

一类易于VLSI实现的对称双正交小波设计方法研究

张池军^{①③} 彭安金^② 王厚军^① 李本亮^①

^①(电子科技大学自动化工程学院 成都 610054)

^②(西南民族大学电气与信息工程学院 成都 610041)

^③(中国人民解放军95989部队 北京 100076)

摘要: 该文提出了一类对称双正交小波的设计方法。该类双正交小波的小波滤波器组具有格形结构, 实现该小波变换的分析滤波器组和综合滤波器组满足双正交条件和正则性条件, 且设计的各滤波器均为实数二进制系数, 因而该小波变换易于高速VLSI实现。文中的理论推导和设计实例, 均验证了该设计方法的有效性。

关键词: 对称双正交小波; 格形结构; 双正交滤波器组; 线性相位

中图分类号: TN713

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)04-0973-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00532

The Design Method of a Class of Symmetric Biorthogonal Wavelets Suitable for VLSI Implementation

Zhang Chi-jun^{①③} Peng An-jin^② Wang Hou-jun^① Li Ben-liang^①

^①(School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

^②(School of Electrical and Information Engineering, Southwest University for Nationalities, Chengdu 610041, China)

^③(The 95989 Unit of PLA, Beijing 100076, China)

Abstract: The design method of a class of symmetric biorthogonal wavelets is proposed in this paper. The filter banks of the wavelets possess lattice structure, the analysis and synthesis filter banks for wavelets meet biorthogonality and regularly conditions, and the filters are all real binary coefficients. Therefore, the wavelet transform is suitable for high-speed VLSI implementation. Both the mathematical derivations and the design examples in the paper verify the effectiveness of proposed method.

Key words: Symmetric biorthogonal wavelets; Lattice structure; Biorthogonal filter banks; Linear phase

1 引言

小波变换在图像处理, 信号与信息处理, 地震勘探, 电力系统, 生物医学以及军事领域具有广阔的应用前景。而完成小波变换的前提是找到合适的小波基, 因此小波基的构造方法一直是小波理论研究的热点。Daubechies 构造了紧支正交小波基^[1], 尽管该小波基在信号处理领域得到了广泛应用, 但紧支集的正交小波, 除Haar小波外都是非对称的。要获得对称小波, 就必须使小波滤波器具有线性相位, 故必须放弃小波的正交性, 选择双正交性^[1,2]。Vetterli 等研究了线性相位的理想重建滤波器组(Linear Phase Perfect Reconstruction Filter Banks(LPFRFB)) 和双正交小波基的关系^[2], 并提出了用LPFRFB构造双正交小波基的方法, 尤其对双正交小波的实系数FIR滤波器的对称性与长度选

取方法进行了讨论。文献[3]设计了一种小波滤波器组为梯形结构的小波, 其小波滤波器具有线性相位和实数二进制系数, 小波变换易于VLSI实现, 但其设计方法不易控制小波滤波器的阶数。文献[4]提出了一种小波滤波器组具有格形结构的小波, 但其小波滤波器不具有线性相位。深入分析发现: 这是由于采用了格形结构的缘故, 而是格形结构中滤波器的设计方法原因。国内学者对双正交小波的工程应用进行了探索^[5], 也有学者对双正交小波滤波器设计开展了研究^[6], 但未见有文献报道在构成小波的滤波器组结构方面出现突破。为此, 本文在格形滤波器组的基础上, 找到了格形结构中滤波器的另外一种设计方法, 进而提出了一类小波滤波器组为格形结构的对称双正交小波的设计方法。该设计方法在算法上保证了格形小波滤波器组的线性相位和实数二进制系数(即 $k/2^n$, 其中 k, n 均为整数)。故该类小波的变换仅用移位寄存器和累加器就可完成, 因而易于高速VLSI实现。当然, 在实时性要求不苛刻时, 该类小波变换更适合微控制器的软件实现。

2009-04-13 收到, 2009-10-16 改回

国家部委基金(A1420061264)和国家自然科学基金(60673011)资助课题

通信作者: 张池军 zcj1120@163.com

2 对称双正交小波与两通道的LPPRFB

双正交小波有两个互为对偶的尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\check{\phi}(t)$, 有两个互为对偶的小波函数 $\psi(t)$ 和 $\check{\psi}(t)$, 其尺度函数方程和小波函数方程如下:

$$\check{\phi}(t) = 2 \sum_{n=0}^{-(N_0-1)} h_0(-n) \check{\phi}(2t-n) \quad (1)$$

$$\phi(t) = 2 \sum_{n=0}^{N_1-1} f_0(n) \phi(2t-n) \quad (2)$$

$$\check{\psi}(t) = 2 \sum_{n=0}^{-(N_1-1)} h_1(-n) \check{\phi}(2t-n) \quad (3)$$

$$\psi(t) = 2 \sum_{n=0}^{N_0-1} f_1(n) \phi(2t-n) \quad (4)$$

其中 $h_0(-n)$ 和 $h_1(-n)$ 分别为 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 的时间反转; $h_0(n)$ 和 $f_0(n)$ 是低通滤波器, 长度分别为 N_0 和 N_1 ; $h_1(n)$ 和 $f_1(n)$ 为高通滤波器, 长度分别为 N_1 和 N_0 。如果 $f_0(k) = h_0(-k)$, $f_1(k) = h_1(-k)$, 则 $\phi(t) = \check{\phi}(t)$, $\psi(t) = \check{\psi}(t)$, 显然, 双正交小波包含正交小波, 但正交小波除 Harr 小波外, 不具有线性相位, 故本文不做讨论。就多速率滤波器组而言, $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 可构成分析滤波器组, 而 $f_0(n)$ 和 $f_1(n)$ 则构成综合滤波器组, 二者可构成两通道的多速率滤波器组 (Filter banks, FB), 本文称之为小波滤波器组。文献[2,7,8]对小波滤波器组与两通道 LPPRFB 进行了研究, 结果表明: 对称双正交小波的小波滤波器组是一类特殊两通道 LPPRFB, 即除了满足线性相位和 PR(perfect reconstruction)特性外, 还必须满足正则性(regularity)。下面先分析两通道 LPPRFB 的 PR 特性, 然后讨论对称双正交小波的正则性。

2.1 两通道的LPPRFB的PR特性分析

两通道的LPPRFB由分析滤波器组 $H_k(z)$, 抽取器, 0值内插器和综合滤波器组 $F_k(z)$ 构成, 其结构如图1所示。

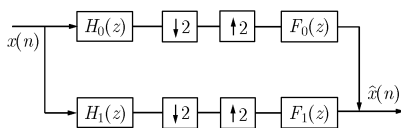


图1 两通道的LPPRFB的结构

两通道的LPPRFB的PR特性可表示为

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z^{-n_c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中 n_c 为奇数。显然式(5)包含了滤波器系数 $h_0(n)$, $h_1(n)$, $f_0(n)$, $f_1(n)$, 但这些滤波器系数间有何种联系? 为了寻求滤波器系数 $h_0(n)$, $h_1(n)$, $f_0(n)$, $f_1(n)$ 间的关系, 根据式(5)可选取 $F_0(z)$ 、 $F_1(z)$ 为

$$F_0(z) = -H_1(-z) \quad (6)$$

$$F_1(z) = H_0(-z) \quad (7)$$

由式(5)-式(7)得

$$H_0(-z)H_1(z) - H_1(-z)H_0(z) = 2z^{-n_c} \quad (8)$$

两通道 LPPRFB 的设计, 可归结为根据式(8), 寻求满足设计要求的 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 。

2.2 对称双正交小波的正则性分析

小波变换将信号分解成小波系数, 而小波的正则性则有利于小波系数更好地表示信号。小波的正则性是对尺度函数 $\phi(t)$ 的“光滑性”要求, 它可用 $\phi(t)$ 的连续性及其导数的连续性定义。该正则性与两通道LPPRFB的PR特性无关, 但由低通滤波器 $c(n)$ 迭代产生的尺度函数

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} c(n) \phi(2t-n) \quad (9)$$

对 $c(n)$ 的正则性要求可表示为两个约束条件^[9,10]:

(1) 归一化条件 将式(9)两端积分后即可得归一化条件为

$$\sum_{n=0}^{N-1} c(n) = 1 \quad (10)$$

(2) $C(z)$ 在 $z = -1$ 处有零点 $c(n)$ 的 Z 变换 $C(z)$ 在 $z = -1$ 处有零点, 对尺度函数 $\phi(t)$ 的连续性及其导数的连续性很有必要。但对正则性而言, 并不是 $C(z)$ 在 $z = -1$ 的零点越多, 正则性越好(正则性阶数越高)。但 $C(z)$ 最好在 $z = -1$ 处至少有 3 个零点^[9]。

上述分析表明: 对称双正交小波的设计, 从多速率滤波器组的角度而言, 就是设计具有正则性的两通道LPPRFB。

3 格形双正交滤波器组

文献[4]中提出了一类格形双正交滤波器组, 其结构如图2所示。图中 $H_0(z)$, $H_1(z)$, $F_0(z)$, $F_1(z)$ 为小波滤波器; $T_0(z)$, $T_1(z)$, $R_0(z)$, $R_1(z)$ 为传输滤波器; $L_0(z)$, $L_1(z)$, $W_0(z)$, $W_1(z)$ 为交叉格形滤波器。文献[4]的思想是采用格形网络来改善小波滤波器的选频特性。

本文的目的是研究小波滤波器组具有格形网络结构的一类对称双正交小波设计方法。选择 $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = z^{-1}$, $F_0(z) = z^{-1}$, $F_1(z) = 1$, 并将图2等效成图1结构, 则对应的等效滤波器为

$$\hat{H}_0(z) = T_0(z^2) + z^{-1}L_0(z^2) \quad (11)$$

$$\hat{H}_1(z) = L_1(z^2) + z^{-1}T_1(z^2) \quad (12)$$

$$\hat{F}_0(z) = W_1(z^2) + z^{-1}R_0(z^2) \quad (13)$$

$$\hat{F}_1(z) = R_1(z^2) + z^{-1}W_0(z^2) \quad (14)$$

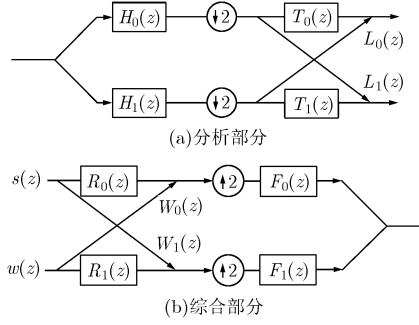


图 2 格形双正交滤波器组的结构

由于等效滤波器也应满足式(6)和式(7), 由式(11)-式(14), 可得

$$\left. \begin{aligned} R_0(z^2) &= T_1(z^2) \\ R_1(z^2) &= T_0(z^2) \\ W_0(z^2) &= -L_0(z^2) \\ W_1(z^2) &= -L_1(z^2) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)表明, 只要求得 $T_0(z^2)$, $T_1(z^2)$, $L_0(z^2)$, $L_1(z^2)$, 则综合部分(即图 2 中(b))的格形结构便可确定。但关键是如何求得 $T_0(z^2)$, $T_1(z^2)$, $L_0(z^2)$, $L_1(z^2)$?

根据式(8), 式(11), 式(12)可得

$$T_0(z)T_1(z) - L_0(z)L_1(z) = z^{-k} \quad (16)$$

其中 k 为正整数。显然式(16)就是格形双正交滤波器组的理想重构条件。文献[4]设计的小波滤波器不具有线性相位, 其重要原因是将式(16)中 $T_0(z^2)$, $T_1(z^2)$, $L_0(z^2)$, $L_1(z^2)$ 进一步约束为 $L_0(z) = T_1(-z)$ 和 $L_1(z) = T_0(-z)$ 所致。故本文对此做出改进, 放弃该约束条件, 根据式(16)用代数方法直接求解。

4 格形对称双正交小波的设计

4.1 格形对称双正交小波的设计方法

小波滤波器组具有格形结构的双正交小波, 本文称之为格形双正交小波。格形双正交小波的设计, 其实可以归结为设计具有正则性的格形双正交滤波器组, 即设计的格形双正交滤波器组要同时满足正则性条件和PR条件。等效低通滤波器 $\hat{h}_0(n)$ 和 $\hat{f}_0(n)$ 要满足的正则性条件分别为

(1) $\hat{h}_0(n)$ 的正则性条件:

$$\sum_{n=0}^{\hat{N}_0-1} (-1)^n n^m \hat{h}_0(n) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p-1 \quad (17)$$

其中 \hat{N}_0 为 $\hat{h}_0(n)$ 的长度, p 为整数, 它表示 $\hat{H}_0(z)$ 在 $z=-1$ 处的零点个数。

(2) $\hat{f}_0(n)$ 的正则性条件:

$$\sum_{n=0}^{\hat{N}_0-1} n^m \hat{h}_1(n) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p-1 \quad (18)$$

显然 $\hat{F}_0(z)$ 在 $z=-1$ 处的 $p-1$ 阶零点与 $\hat{H}_1(z)$ 在 $z=1$ 处的 $p-1$ 阶零点等价。有了上述正则性条件式(17)、式(18)和 PR 条件式(16), 就可以设计格形对称双正交小波。具体设计步骤如下:

- (1) 根据 $N_1 = N_0 + 4k$ (k 为整数), 确定 $\hat{h}_0(n)$ 和 $\hat{h}_1(n)$ 的长度;
- (2) 根据 $\hat{h}_0(n)$ 和 $\hat{h}_1(n)$ 的长度确定 $t_0(n)$, $t_1(n)$, $l_0(n)$, $l_1(n)$ 的长度, 根据 $\hat{h}_0(n)$ 和 $\hat{h}_1(n)$ 的对称性(奇对称或偶对称), 找到 $t_0(n)$, $t_1(n)$, $l_0(n)$, $l_1(n)$ 系数之间的关系;
- (3) 根据式(16)得到 $(N_0 + N_1)/4$ 个方程;
- (4) 根据 $\hat{H}_0(z=i) = \hat{H}_1(z=i)$ 得到 1 个方程;
- (5) 根据 $\sum_{n=0}^{N_0} h(n) = 2$ 得到 1 个方程;
- (6) 根据式(17), 式(18)得到若干方程;
- (7) 用 MATLAB 的符号变量表示所有方程, 然后用 solve() 函数求解。

4.2 格形对称双正交小波的设计实例

设计实例中, “SE AE $N_0 N_1$ ” 表示 $\hat{h}_0(n)$ 和 $\hat{h}_1(n)$ 的类型分别为 SE(偶对称, 偶长度) 和 AE(奇对称, 偶长度), 长度分别为 N_0 和 N_1 。

设计实例 1 设计 SE AE 6 10 类型小波。

- (1) $\hat{h}_0(n)$ 和 $\hat{h}_1(n)$ 的长度分别为 6, 10, 类型分别为 SE, AE;
- (2) 根据 $\hat{h}_0(n)$ 和 $\hat{h}_1(n)$ 的长度确定 $t_0(n)$, $t_1(n)$, $l_0(n)$, $l_1(n)$ 的长度均分别为 3, 5, 3, 5, 并用符号设定各滤波器的系数向量为

$$\left. \begin{aligned} t_0(n) &= [a_0, a_1, a_2] \\ t_1(n) &= [b_0, b_1, b_2, b_3, b_4] \\ l_0(n) &= [c_0, c_1, c_2] \\ l_1(n) &= [d_0, d_1, d_2, d_3, d_4] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

根据 $\hat{h}_0(n)$ 和 $\hat{h}_1(n)$ 的对称性分别可得

$$\left. \begin{aligned} [a_0, a_1, a_2] &= [c_2, c_1, c_0] \\ [d_0, d_1, d_2, d_3, d_4] &= [-b_4, -b_3, -b_2, -b_1, -b_0] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(20)表明向量 \mathbf{a} 由向量 \mathbf{c} 表示, 向量 \mathbf{d} 由向量 \mathbf{b} 表示, 显然要求解的未知量减少到 $(N_0 + N_1)/2$ 个。由式(11), 式(12), 式(19), 式(20)可得

$$\left. \begin{aligned} \hat{h}_0(n) &= [c_2, c_0, c_1, c_1, c_0, c_2] \\ \hat{h}_1(n) &= [-b_4, b_0, -b_3, b_1, -b_2, b_2, -b_1, b_3, -b_0, b_4] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(3) 根据式(16), 式(19), 式(20)式得到 $(N_0 + N_1)/4$ 个方程:

$$\left. \begin{aligned} c_2 b_0 + c_0 b_4 &= 0 \\ c_2 b_1 + c_1 b_0 + c_0 b_3 + c_1 b_4 &= 0 \\ c_2 b_2 + c_1 b_1 + c_0 b_0 + c_0 b_2 + c_1 b_3 + c_2 b_4 &= 0 \\ c_2 b_3 + c_1 b_2 + c_0 b_1 + c_0 b_1 + c_1 b_2 + c_2 b_3 &= -2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(4)根据 $\widehat{H}_0(z=i) = \widehat{H}_1(z=i)$ 得到1个方程:

$$-b_4 + b_3 - b_2 + b_1 - b_0 + c_2 - c_1 + c_0 = 0 \quad (23)$$

(5)根据 $\sum_{n=0}^{N_0} h(n) = 2$, 由式(21)得

$$c_2 + c_1 + c_0 = 1 \quad (24)$$

(6)根据式(17), 式(18)得到2个方程;

$$\left. \begin{aligned} 3c_0 - c_1 - 5c_2 &= 0 \\ -7b_0 - 3b_1 + b_2 + 5b_3 + 9b_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(7)用 MATLAB 的符号变量表示所有方程, 然后用 solve() 函数求解得

$$t_0(n) = [-1/8, 1, 1/8];$$

$$t_1(n) = [-1/64, -1/8, -31/32, 1/8, -1/64];$$

$$l_0(n) = [1/8, 1, -1/8];$$

$$l_1(n) = [1/64, -1/8, 31/32, 1/8, 1/64];$$

$$\hat{h}_0(n) = [-1/8, 1/8, 1, 1, 1/8, -1/8];$$

$$\hat{h}_1(n) = [1/64, -1/64, -1/8, -1/8, 31/32, -31/32,$$

$$1/8, 1/8, 1/64, -1/64];$$

$$\hat{f}_0(n) = [1/64, 1/64, -1/8, 1/8, 31/32, 31/32,$$

$$1/8, -1/8, 1/64, 1/64];$$

$$\hat{f}_1(n) = [1/8, 1/8, -1, 1, -1/8, -1/8].$$

用 MATLAB 小波工具箱中的 bswfun() 函数得到尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$, 小波函数 $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ 如图3, 图4所示。

从图3和图4中可以看出, 设计的对称双正交小波的分析尺度函数和小波函数其光滑性较好, $\widehat{H}_0(z)$ 在 $z=-1$ 处有3个零点。综合尺度函数和小波函数光滑

性也较好, $\widehat{F}_0(z)$ 在 $z=-1$ 处也有3个零点。

设计实例2 设计 SE AE 8 12 类型小波求解过程不再详述, 得到解为

$$t_0(n) = [1/16, 1/16, 15/16, -1/16];$$

$$t_1(n) = [-1/128, 23/128, -67/64, -11/64, 7/128, -1/128];$$

$$l_0(n) = [-1/16, 15/16, 1/16, 1/16];$$

$$l_1(n) = [1/128, -7/128, 11/64, 67/64, -23/128, 1/128].$$

用 MATLAB 小波工具箱中的 bswfun() 函数得到尺度函数 $\phi(t)$ 和 $\tilde{\phi}(t)$, 小波函数 $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ 如图5, 图6所示。

图5和图6表明, 无论综合尺度函数和小波函数, 还是分析尺度函数和小波函数, 光滑性都好, 而且 $\widehat{F}_0(z)$ 和 $\widehat{H}_0(z)$ 在 $z=-1$ 处, 零点数目均超过3。

5 结论

本文从多速率滤波器组的角度, 提出了一类易于 VLSI 实现的格形对称双正交小波的设计方法。该方法选择小波滤波器组具有图2所示的格形结构, 设计的双正交滤波器组同时满足正则性条件和 PR 条件。在求解方法上保证了格形对称双正交小波滤波器的线性相位和小波滤波器的实数二进制系数。很明显, 由于该方法设计的小波具有上述特性, 因而易于 VLSI 实现, 具有较好的工程实用价值和应用前景。

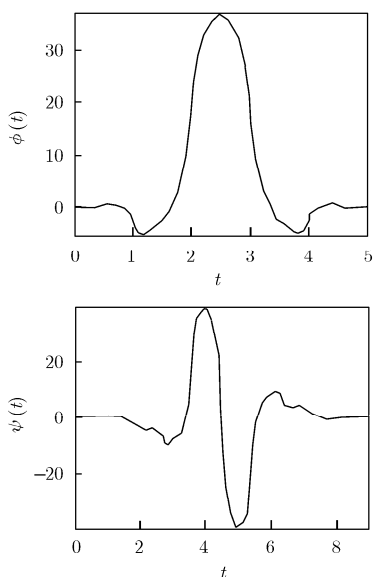


图3 分析尺度函数和小波函数

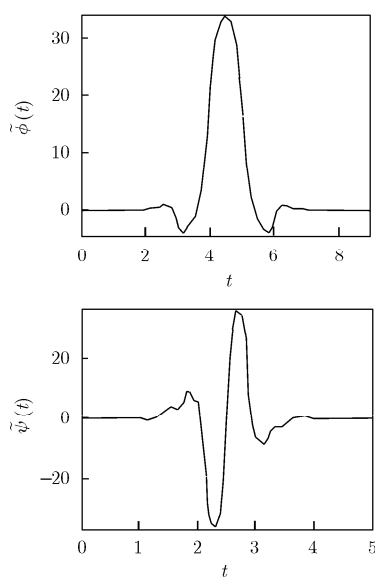


图4 综合尺度函数和小波函数

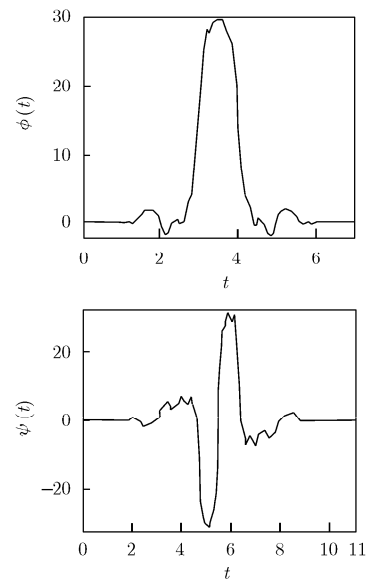


图5 分析尺度函数和小波函数

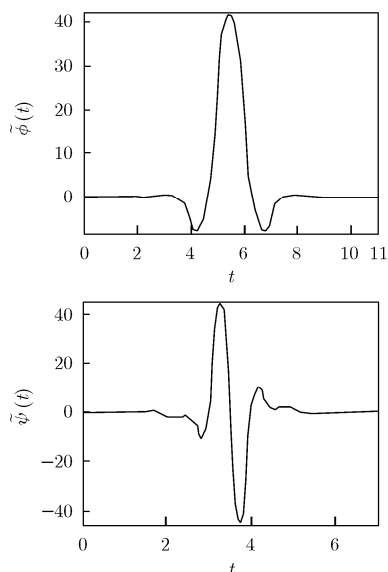


图6 综合尺度函数和小波函数

参考文献

- [1] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, 1988, 41: 909-996.
- [2] Vetterli M and Herley C. Wavelets and filter banks : Theory and Design [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(9): 2207-2232.
- [3] Olkkonen H, Olkkonen J T, and Pesola P. Efficient lifting wavelet transform for microprocessor and VLSI applications[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(2): 120-122.
- [4] Olkkonen H and Olkkonen J T. Discrete lattice wavelet transform [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2007, 54(1): 71-75.
- [5] 赵秀影, 任志茹等. 航空图像压缩的双正交小波滤波器整数化设计[J]. *光电与控制*, 2008, 15(5): 24-27.
- Zhao Xiu-ying and Ren Zhi-ru. Design of integral biorthogonal wavelet filter for aviation image compression[J]. *Electronics Optics & Control*, 2008, 15(5): 24-27.
- [6] 李岚, 安军龙. 双正交小波滤波器的构造[J]. *西安文理学院学报(自然科学版)*, 2008, 11(3): 28-30.
- Li Lan and An Jun-long. Construction of six pairs of biorthogonal wavelet filters[J]. *Journal of Xi'an University of Arts & Science (Nat Sci Ed)*, 2008, 11(3): 28-30.
- [7] Mallat S G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989, 315(1): 69-87.
- [8] Cohen A, Daubechies I, and Feauveau J. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets[J]. *Communications on Pure & Applied Mathematics*, 1992, 45: 485-500.
- [9] Strang G and Nguyen T. *Wavelets and Filter Banks*. Cambridge, MA: Wellesley, 1996: 221-249.
- [10] Rioul O. Regular wavelets: A discrete-time approach [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3572-3579.

张池军: 男, 1963年生, 高级工程师, 博士生, 研究方向为现代信号处理、测试技术及仪器。

彭安金: 男, 1967年生, 博士, 副教授, 研究方向为多速率滤波器组理论、小波理论以及实时信号处理的应用研究。

王厚军: 男, 1961年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代信号处理、测试技术与仪器、故障诊断和预测等。

李本亮: 男, 1977年生, 博士生, 研究方向为测试技术及信号处理、无线传感器网络。