第 32 卷第 2 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.32No.2
2010 年 2 月 Journal of Electronics & Information Technology Feb. 2010

基于生成函数的格雷对分析与构造

涂宜锋[①] 松藤信哉[②] 范平志[①] 李旭东[①]
[①](信息编码与传输四川省重点实验室西南交通大学移动通信研究所 成都 610031)
[②](日本山口大学科学与工程学院 日本山口县 755-8611)

摘 要：该文由传统的格雷对构造方法交织和级联出发，提出了一种新的称之为生成函数的格雷对构造方法，该方法适用于长度为 2 的格雷对。文中分析了格雷对生成函数和希尔维斯特 Hadamard 矩阵之间的关系，这不仅有助于计算给定长度的格雷对的数量，而且有助于将 Hadamard 分解应用于格雷对的生成中。采用生成函数，可以很方便地产生一系列的格雷对应用于多目标的环境。格雷对生成函数由二进制向量，与和或逻辑运算组成，极大地方便了序列生成器的硬件实现。

关键词：格雷对；自相关函数；互相关函数；生成函数
中图分类号：TN911.2 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2010)02-0335-05
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00533

Analysis and Construction of Golay Pair Based on Generating Function

Tu Yi-feng[①] Shinya Matsufuji[②] Fan Ping-zhi[①] Li Xu-dong[①]
[①](*Provincial Key Lab of Information Coding & Transmission*, *Institute of Mobile Communications*, *Southwest Jiaotong University*, *Chengdu*, 610031, *China*)
[②](*Graduate School of Science and Engineering*, *Yamaguchi University*, 2–16–1 *Tokiwadai*, *Ube*, *Yamaguchi*, 755–8611, *Japan*)

Abstract: In this paper, an approach called generating function is proposed to construct Golay pair of length 2 and its mate based on conventional interleaving and concatenation method. Relationship between generating function of Golay pair and Sylvester Hadamard matrix is also investigated, which not only helps to calculate the total number of Golay pair of specific length, but also helps to apply Hadamard factorization to Golay pair generation. Based on generating function, lots of Golay pair can be produced conveniently for multi-target applications. Generating functions are expressed by binary vector, XOR and AND operations, which greatly facilitates the physical implementation of sequence generation.

Key words: Golay pair; Autocorrelation Function (ACF) ; Cross-correlation Function (CCF) ; Generating function

1 引言

如果一对序列中两个子序列非周期自相关(ACF)函数值的和在除零外的所有时延上都为零，那么这对序列就称为格雷对[1]。格雷对应用非常广泛，诸如红外光谱测定，脉冲雷达及导航[1]，电子系统识别[2]，峰均比控制[3]，信道发声器[4]，信道同步[5]，信道估计[6]和扩频系统等。

在多目标及多用户的应用中，通常要求多个互为伴的格雷对。当两个格雷对对应的子序列的互相关函数值的和在所有位置上均为零时，这两个格雷对就互为伴[1]。由于互为伴的格雷对的最大个数为 2，这就使得适合格雷对的多用户应用为 2×2 信道同步[5]和信道估计[7]。当多目标应用的目标数大于 2 时，可使用互补序列集来弥补格雷对在伴数量上不足的缺陷。

由于格雷对在通信系统中得到了广泛的应用，很多文献谈到了格雷对的构造。Fan 和 Darnell 归纳了众所周知的一些格雷对的构造方法，比如交织，级联和 Kronecker 积扩展等[1]。David 和 Jedwab 分析了格雷序列和 Reed-Muller 码之间的重要联系，他们构造二进制和非二进制格雷序列的方法称为 GDJ 构造方法[3]。Li 和 Chu 基于特征 dd 序列提出了在 Z_4 上构造长度为 16 的非 GDJ 格雷序列[8]。Rathinakumar 和 Chaturvedi 更全面地总结了格雷序列和 Reed-Muller 码的关系,并给出了它们相互的构造方法[9]。

本文从传统的格雷对构造方法交织和级联出发，提出了一种新的基于生成函数的格雷对构造方法，该方法不仅可以构造长度为 2^n 的格雷对，而且

2009-04-13 收到， 2009-09-16 改回
NSFC(60772087)，国家 863 计划项目(2007AA01Z228)和 111 计划(111-2-14)资助课题
通信作者：涂宜锋 yftuye@yahoo.com.cn

可以构造该长度下的所有格雷对，同时，通过对希尔维斯特 Hadamard 矩阵和格雷对生成函数之间关系的分析，得到长度为 2^n 的格雷对数量的计算方法，并有助于将 Hadamard 分解[10,11]应用于格雷对生成器的硬件实现中。生成函数还可以用于分析序列的结构特性，有助于发现新的有用的序列[12]。

本文安排如下，第 2 节简单回顾了格雷对的定义及传统的交织和级联构造方法，第 3 节采用归纳法推导了长度为 2^n 的格雷对的生成函数，第 4 节给出了格雷对伴的生成函数的推导，最后总结全文。

2 格雷对

假设 $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$ 和 $\boldsymbol{b}=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$ 是长度为 N 的二进制序列，其中 $a_i=\pm1$，$b_i=\pm1$，$0\le i\le N-1$。$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的非周期互相关函数(CCF)定义如下

$$A_{a,b}(k)=\sum_{j=0}^{N-1-k}a(j)b(j+k),\ 0\le k\le N-1 \tag{1}$$

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，上述定义就变为非周期自相关函数(ACF) $A_{\boldsymbol{a}}(k)$。一对二进制序列$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，长度均为 N，满足下列条件时成为格雷对

$$A_{a,a}(k)+A_{b,b}(k)=\begin{cases}2N, & k=0\\ 0, & 1\le k\le N-1\end{cases} \tag{2}$$

当下列条件满足时，另一个格雷对$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ 称为格雷对$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$的伴

$$A_{a,c}(k)+A_{b,d}(k)=0,\quad 0\le k\le N-1 \tag{3}$$

本文从格雷对传统的构造方法，交织和级联出发，讨论格雷对的生成函数。由于生成函数是以二进制向量的形式描述的，因此，我们所研究的格雷对的长度限制为 2^n。假设$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是长度为 $N=2^n$ 的格雷对，r 是 N 的一个因子，则另一个长度为 $2N$ 的格雷对 (a',b') 可由下面交织的方法得到。

$$\left.\begin{aligned}a'=(&a_0,\cdots,a_{r-1},b_0,\cdots,b_{r-1},a_r,\cdots,a_{2r-1},b_r,\cdots,\\&b_{2r-1},\cdots,a_{N-r},\cdots,a_{N-1},b_{N-r},\cdots,b_{N-1})\\ b'=(&a_0,\cdots,a_{r-1},\overline{b}_0,\cdots,\overline{b}_{r-1},a_r,\cdots,a_{2r-1},\overline{b}_r,\cdots,\\&\overline{b}_{2r-1},\cdots,a_{N-r},\cdots,a_{N-1},\overline{b}_{N-r},\cdots,\overline{b}_{N-1})\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中“ ”表示求反操作。当 $r=N$ 时，交织就等价于众所周知的级联方式，如式(5)所示

$$\left.\begin{aligned}a'&=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1},b_0,b_1,\cdots,b_{N-1})\\ b'&=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1},\overline{b}_0,\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_{N-1})\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

举例：

$(a,b)=(+++-,+-++)$，长度为 4 的格雷对

$(a^{(1)},b^{(1)})=(+++-++-+,+-+++---)$，1 bit 交织，$r=1$

$(a^{(2)},b^{(2)})=(+++-+-++,++-++---)$，2 bits 交织，$r=2$

$(a^{(3)},b^{(3)})=(+++-+-++,+++--+--)$，级联，$r=3$

可以很容易验证，$(a^{(1)},b^{(1)})$，$(a^{(2)},b^{(2)})$ 和 $(a^{(3)},b^{(3)})$ 都是长度为 8 的格雷对。

3 格雷对生成函数

从基本的长度出发，设$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是长度为 $N=2^2$ 的格雷对，$\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)\in V_{2^2}$，其对应的生成函数可表示为

$$\left.\begin{aligned}f_a(\boldsymbol{x})&=x_0x_1\oplus c_0x_0\oplus c_1x_1\oplus w\\ f_b(\boldsymbol{x})&=f_a(\boldsymbol{x})\oplus\begin{Bmatrix}x_0\\x_1\end{Bmatrix}\oplus w\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中 $\oplus$ 表示伽利华域 GF(2)上的加法，也等价于逻辑运算异或(XOR)。$c_k\in\{0,1\}$ $(0\leqslant k\leqslant 1)$，$w\in\{0,1\}$。可以很容易验证，通过选择不同的参数值 c_k 和 w，所有长度为 4 的格雷对都能由式(6)得到。基于以上长度为 2^2 的格雷对的生成函数，本文研究如何得到长度为 2^3 的格雷对的生成函数。设$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是长度为 2^2 的格雷对，$\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_0,b_1,b_2,b_3)$。在对$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$进行第 2 节中介绍的交织和级联操作后，可以得到长度为 2^3 的 3 对格雷对 $(a^{(1)},b^{(1)})$，$(a^{(2)},b^{(2)})$，$(a^{(3)},b^{(3)})$，如表 1 所示。

表 1 基于交织和级联由长度为 2^2 的格雷对得到长度为 2^3 的格雷对

x_2	x_1	x_0	a	b	$a^{(1)}$	$b^{(1)}$	$a^{(2)}$	$b^{(2)}$	$a^{(3)}$	$b^{(3)}$
0	0	0	a_0	b_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	a_0
0	0	1	a_1	b_1	b_0	$\bar{b}_0$	a_1	a_1	a_1	a_1
0	1	0	a_2	b_2	a_1	a_1	b_0	$\bar{b}_0$	b_2	b_2
0	1	1	a_3	b_3	b_1	$\bar{b}_1$	b_1	$\bar{b}_1$	b_3	b_3
1	0	0			a_2	a_2	a_2	a_2	b_0	b_0
1	0	1			b_2	$\bar{b}_2$	a_3	a_3	b_1	$\bar{b}_1$
1	1	0			a_3	a_3	b_2	$\bar{b}_2$	b_2	$\bar{b}_2$
1	1	1			b_3	$\bar{b}_3$	b_3	$\bar{b}_3$	b_3	$\bar{b}_3$

通过观察表 1，可以分别得到 3 对新格雷对 $(a^{(1)},b^{(1)})$，$(a^{(2)},b^{(2)})$ 和 $(a^{(3)},b^{(3)})$ 所对应的生成函数。

(1) $(a^{(1)},b^{(1)})$ 的生成函数

$$\begin{aligned}&f_{a^{(1)}}(x_0x_1x_2)\\&=(x_0\oplus1)f_a(x_1x_2)\oplus x_0f_b(x_1x_2)\\&=(x_0\oplus1)f_a(x_1x_2)\oplus x_0\left(f_a(x_1x_2)\oplus\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}\oplus w\right.\\&=x_0f_a(x_1x_2)\oplus f_a(x_1x_2)\oplus x_0f_a(x_1x_2)\oplus\begin{Bmatrix}x_0x_1\\x_0x_2\end{Bmatrix}\oplus x_0w\\&=x_1x_2\oplus\begin{Bmatrix}x_0x_1\\x_0x_2\end{Bmatrix}\oplus c_0x_1\oplus c_1x_2\oplus x_0w\oplus w\end{aligned}$$

$$= x_1x_2 \oplus \begin{Bmatrix} x_0x_1 \\ x_0x_2 \end{Bmatrix} \oplus c_0x_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus w$$

$$f_{b^{(1)}}(x_0x_1x_2)$$
$$= (x_0 \oplus 1)f_a(x_1x_2) \oplus x_0(f_b(x_1x_2) \oplus 1)$$
$$= f_{a^{(1)}}(x_0x_1x_2) \oplus x_0 \oplus w \text{。}$$

(2) $(a^{(2)}, b^{(2)})$ 的生成函数

$$f_{a^{(2)}}(x_0x_1x_2)$$
$$= (x_1 \oplus 1)f_a(x_0x_2) \oplus x_1f_b(x_0x_2)$$
$$= x_0x_2 \oplus \begin{Bmatrix} x_1x_0 \\ x_1x_2 \end{Bmatrix} \oplus c_0x_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus w$$

$$f_{b^{(2)}}(x_0x_1x_2)$$
$$= (x_1 \oplus 1)f_a(x_0x_2) \oplus x_1(f_b(x_0x_2) \oplus 1)$$
$$= f_{a''}(x_0x_1x_2) \oplus x_1 \oplus w \text{。}$$

(3) $(a^{(3)}, b^{(3)})$ 的生成函数

$$f_{a^{(3)}}(x_0x_1x_2)$$
$$= (x_2 \oplus 1)f_a(x_0x_1) \oplus x_2f_b(x_0x_1)$$
$$= x_0x_1 \oplus \begin{Bmatrix} x_2x_0 \\ x_2x_1 \end{Bmatrix} \oplus c_0x_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus w$$

$$f_{b^{(3)}}(x_0x_1x_2)$$
$$= (x_2 \oplus 1)f_a(x_0x_1) \oplus x_2(f_b(x_0x_1) \oplus 1)$$
$$= f_{a'''}(x_0x_1x_2) \oplus x_2 \oplus w \text{。}$$

综合以上 3 种结果，可以得到长度为 2^3 的格雷对的生成函数为

$$\left.\begin{aligned} f_a(x_0x_1x_2) &= x_{k_0}x_{k_1} \oplus x_{k_1}x_{k_2} \oplus c_0x_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus w \\ f_b(x_0x_1x_2) &= f_a(x_0x_1x_2) \oplus \begin{Bmatrix} x_{k_0} \\ x_{k_2} \end{Bmatrix} \oplus w \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中(k_0, k_1, k_2) 可以是序列(0,1,2)的任意排列，$c_k \in \{0,1\}$ $(0 \leqslant k \leqslant 2)$，$w \in \{0,1\}$。

假设$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$是长度为 $N=2^n$ 的格雷对，$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \in V_{2^n}$。运用数学归纳法，可以由式(7)扩展得到格雷对$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$对应的生成函数为

$$\left.\begin{aligned} f_a(\boldsymbol{x}) &= x_{k_0}x_{k_1} \oplus x_{k_1}x_{k_2} \oplus \cdots \oplus x_{k_{n-2}}x_{k_{n-1}} \oplus c_0x_0 \\ &\quad \oplus c_1x_1 \oplus \cdots \oplus c_{n-1}x_{n-1} \oplus w \\ f_b(\boldsymbol{x}) &= f_a(\boldsymbol{x}) \oplus \begin{Bmatrix} x_{k_0} \\ x_{k_{n-1}} \end{Bmatrix} \oplus w \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中$\oplus$表示伽利华域 $GF(2)$上的加法，也等价于逻辑运算异或(XOR)。$(k_0, k_1, \cdots, k_{n-1})$ 可以是序列$(0,1,\cdots,n-1)$的任意排列，$c_k \in \{0,1\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$，$w \in \{0,1\}$。通过选择的不同的参数值 c_k 和 w，所有长度为 2^n 的格雷对都能由式(8)得到。

通过分析，可得到格雷对生成函数和希尔维斯特 Hadamard 矩阵之间的关系，事实上，格雷对$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 的子序列 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成 Hadamard 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 对角阵 $\boldsymbol{D}$ 的乘积，如式(9)所示，

$$\begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \vdots \\ a^{(2^n)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & H & \\ & & \end{bmatrix}_{2^n}}_{\boldsymbol{H}-\text{希尔维斯特Hadamard矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}_{2^n}}_{\boldsymbol{D}\text{–对角阵}}$$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}_{2^n} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 为希尔维斯特 Hadamard 矩阵，它的元素由$c_0x_0 \oplus c_1x_1 \oplus \cdots \oplus c_{n-1}x_{n-1}$确定，当$(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$取值遍历(0,0,⋯,0)到 (1,1,⋯,1)的所有值时，可依次得到 $\boldsymbol{H}$ 的每一行。$\boldsymbol{D}$ 为一对角阵，它的元素由$x_{k_0}x_{k_1} \oplus x_{k_1}x_{k_2} \oplus \cdots \oplus x_{k_{n-2}}x_{k_{n-1}}$确定，当$(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ 取值遍历(0,0,⋯,0)到 (1,1,⋯,1)的所有值时，依次得到 $\boldsymbol{D}$ 的对角线上的各个元素。运用式(9)，一次可以同时得到 2^n 个子序列 $\boldsymbol{a}$，由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 2^n 行$\{a^{(i)}; 1 \leqslant i \leqslant 2^n\}$表示。基于以上分析，由于 Hadamard 矩阵可以用于格雷对的构造，当涉及到格雷对生成器的硬件实现时，可以运用 Hadamard 矩阵分解来简化生成器。

基于式(8)和式(9)，通过选择不同的参数$(k_0, k_1, \cdots, k_{n-1})$，$c_k$和 w，格雷对$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$及其子序列的 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的个数计算如下：

$$\left.\begin{aligned} \#a &= 2^n \cdot \frac{n!}{2} \cdot 2 = n! \cdot 2^n \\ \#b &= \#a * 2^2 = n! \cdot 2^{n+2} \\ \#(a,b) &= n! \cdot 2^{n+2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中$\#a$，$\#b$，$\#(a,b)$分别表示 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 和$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$的个数。因此，长度为 2^n 的格雷对的总数为$n! \cdot 2^{n+2}$。

举例：设 $N=2^2$, $f_a(\boldsymbol{x})$中 w 取值为 1，$f_b(\boldsymbol{x})$ 中 w 取值为 0，那么

$$f_a(\boldsymbol{x}) = x_0x_1 \oplus c_0x_0 \oplus c_1x_1 \oplus 1, f_b(\boldsymbol{x}) = f_a(\boldsymbol{x}) \oplus \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{Bmatrix}$$

得表 2 和表 3。从表 2 和表 3 可以得到长度为 8 的格雷对有(1110，1011)，(1110，1101)，(1011，1110)，(1011，1000)，(1101，1000)，(1101，1000)，(1000，1101)，(1000，1011)。 通过改变$f_a(\boldsymbol{x})$和$f_b(\boldsymbol{x})$中的参数 w，可以得到另外 24 个长度为 8 的格雷对，

表 2

x_1	x_0	x_0x_1	c_0=0, c_1=0 $c_0\ x_0\oplus c_1x_1$	$fa()$	c_0=1, c_1=0 $c_0\ x_0\oplus c_1x_1$	$fa()$	c_0=0, c_1=1 $c_0\ x_0\oplus c_1x_1$	$fa()$	c_0=1, c_1=1 $c_0\ x_0\oplus c_1x_1$	$fa()$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0

表 3

c_0=0, c_1=0 $fa()$	$fa()\oplus x_0$	$fa()\oplus x_1$	c_0=1, c_1=0 $fa()$	$fa()\oplus x_0$	$fa()\oplus x_1$	c_0=0, c_1=1 $fa()$	$fa()\oplus x_0$	$fa()\oplus x_1$	c_0=1, c_1=1 $fa()$	$fa()\oplus x_0$	$fa()\oplus x_1$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1

注意 $f_a(\boldsymbol{x})$ 和 $f_b(\boldsymbol{x})$ 中的参数 w 可以取不同的值。长度为 8 的格雷对的总数为 32。格雷对和 Hadamard 矩阵的关系也可以从下面的例子得到说明。

$$\begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \\ a^{(4)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}}_{c_0\ x_0\oplus c_1x_1} \underbrace{\begin{bmatrix} + & & & \\ & - & & \\ & & - & \\ & & & + \end{bmatrix}}_{x_0x_1} = \begin{bmatrix} + & + & + & - \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & - & - & - \end{bmatrix}$$

其中采用的映射规则是(0−>+，1−>−)。

4 格雷对伴的生成函数

对任意给定的格雷对($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$)，已有文献证明存在且仅存在两个伴，表示如下

$$(\tilde{b},\tilde{\overline{a}})\ \text{ and }\ (\tilde{\overline{b}},\tilde{a}) \tag{11}$$

其中“~”表示逆序操作，“−”表示求反操作。设 $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$，那么 $\overline{a}=(\overline{a}_0,\overline{a}_1,\cdots,\overline{a}_{n-1})$，$\tilde{a}=(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0)$。$\boldsymbol{a}$ 的生成函数可由式(8)得到，表示如下:

$$\begin{aligned} f_a(\overline{x}) &= x_{k_0}x_{k_1}\oplus x_{k_1}x_{k_2}\oplus\cdots\oplus x_{k_{n-2}}x_{k_{n-1}} \\ &\quad \oplus c_0x_0\oplus c_1x_1\oplus\cdots\oplus c_{n-1}x_{n-1}\oplus w \end{aligned}$$

$\overline{a}$ 和 $\tilde{a}$ 的生成函数表示如下:

$$f_{-a}(\overline{x}) = f_a(\overline{x})\oplus 1 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_{\tilde{a}}(\overline{x}) &= f_a(\overline{x}_0\overline{x}_1\cdots\overline{x}_{n-1}) = \overline{x}_{k_0}\overline{x}_{k_1}\oplus\overline{x}_{k_1}\overline{x}_{k_2}\oplus\cdots \\ &\quad \oplus\overline{x}_{k_{n-2}}\overline{x}_{k_{n-1}}\oplus c_0\overline{x}_0\oplus c_1\overline{x}_1\oplus\cdots\oplus c_{n-1}\overline{x}_{n-1}\oplus w \\ &= x_{k_0}x_{k_1}\oplus x_{k_1}x_{k_2}\oplus\cdots\oplus x_{k_{n-2}}x_{k_{n-1}}\oplus c_0x_0\oplus c_1x_1 \\ &\quad \oplus\cdots\oplus c_{n-1}x_{n-1}\oplus wc_0\oplus c_1\oplus\cdots\oplus c_{n-1} \\ &\quad \oplus(n-1)_{\mathrm{mod}\,2} \\ &= f_a(\overline{x})\oplus c_0\oplus c_1\oplus\cdots\oplus c_{n-1}\oplus(n-1)_{\mathrm{mod}\,2} \end{aligned} \tag{13}$$

因此，基于式(11)−式(13)，可以得到互补对伴的生成函数。

举例：设 (a,b)=(1000,0010)，那么 $(\tilde{b},\tilde{\overline{a}})=(0100,1110)$，$(\tilde{\overline{b}},\tilde{a})=(1011,0001)$。可以验证 (a,b) 和 $(\tilde{b},\tilde{\overline{a}})$ 互为伴，(a,b) 和 $(\tilde{\overline{b}},\tilde{a})$ 也互为伴。

5 结论

本文从传统的格雷对构造方法交织和级联出发，提出了一种新的称之为生成函数的格雷对构造方法，可以构造长度为 2^n 的格雷对及其对应的伴。生成函数不仅可以产生格雷对，而且能产生对应长度的所有格雷对，这是生成函数的一大优点。格雷对生成函数还有助于分析获得与格雷对密切相关的序列，诸如互补序列集，Z 互补序列[13]的生成函数。本文还分析了格雷对生成函数和希尔维斯特 Hadamard 矩阵之间的关系，这不仅有利于计算格雷对的总数，而且有利于简化格雷生成器的硬件实现。格雷对生成函数由二进制向量，与和或逻辑运算组成，大大地方便了序列生成器的硬件实现。

参 考 文 献

[1] Fan Ping-zhi and Darnell M. Sequence Design for Communications Applications[M]. New York: Wiley, 1996, Chapter 13.

[2] Oolun M K. Electrical systems identification using Golay complementary series[J]. *IEE Proceedings-Science, Measurement and Technology*, 1997, 144(6): 267–272.

[3] Davis A J and Jedwab J. Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences, and Reed-Muller codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 45(7): 2397–2417.

[4] Ana V A, Manuel G S, and Inigo C. Improvement of wideband radio channel swept time-delay cross-correlation sounders by using Golay sequences[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2007, 56(1): 362–368.

[5] Groenewald J M and Maharai B T. MIMO channel synchronization using Golay complementary pairs[C]. AFRICON, Windhoek, 2007, 1–5.

[6] Shin Q S, Kung H T, and Tarokh V. Construction of block orthogonal Golay sequences and application to channel

estimation of MIMO-OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2008, 56(1): 27–31.

[7] Wang H M, Gao X Q, Jiang B, You X H, and Hong W. Efficient MIMO channel estimation using complementary sequences[J]. *IET Communications*, 2007, 1(5): 962–969.

[8] Li Ying and Chu Wen-bin. More Golay sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(3): 1141–1145.

[9] Rathinakumar A and Chaturvedi A K. Complete mutually orthogonal Golay complementary sets from Reed-Muller codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(3): 1339–1346.

[10] Lee M and Kaveh M. Fast Hadamard transform based on a simple matrix factorization[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1986, 34(6): 1666–1667.

[11] Tseng C C. Eigenvector and fractionalization of discrete Hadamard transform[C]. IEEE International Symposium On Circuits and Systems, IEEE Press, New Orleans, 2007, 2307–2310.

[12] Takatsukasa K, Matsufuji S, and Tanada Y. Formalization of binary sequence sets with zero correlation zone[J]. *IEICE Transactions on Fundmentals*, 2004, 87(4): 887–891.

[13] Fan Ping-zhi, Yuan Wei-na, and Tu Yi-feng. Z-complementary binary set[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(2): 509–512.

涂宜锋：　男，1978 年生，博士生，研究方向为多址接入方案设计、序列构造及应用.

松藤信哉：男，1955 年生，教授，主要研究方向为序列设计及应用.

范平志：　男，1955 年生，教授，主要研究方向为序列设计及应用、编码与调制、多址接入方案设计.

李旭东：　男，1973 年生，副教授，研究方向为序列设计及应用.