*$  可解。并且矩阵  $\mathbf{A}^*$  的秩越大, 稀疏割两侧参与有效传输的节点数就越多, 网络传输效率也就越高。

**引理 1** 在由  $n$  个节点组成的数据会聚无线网络中, 一个可行的 PNC 方案在单位时间内能传给信息中心的最大信息比特数为  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(n) = nC(n) = \max\{\text{rank}(\mathbf{A}^*)\}$ , 其中  $\max\{\text{rank}(\mathbf{A}^*)\}$  为当网络节点分布确定后  $\mathbf{A}^*$  能够达到的最大秩。

**证明** 在可行的 PNC 方案中, 单位时间内穿过稀疏割的线性无关未知信息组合数为  $\text{rank}(\mathbf{A}^*)$ 。如果在稀疏割的一侧设置足够的信息汇聚节点与信息中心相连接, 则这些未知信息组合被汇集到信息中心后可通过解码得到  $\text{rank}(\mathbf{A}^*)$  比特的信息量。而当

网络节点分布确定后，如果选择最优传输方案以使该分布下的  $\text{rank}(\mathbf{A}^*)$  达到最大，网络单位时间能够传给信息中心的最大比特数为  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(n) = nC(n) = \max\{\text{rank}(\mathbf{A}^*)\}$ 。证毕

### 3.2 网络容量的界

#### (1) 上界

**引理 2** 当单位面积内的节点数目为  $n$  时，PNC 数据会聚无线自组织网络单位时间内穿过稀疏割的信息比特数的上界为  $\Theta(n \cdot l_T \cdot r(n))$ 。

**证明** 设  $l_T$  为该网络稀疏割  $\Gamma$  的长度， $r(n)$  为节点传输半径，由上一节的观察结果可知，PNC 网络与稀疏割容量有关的节点应在图 3 区域  $R_T$  和  $R_R$  内分布的发送接收节点，并且这些节点需相互构成穿过  $\Gamma$  的无线链路，那么，在  $R_T$  中可能存在有效节点的位置区域应为图 3 中所有中心位于  $R_R$  区域中的深色圆在  $\Gamma$  左边所覆盖的区域。设该区域面积为  $S$ ，有

$$S = \bigcup_{j=1}^{N_R} (S_j \cap R_T) \leq l_T r(n) \quad (4)$$

其中  $S_j$  为第  $j$  个接收节点的传输范围(即第  $j$  个深色圆的面积，其大小应为  $\pi r^2(n)$ )， $N_R$  是区域  $R_R$  中接收节点的数目。由于节点均匀分布，可设面积为  $S$  的区域内的节点数目为  $\Theta(nS)$  [1,6]，则在区域  $R_T$  中源节点数目的上界为

$$N_T^{(\max)} = \Theta(n \cdot l_T \cdot r(n)) \quad (5)$$

同理，在区域  $R_R$  中接收节点数目的上界为

$$N_R^{(\max)} = \Theta(n \cdot l_T \cdot r(n)) \quad (6)$$

为求网络容量上界，我们设可以找到一种传输方案使该稀疏割的伴随矩阵为一满秩矩阵，且其两侧节点全部传输独立未知信息。由于满秩矩阵的秩等于行和列的数目，根据引理 1，该 PNC 网络单位时间内传输给信息中心的信息比特数上界为  $\Theta(n \cdot l_T \cdot r(n))$ 。证毕

**定理 1** 当单位面积内节点数目为  $n$  时，PNC 数据会聚网络容量的上界为  $\Theta(r(n))$ 。

**证明** 无论选择何种形状的单位面积区域来讨论 PNC 的网络容量，总能找到一个割  $\Gamma$  为该网络的稀疏割，而其长度  $l_T$  与网络节点数目  $n$  无关。同时，无线链路速率  $W$  也与  $n$  无关，根据引理 2 和定义 1，PNC 数据会聚无线网络的容量上界为  $\Theta(r(n))$ 。

证毕

如果选择合适的  $r(n)$  来保证网络节点的连通性，如设  $r(n) = \Theta\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$  [1]，则有

**推论 1** 使用 PNC 方案的数据会聚无线自组织网络容量的上界为  $\Theta\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$ 。

这说明与容量为  $\Theta(1/\sqrt{n \log n})$  的传统无线自组织网络 [1,6] 相比，PNC 数据会聚网络的容量可提高  $\Theta(\log n)$ ；而在受限于汇聚节点数目和分布位置的传统数据会聚网络中，当汇聚节点数目  $m$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n^d} = 0$  ( $d > 1/2$ ) 时，按定义 1 计算得到的网络容量结果约为  $\Theta(1/n)$  至  $\Theta\left(\frac{1}{n^{(d-1/2)}\sqrt{n}}\right)$  之间 [2-4]，这时应用 PNC 可获得更大的(超过  $\Theta(n^{(d-1/2)}\sqrt{\log n})$  的)容量增益。

#### (2) 下界

**引理 3** 当  $n$  个节点在单位面积区域内均匀分布时，PNC 网络单位时间内穿过稀疏割的信息比特数的下界为  $\Theta(l_T/r(n))$ 。

**证明** 设  $N_j$  为图 3 中心位于  $R_R$  区域中的第  $j$  个接收圆内 ( $j = 1, \dots, N_R$ ) 包含的发送节点数目，当  $n$  较大时，每个接收圆内可包含的发送节点数目  $N_j$  都趋近于其期望值  $E(N_j)$  (对于该结论的解释详见文献 [1,6])，这里  $E(N_j) = \Theta(n \cdot (S_j \cap R_T))$ 。然而在可行的 PNC 方案中，并不是所有这些接收圆中的发送节点都能传输有效信息。为得到 PNC 容量的下界，即求在任意节点分布情况下采用最优传输方案矩阵  $\mathbf{A}^*$  一定能够达到的秩，我们考虑图 4 所示的情况：图 4 中每个位于两两不相交的圆形接收区域中心的接收节点一定可以获得彼此线性独立的信息组合，因此当  $n$  较大时，矩阵  $\mathbf{A}^*$  可达到的秩应至少为图 4 中  $R_T$  或  $R_R$  区域内不相交圆的最大数目。我们求解此圆堆积问题：由图 4 中相邻不相交圆的堆积示例可知，在最佳紧密堆积的情况下，相邻不相交圆圆心的水平距离为  $r(n)$ ，垂直距离为  $\sqrt{(3 + 4\Delta + \Delta^2)}r(n)$ ，因此， $R_T$  或  $R_R$  区域内可能的不相交圆的最大数目为  $\left\lfloor \frac{l_T}{\sqrt{(3 + 4\Delta + \Delta^2)}r(n)} \right\rfloor$ ，其中  $\lfloor \cdot \rfloor$  为下取整算

符。由引理 1，忽略系数，PNC 网络单位时间内穿过稀疏割信息比特数的下界为  $\Theta(l_T/r(n))$ 。证毕

**定理 2** 一个可行的 PNC 网络其容量下界为  $\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n \log n}}\right)$ ，与传统路由/NC 方案相同。

**证明** 忽略常数系数，引理 3 中穿过稀疏割的容量与传统方案稀疏割容量 [1,6] 具有相同数量级。Gupta 等人 [1] 已经证明了这时网络所有节点可达到的总通信速率的数量级为当取  $r(n) = \Theta\left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$  时

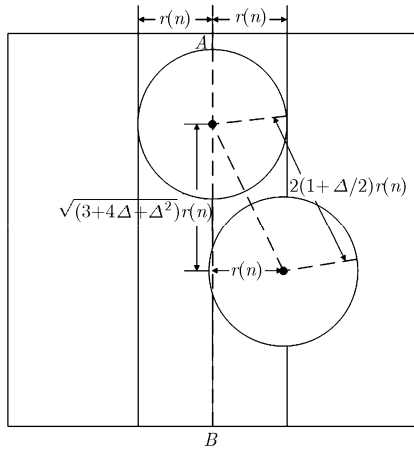


图 4 位于圆心的节点能够收到线性无关的组合

的稀疏割容量, 即  $nC(n) = \Theta\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$ 。由定义 1 可得本定理。 证毕

#### 4 一种达到容量上界的确定性节点分布和传输方案

回顾引理 2 的证明过程, 式(4)中所有  $S_j \cap R_T$  区域可以相互重叠排满整个  $R_T$  区域, 此时不等式等号能够成立, 这使得找到一种达到容量上界的节点分布和传输方案成为可能。

考虑如图 5 所示的一种节点分布, 其节点位置要求如下: 稀疏割  $\Gamma_{AB}$  两侧节点按图 5 中分布顺序交错排列, 同列或邻列最近节点间的距离都相等(见图 5 中上部实线组成的等边三角形), 设该最小距离为  $\epsilon(n)$ ,  $\epsilon$  的值与  $n$  有关, 为均匀等间距分布下节点间距的期望值。

**命题 1** 当  $r(n)$  与  $\epsilon(n)$  满足一定关系时, 可以找到一种传输方案使图 5 中 PNC 数据会聚无线自组织网络达到  $\Theta(r(n))$  的网络容量。

**证明** 当  $n$  确定后, 设图 5 中虚线圆表示发送节点  $c_2$  的传输范围, 则当  $r(n) > \epsilon(n)$  且  $(1 + \Delta)r(n) < \sqrt{3}\epsilon(n)$  时(如图 5 内圈虚线圆所示), 接收节点  $i_1, i_2$  在发送节点  $c_2$  的传输范围内, 其它接收节点都与  $c_2$

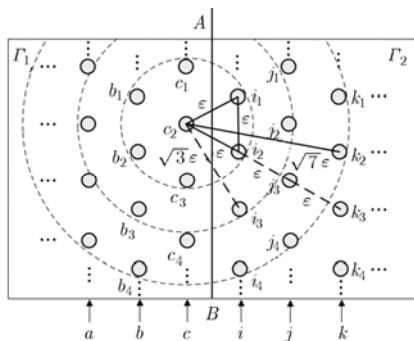


图 5 一种达到容量上界的确定性节点分布

相距  $(1 + \Delta)r(n)$  以上, 此时  $i_1$  能够收到  $c_1, c_2$  的信息组合,  $i_2$  能够收到  $c_2, c_3$  的组合, 以此类推(该传输模式对于列  $c$  和列  $i$  中每个对应的相邻节点均成立); 当  $r(n) > \sqrt{3}\epsilon(n)$  且  $(1 + \Delta)r(n) < 2\epsilon(n)$  时(如图 5 中间虚线圆所示), 接收节点  $j_2$  在发送节点  $c_2$  的传输半径  $r(n)$  内, 同列其它节点  $j_1, j_3, j_4, \dots$  与  $c_2$  相距  $(1 + \Delta)r(n)$  以上; 而当  $r(n) > \sqrt{7}\epsilon(n)$  且  $(1 + \Delta)r(n) < 3\epsilon(n)$  时(如图 5 外圈虚线圆所示), 接收节点  $k_1, k_2$  在发送节点  $c_2$  的传输半径  $r(n)$  内, 而节点  $k_3, k_4, \dots$  与  $c_2$  相距  $(1 + \Delta)r(n)$  以上(即对于  $k$  列和  $c$  列,  $k_1$  仅能接收  $c_1, c_2$  的信息组合,  $k_2$  仅能接收  $c_2, c_3$  的组合, 以此类推……)

这样, 如果节点分布满足图 5 要求, 当  $r(n)$  与  $\epsilon(n)$  满足一定关系时(对于图 5 内圈虚线圆所示情况, 需满足  $1 < r(n)/\epsilon(n) < \sqrt{3}/(1 + \Delta)$ ; 对于中间虚线圆所示情况, 需有  $\sqrt{3} < r(n)/\epsilon(n) < 2/(1 + \Delta)$ ; 对于外圈虚线圆所示情况, 需有  $\sqrt{7} < r(n)/\epsilon(n) < 3/(1 + \Delta)$ ; 以此类推), 网络中每个发送节点传输所及的最远接收节点列中, 只有一个或两个最近的节点在该发送节点的传输范围  $r(n)$  内, 而同列或更远的其它节点都在该节点的  $(1 + \Delta)r(n)$  范围外。在这种情况下, 稀疏割  $\Gamma_{AB}$  的伴随矩阵  $\mathbf{A}$  应为下列矩阵  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots$  中之一:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_{i_1 c_1} & \xi_{i_1 c_2} & \xi_{i_1 c_3} & \xi_{i_1 c_4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi_{i_2 c_1} & \xi_{i_2 c_2} & \xi_{i_2 c_3} & \xi_{i_2 c_4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_{i_3 c_1} & \xi_{i_3 c_2} & \xi_{i_3 c_3} & \xi_{i_3 c_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_{i_4 c_1} & \xi_{i_4 c_2} & \xi_{i_4 c_3} & \xi_{i_4 c_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_{i_1 c_1} & \xi_{i_1 c_2} & \xi_{i_1 c_3} & \xi_{i_1 c_4} \\ \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \xi_{i_2 c_1} & \xi_{i_2 c_2} & \xi_{i_2 c_3} & \xi_{i_2 c_4} \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \xi_{i_3 c_1} & \xi_{i_3 c_2} & \xi_{i_3 c_3} & \xi_{i_3 c_4} \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \xi_{i_4 c_1} & \xi_{i_4 c_2} & \xi_{i_4 c_3} & \xi_{i_4 c_4} \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  分别表示当  $1 < r(n)/\varepsilon(n) < \sqrt{3}/(1 + \Delta)$ ,  $\sqrt{3} < r(n)/\varepsilon(n) < 2/(1 + \Delta)$ ,  $\sqrt{7} < r(n)/\varepsilon(n) < 3/(1 + \Delta)$  时图 5 中网络稀疏割伴随矩阵的形式, 可类推(假设  $\Delta$  的取值可使上述不等式有解, 如对于  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$  的情况, 需有  $\Delta < \sqrt{3} - 1$ )。限于篇幅,  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  表示图 5 每节点列(如列  $a, b, c, i, j, k$  等)中仅有 4 个节点时矩阵  $\mathbf{A}$  的形式, 如节点数目增加可按相同规律推广。

由节点均匀分布性质可知, 在稀疏割两侧  $r(n)$  范围内可各有  $\Theta(nl_r r(n))$  个发送节点和接收节点按图 5 的分布要求规则排列。当节点分布满足图 5 要求, 且  $r(n)$  与  $\varepsilon$  关系满足前面条件 ( $1 < r(n)/\varepsilon(n) < \sqrt{3}/(1 + \Delta)$ 、 $\sqrt{3} < r(n)/\varepsilon(n) < 2/(1 + \Delta)$ 、 $\sqrt{7} < r(n)/\varepsilon(n) < 3/(1 + \Delta)$  等)之一时, 其对应的网络稀疏割伴随矩阵  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1$  或  $\mathbf{A}_2$  或  $\mathbf{A}_3$  等经行列线性变换均可转化为上三角矩阵, 为满秩矩阵。因此, 我们可以找到一种传输方案使单位时间穿过稀疏割的信息数为  $\Theta(nl_r r(n))$ 。由定理 1, 这时该 PNC 数据会聚网络容量为  $\Theta(r(n))$ , 可达到 PNC 方案的上界容量。证毕。

这样, 我们证明了在实现理想的节点传输范围控制的条件下, 命题 1 成立。如果在网络稀疏割一侧设置一些信息汇聚节点与信息中心相连接, 则信息组合被汇集到信息中心后通过解码可使该 PNC 数据会聚网络实现  $\Theta(r(n))$  的容量。需要特别注意的是, 这里的汇聚节点只要数量足够(使其总接收能力超过单位时间穿过稀疏割的信息数), 其分布位置可局限于稀疏割一侧的任意特定区域——这个特点使 PNC 方案在数据汇聚网络应用中更具优势。因为在数据会聚网络中, 受条件所限, 常常只能在网络边缘某较小范围区域内设置汇聚节点以接收整个网络传输的数据信息, 这种情况下如采用传统方案, 这些汇聚节点的信息接入过程将受到无线干扰的严重限制, 导致汇聚节点周边的无线传输成为网络容量的瓶颈<sup>[2]</sup>。

本文给出的 PNC 数据会聚无线自组织网络容量上下界的含义为: 当网络节点位置分布及传输方案最优时, PNC 网络容量能够达到上界的数量级; 而显然, 图 5 中网络的传输模式是建立在节点有序分布的基础上的, 所以如果图 5 节点相对位置偏离其原位置, 其稀疏割伴随矩阵将不再满秩, 相应的网络容量也将下降, 直到其容量退化为 PNC 数据会聚无线网络能保证的容量下界水平为止。

## 5 结论

本文的分析结果显示, 与传统方案相比, 在数

据会聚无线自组织网络中应用物理层网络编码(PNC)具有提升  $\Theta(\log n)$  数量级网络容量的能力, 而 PNC 方案能够获得该容量增益的根本原因是由于其主动“拥抱”干扰的创新思路。另外, 从本文得到的容量的界及给出的节点分布和传输方案实例可知, PNC 方案不仅能够提高网络容量, 而且可以适应数据汇聚自组织网络的特点, 原先严重受限于无线干扰的汇聚节点周边传输不再是网络容量的瓶颈。

## 参考文献

- [1] Gupta P and Kumar P. The capacity of wireless networks [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, 46(2): 388-404.
- [2] Toumpis S. Capacity bounds for three classes of wireless networks: asymmetric, cluster, and hybrid [C]. The ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MOBIHOC) Proceedings, Tokyo, Japan, May 2004: 133-144.
- [3] Pan Y and Xiao Y. Ad-hoc and Sensor Networks [M]. USA, Nova Publishers, 2006: 91-114.
- [4] Duarte-Melo E and Liu M. Data-gathering wireless sensor networks: organization and capacity [J]. *Computer Networks*, 2003, 43(4): 519-537.
- [5] Ahlswede R, Cai N, and Li S Y R, et al. Network information flow [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, 46(4): 1204-1216.
- [6] Liu J, Goeckel D, and Towsley D. Bounds on the throughput gain of network coding in unicast and multicast wireless networks [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2009, 27(5): 582-592.
- [7] Zhang S, Liew S C, and Lam P. Hot topic: Physical-layer network coding [C]. The Annual International Conference on Mobile Computing and Networking (ACM MOBICOM) Proceedings, California, USA, September 2006: 358-365.
- [8] Lu K, Fu S, and Qian Y, et al. On capacity of random wireless networks with physical-layer network coding [J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2009, 27(5): 763-772.
- [9] Katti S, Gollakota S, and Katabi D. Embracing wireless interference: Analog network coding [C]. ACM SIGCOMM Proceedings, Kyoto, Japan, August 2007: 397-408.

陈 晨: 男, 1982 年生, 博士生, 研究领域为通信系统, 无线网络。

程海川: 男, 1955 年生, 教授, 主要研究领域为军事通信。

依 那: 男, 1974 年生, 讲师, 研究方向为卫星与无线通信网络。

项海格: 男, 1941 年生, 教授, 主要研究方向为数字通信和信号处理, 包括直接序列扩展频谱通信、多载波频率分集扩展频谱通信、软件无线电技术、自适应干扰抑制技术和多用户检测技术、空分多址和 MIMO 系统的研究。