

## 一种新的二维角度估计的高分辨算法

杨雪亚 陈伯孝

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 该文针对常规 2 维波达方向估计的高分辨算法运算量大和稳健性差等问题, 提出了一种新的 2 维角度估计的高分辨方法。该方法首先建立基于范数约束的最优化问题的目标函数; 然后用迭代算法沿均匀面阵接收数据的方位向求最小化目标函数的稀疏解, 得到方位、俯仰角耦合的空间角频率, 并分离信号; 最后对每个分离的信号, 沿面阵俯仰向求稀疏解, 得到信号的俯仰角, 进而求得对应的方位角。针对算法存在测角盲区的问题, 提出了一种改进方法, 通过求解空间 2 维稀疏解得到信号的 2 维角度。与传统的高分辨算法相比, 该方法对信噪比和快拍数要求不高、无需特征值分解和多维搜索过程, 具有较高的分辨力和极低的旁瓣电平。

**关键词:** 波达方向; 稀疏解; 均匀平面阵; 迭代算法

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2010)04-0953-06

**DOI:** 10.3724/SP.J.1146.2009.00515

## A High-Resolution Method for 2D DOA Estimation

Yang Xue-ya Chen Bai-xiao

(National Key Lab for Radar Signal Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

**Abstract:** A high-resolution algorithm for 2D DOA estimation is proposed to reduce the computational complexity of traditional high-resolution methods. The objective function of the optimization issue based on norm constraint is developed firstly. Then the sparse solution corresponding to the received data along the azimuth dimension is deduced by solving the minimization problem using the iteration algorithm, then it is used to obtain the angular frequencies in which azimuth and elevation angles are coupled, and signals of different angular frequencies are separated. Finally, the sparse solution relating to each signal is obtained to get the elevation angle and then compute the corresponding azimuth angle. A modified method is presented to overcome the blind angular region problem occurred in the algorithm. Compared with the traditional high-resolution methods, the proposed method has lower SNR threshold and simple procedure to achieve high precision with lower sidelobe level. Numerical simulation results verify the effectiveness of the method.

**Key words:** Direction Of Arrival (DOA); Sparse solution; Uniform planar array; Iteration algorithm

### 1 引言

波达方向(DOA)估计是阵列信号处理的研究热点, 在雷达、声纳、通信和医学成像等领域有着广泛应用。在信源定位时通常需要确定信号的 2 维到达角(方位角和俯仰角, 通常简称为 2D DOA<sup>[1]</sup>)。2 维到达角的估计方法包括最大似然<sup>[2,3]</sup>(ML)、加权子空间拟合<sup>[4]</sup>(WSF)等基于参数化的方法, 以及 2 维 ESPRIT<sup>[5]</sup>, MUSIC<sup>[6]</sup>等特征子空间类方法。ML 等参数化方法是一种渐近无偏估计, 能逼近克拉美罗下界。然而这类方法通常需要全局极值的多维搜索, 计算量随着目标个数的增加呈指数增长, 无法满足实时处理。波束空间处理<sup>[7]</sup>通过线性变换把阵元空间合成一个或几个波束, 能有效地降低运算量。然而波束空间处理仍然是多维搜索过程, 并且引入的变

换误差会降低超分辨算法的性能。子空间类方法是一种实际可行的次优估计方法, 不过这类算法通常具有较高的信噪比门限并需要较多的采样快拍, 同时对于 2 维面阵来说, 特征值分解的运算量仍然很大。对于相关或多径信号, MUSIC 需要进行空间平滑实现解相关, 这样会造成阵列孔径的损失, Unitary ESPRIT 虽然不会损失阵列孔径, 但是只适用于两个相关源的情况, 并且需要进行两次特征值分解。

线性方程组的稀疏解广泛地应用于盲信号分离<sup>[8]</sup>、逆合成孔径雷达成像<sup>[9]</sup>、带限外推和谱估计<sup>[10]</sup>以及信号重构和分类<sup>[11,12]</sup>等问题中。Cotter<sup>[13]</sup>将求稀疏解问题应用于多向量的情况下, 综合利用多次快拍, 方便了实际应用。Malioutov<sup>[14]</sup>将其应用于基于均匀线阵的角度估计问题中, 并提出了一种基于接收数据奇异值分解的简化算法。结合稀疏解问题和 2 维 DFT, 本文提出了一种 2 维到达角估计的迭代算法。该方法依次沿面阵的方位维和俯仰维求稀疏

2009-04-10 收到, 2009-10-08 改回

教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-06-0856)和国家自然科学基金(60772068)资助课题

通信作者: 杨雪亚 xueya\_y@126.com

解, 等效地拓展了面阵的 2 维孔径, 大大提高了角度分辨力。并对算法进行了改进, 通过求空间 2 维稀疏解克服了算法存在的测角盲区问题。该方法具有较低的信噪比门限、无需多维搜索和特征值分解, 对于相关信号, 不需要去相关处理。仿真结果验证了该方法的有效性。

## 2 信号模型

考虑  $K$  个窄带平面波以 2 维角度  $\{(\theta_k, \phi_k), k = 1, 2, \dots, K\}$  入射到  $N_z$  行  $N_y$  列、在  $y-z$  平面垂直放置的均匀长方形面阵(URA)上, 其中,  $\theta_k$  和  $\phi_k$  分别为第  $k$  个信号的方位角和俯仰角。阵元沿水平、垂直方向的间距分别为  $d_y$  和  $d_z$ 。面阵的结构如图 1 所示, 若以  $O$  点为阵列的参考点, 则位于阵列  $n_z$  ( $1 \leq n_z \leq N_z$ ) 行  $n_y$  ( $1 \leq n_y \leq N_y$ ) 列的单元天线的接收信号可表示为

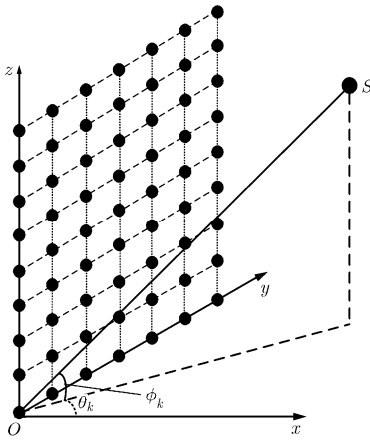


图 1 均匀平面阵结构图

$$x_{n_z, n_y}(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t) u_k^{n_y-1} v_k^{n_z-1} + n_{n_z, n_y}(t) \quad (1)$$

其中  $u_k = \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} d_y \sin(\theta_k) \cos(\phi_k)\right)$ ,  $v_k = \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} d_z \sin(\phi_k)\right)$  分别为  $d_y$  和  $d_z$  所引起的相位延迟信号,  $n_{n_z, n_y}(t)$  为与信号不相关的零均值复高斯白噪声。参考行(第 1 行)对第  $k$  个信号的导向矢量为  $\mathbf{a}_{yk} = [1 \ u_k \ u_k^2 \ \dots \ u_k^{N_y-1}]^T$ , 参考列(第 1 列)对第  $k$  个信号的导向矢量为  $\mathbf{a}_{zk} = [1 \ v_k \ v_k^2 \ \dots \ v_k^{N_z-1}]^T$ , 其中  $(\cdot)^T$  表示转置。面阵在  $t$  时刻接收的信号矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \sum_{k=1}^K (\mathbf{a}_{zk} \times \mathbf{a}_{yk}^T) s_k(t) + \mathbf{N}(t) \\ &= \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1N_y}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2N_y}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N_z1}(t) & x_{N_z2}(t) & \dots & x_{N_zN_y}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

## 3 2 维角度估计

### 3.1 基于 DFT 的 2 维角度估计

对于式(2)所示的阵列接收信号矩阵的任意一行, 如第  $n_z$  行的  $N_y$  个阵元数据, 通过补零将其拓展为  $M_y (> N_y)$  的序列, 然后对其做  $M_y$  点 DFT 得到  $\mathbf{y}$ , 结果如下:

$$y[m_y] = \sum_{n_y=1}^{M_y} x_{n_z, n_y}(t) e^{-j2\pi m_y (n_y-1)/M_y}, \quad -\frac{M_y}{2} \leq m_y \leq \frac{M_y}{2} - 1 \quad (3)$$

如果不考虑噪声, 将式(1)代入式(3)

$$y[m_y] = \sum_{k=1}^K s_k(t) v_k^{n_z-1} \sum_{n_y=1}^{M_y} u_k^{n_y-1} e^{-j2\pi m_y (n_y-1)/M_y} \quad (4)$$

将  $u_k$  代入式(4), 化简可得

$$y[m_y] = \sum_{k=1}^K T_{m_y, k} v_k^{n_z-1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} M_y d_y \sin(\theta_k) \cos(\phi_k) - \pi m_y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d_y \sin(\theta_k) \cos(\phi_k) - \frac{\pi}{M_y} m_y\right)} \quad (5)$$

其中  $T_{m_y, k} = s_k(t) e^{j\pi \frac{d_y}{\lambda} (M_y-1) \sin(\theta_k) \cos(\phi_k)} e^{-j\pi \left(\frac{m_y (M_y-1)}{M_y}\right)}$ 。

当  $\frac{\pi}{M_y} m_{y_k} = \frac{\pi}{\lambda} d_y \sin(\theta_k) \cos(\phi_k)$  时, 即

$$\sin(\theta_k) \cos(\phi_k) = \frac{\lambda m_{y_k}}{M_y d_y} \quad (6)$$

$|y|$  会在相应的位置  $m_{y_k}, k = 1, \dots, K$  处出现峰值, 对应的  $y[m_{y_k}]$  为  $r_{k, n_z} = M_y s_k(t) v_k^{n_z-1}$ 。对所有行信号均进行以上 DFT 变换, 分离信号并提取每个信号对应的 DFT 值, 然后对分离后的每个信号序列  $r_{k, n_z}, n_z = 1, \dots, N_z$  做  $M_z (> N_z)$  点的 DFT, 得到

$$\begin{aligned} z_k[m_z] &= \sum_{n_z=1}^{M_z} r_{k, n_z} e^{-j2\pi m_z (n_z-1)/M_z} \\ &= \sum_{k=1}^K S_{k, m_z} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} M_z d_z \sin(\phi_k) - \pi m_z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d_z \sin(\phi_k) - \frac{\pi}{M_z} m_z\right)}, \quad -\frac{M_z}{2} \leq m_z \leq \frac{M_z}{2} - 1 \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $S_{k, m_z} = M_y s_k(t) e^{j\pi \frac{d_z}{\lambda} (M_z-1) \sin(\phi_k)} e^{-j\pi \left(\frac{m_z (M_z-1)}{M_z}\right)}$ 。显然, 由  $|\mathbf{S}[k]|$  峰值处的  $m_{z_k}, k = 1, \dots, K$  可以得到第  $k$  个信号的仰角

$$\phi_k = \arcsin\left(\frac{\lambda m_{z_k}}{M_z d_z}\right) \quad (8)$$

其中  $\mathbf{S}[k]$  表示矩阵  $\mathbf{S}$  的第  $k$  行。将  $\phi_k$  代入式(15)中, 得到方位角为

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{\lambda m_{y_k}}{M_y d_y \cos(\phi_k)}\right) \quad (9)$$

然而, 通过将阵列数据补零由 DFT 计算信号的 2 维角度, 并不能有效地提高角度分辨力并抑制高旁瓣。下面使用基于约束条件下的稀疏解方法, 等效地将信号进行空域外推, 获得拓展信号所对应的 DFT, 提高角度分辨力并降低旁瓣电平。

### 3.2 用稀疏解估计 2 维角度

对于一个  $N \times L$  的信号矩阵  $\mathbf{B}$ , 求沿  $\mathbf{B}$  的列方向对应的稀疏解, 即是求解满足如下线性方程组的  $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{F}\mathbf{Y} + \mathbf{V} = \mathbf{B} \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{F}$  是一个  $N \times M$  的行满秩矩阵,  $\mathbf{Y}$  是一个  $M \times L$  的稀疏矩阵, 其每一列的大部分元素均为 0, 通常  $M \gg N$  以保证其稀疏性,  $\mathbf{V}$  是和  $\mathbf{Y}$  不相关的加性白噪声。

假设  $\mathbf{V}$  的每个元素均为独立同分布的高斯变量, 其方差为  $\sigma^2$ ,  $\mathbf{Y}$  的每个元素是服从广义高斯分布的变量<sup>[15]</sup>, 其广义方差为  $\beta$ 。 $\mathbf{Y}$  的最大后验估计是通过最小化如下的代价函数得到的

$$J(\mathbf{Y}) = \left[ \|\mathbf{F}\mathbf{Y} - \mathbf{B}\|_F^2 + \gamma E^{(p)}(\mathbf{Y}) \right] \quad (11)$$

其中  $\|\cdot\|_F$  表示 Frobenius 范数,  $E^{(p)}(\mathbf{Y}) = \sum_{m=1}^M \|\mathbf{Y}[m]\|_2^p$  为稀疏度的度量, 其中  $\gamma = \sigma^2/\beta^p$ , 介于 0 和 1 之间的参数  $p$  控制  $\mathbf{Y}$  的概率密度分布的形状。由  $E^{(p)}(\mathbf{Y})$  的表达式可见,  $\mathbf{Y}$  的列元素是通过  $l_{(p \leq 1)}$  范数结合的, 产生了稀疏性<sup>[14]</sup>, 而行元素是由 2 范数结合的, 没有稀疏效果, 等效地利用了  $L$  个快拍数据。

对  $J(\mathbf{Y})$  求导并令其等于 0, 得到求稀疏解  $\mathbf{Y}$ <sup>[13]</sup> 的迭代过程为

$$c_\mu[m] = \|\mathbf{Y}_\mu[m]\|_2 = \left( \sum_{l=1}^L |Y_\mu[m, l]|^2 \right)^{1/2} \quad (12)$$

$$\mathbf{W}_{\mu+1} = \text{diag}\left(c_\mu[m]^{1-(p/2)}\right), \quad m = 1, \dots, M \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_{W_{\mu+1}} = \mathbf{F}\mathbf{W}_{\mu+1} \quad (14)$$

$$\mathbf{Y}_{\mu+1} = \mathbf{W}_{\mu+1} \mathbf{F}_{W_{\mu+1}}^H \left[ \mathbf{F}_{W_{\mu+1}} \mathbf{F}_{W_{\mu+1}}^H + \kappa \mathbf{I}_N \right]^{-1} \mathbf{B} \quad (15)$$

其中下标  $\mu$  表示迭代次数。当收敛条件满足时, 如  $\frac{\|\mathbf{Y}_{\mu+1} - \mathbf{Y}_\mu\|_F}{\|\mathbf{Y}_\mu\|_F} < \delta$ , 迭代过程终止, 得到满足要求的稀疏解  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{\mu+1}$ , 本文取  $\delta = 0.01$ 。

这里将以上稀疏解应用于 2 维角度估计问题中, 首先, 由迭代算法求面阵的接收数据  $\mathbf{X}$  沿行方向稀疏解矩阵  $\mathbf{Y}$ , 等效地将阵列的每行阵元数从  $N_y$  拓展到  $M_y$ , 而其列方向没有稀疏效果。算法描述为

$$c_\mu[m_y] = \|\mathbf{Y}_\mu[m_y]\|_2 = \left( \sum_{n_z=1}^{N_z} |Y_\mu[m_y, n_z]|^2 \right)^{1/2} \quad (16)$$

$$\mathbf{W}_{\mu+1} = \text{diag}\left(c_\mu[m_y]^{1-(p/2)}\right), \quad m_y = 1, \dots, M_y \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_{W_{\mu+1}} = \mathbf{F}_y \mathbf{W}_{\mu+1} \quad (18)$$

$$\mathbf{Y}_{\mu+1} = \mathbf{W}_{\mu+1} \mathbf{F}_{W_{\mu+1}}^H \left[ \mathbf{F}_{W_{\mu+1}} \mathbf{F}_{W_{\mu+1}}^H + \kappa \mathbf{I}_{N_y} \right]^{-1} \mathbf{X}^T \quad (19)$$

其中  $\mathbf{F}_y$  是一个  $N_y \times M_y$  的 DFT 系数矩阵<sup>[16]</sup>, 其元素为  $F[n_y, m_y] = (1/M_y) \exp(j2\pi n_y m_y / M_y)$ 。迭代结束后得到的稀疏矩阵  $\mathbf{Y}$  对应于  $\mathbf{X}$  在范数约束下沿行方向拓展矩阵的 DFT。当  $\sin(\theta_k) \cos(\phi_k) = \lambda m_{y_k} / (M_y d_y)$ ,  $k = 1, \dots, K$  时,  $|\mathbf{Y}^{(n_z)}|$  会在  $m_{y_k}$  位置出现  $K$  个峰值, 其中  $\mathbf{Y}^{(n_z)}$  表示  $\mathbf{Y}$  的第  $n_z$  列。 $\sin(\theta_k) \cos(\phi_k)$  是  $\mathbf{Y}$  所有列  $\mathbf{Y}^{(n_z)}$ ,  $n_z = 1, \dots, N_z$  的所得结果的平均值。此时  $K$  个信号已经分离, 依次取出  $\mathbf{Y}[m_{y_k}, n_z]$  并组成一个  $N_z \times K$  的矩阵  $\mathbf{Y}_s$ , 其中  $\mathbf{Y}_s[n_z, k] = \mathbf{Y}[m_{y_k}, n_z]$ 。然后用迭代算法分别求  $\mathbf{Y}_s^{(k)}$  的稀疏解  $\mathbf{Z}^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, K$ 。

$$\mathbf{W}_{\mu+1} = \text{diag}\left(\|\mathbf{Z}[m_z, k]\|^{1-(p/2)}\right), \quad m_z = 1, \dots, M_z \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_{W_{\mu+1}} = \mathbf{F}_z \mathbf{W}_{\mu+1} \quad (21)$$

$$\mathbf{Z}_{\mu+1}^{(k)} = \mathbf{W}_{\mu+1} \mathbf{F}_{W_{\mu+1}}^H \left[ \mathbf{F}_{W_{\mu+1}} \mathbf{F}_{W_{\mu+1}}^H + \kappa \mathbf{I}_{N_z} \right]^{-1} \mathbf{Y}_s^{(k)} \quad (22)$$

其中  $\mathbf{F}_z$  是一个  $N_z \times M_z$  的 DFT 矩阵, 其元素为  $F[n_z, m_z] = (1/M_z) \exp(j2\pi n_z m_z / M_z)$ 。得到的稀疏矩阵  $\mathbf{Y}$  对应于  $\mathbf{Y}_s$  沿列方向空域拓展后的 DFT, 等效地将每列阵元数从  $N_z$  拓展到  $M_z$ 。同理, 由峰值处的  $m_{z_k}$ ,  $k = 1, \dots, K$  可以得到  $K$  个信号的仰角

$$\phi_k = \arcsin\left(\frac{\lambda m_{z_k}}{M_z d_z}\right) \quad (23)$$

将其代入已估计的  $\sin(\theta_k) \cos(\phi_k)$  中, 可得信号的方位角如式(9)所示。

通过最小化目标函数的迭代算法逐渐增强稀疏解中与信号相关的成分, 同时压低噪声分量, 最终的稀疏解在与信号相关的角度(角频率)处会出现明显的峰值, 而在其他区域则是近似为零的低电平。由于所用的系数矩阵  $\mathbf{F}_y$  (或  $\mathbf{F}_z$ ) 是一个 DFT 矩阵, 这样就把空间信号和其 DFT 联系起来, 类似于传统的波束形成方法。

在一定的角度范围内, 随着  $M_y$  和  $M_z$  的增大, 空间分辨力也会相应地提高, 但是超过一定的界限, 拟合效果变差, 导致算法性能下降。同时注意到, 随着比值  $d_y/\lambda$  或  $d_z/\lambda$  的提高, 栅格间距  $\lambda/(M_y d_y)$  和

$\lambda/(M_z d_z)$  会随之减小, 在细化角度单元间隔的同时也使无模糊的测角范围减小。实际中应该根据测角精度和测角范围的要求, 综合选择阵元间距  $d_y$  和  $d_z$  以达到最佳测角效果。

为了叙述方便, 以上仅考虑了阵列接收的单快拍数据。对于多快拍数据, 仅需要在求稀疏解之前将接收数据进行时间平均以消减噪声的影响, 其它处理过程完全一样。

### 3.3 测角盲区的改进算法

在得到阵列沿  $y$  轴方向的稀疏解  $\mathbf{Y}$  后, 如果  $\sin(\theta_{k_1}) \cos(\phi_{k_1}) = \sin(\theta_{k_2}) \cos(\phi_{k_2})$ ,  $1 \leq k_1, k_2 \leq K$ , 沿  $y$  轴的方位向无法分离信号  $k_1$  和  $k_2$  并提取  $\mathbf{Y}_s^{(k_1)}$  和  $\mathbf{Y}_s^{(k_2)}$  以估计信号的仰角。此时对应一个测角盲区, 当有任意的两个信号的 2 维角度处于测角盲区内时, 由稀疏解  $\mathbf{Y}$  无法进行分辨。

为了解决这个问题, 本文提出一种改进方法, 在得到稀疏解  $\mathbf{Y}$  后不进行信号分离和提取信号, 而是求  $M_y \times N_z$  的矩阵  $\mathbf{Y}$  的行向量对应的稀疏解, 这样将面阵每一列的阵元数从  $N_z$  拓展到  $M_z$ , 得到一个  $M_z \times M_y$  的 2 维稀疏矩阵  $\mathbf{Z}$ , 从  $y$  轴和  $z$  轴两维方向分辨处于测角盲区内信号, 只要两个信号的方位角和俯仰角不同时相等, 那么对应的  $\sin(\theta) \cdot \cos(\phi)$  和  $\sin(\phi)$  就不会同时完全一样。沿  $y$  轴方向求稀疏解  $\mathbf{Y}$  的过程仍然为式(16)–式(19)的迭代算法, 进而求  $\mathbf{Y}$  沿  $z$  轴方向稀疏解  $\mathbf{Z}$  的迭代算法为

$$c_\mu[m_z] = \|\mathbf{Z}_\mu[m_z]\|_2 = \left( \sum_{m_y=1}^{M_y} |Z_\mu[m_z, m_y]|^2 \right)^{1/2} \quad (24)$$

$$\mathbf{W}_{\mu+1} = \text{diag}\left(c_\mu[m_z]^{1-(p/2)}\right), \quad m_z = 1, \dots, M_z \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_{W_{\mu+1}} = \mathbf{F}_z \mathbf{W}_{\mu+1} \quad (26)$$

$$\mathbf{Z}_{\mu+1} = \mathbf{W}_{\mu+1} \mathbf{F}_{W_{\mu+1}}^H \left[ \mathbf{F}_{W_{\mu+1}} \mathbf{F}_{W_{\mu+1}}^H + \kappa \mathbf{I}_{N_z} \right]^{-1} \mathbf{Y}^T \quad (27)$$

此时  $K$  个信号对应于 2 维矩阵  $|\mathbf{Z}|$  的  $K$  个峰值, 由此得到  $K$  个信号的方位、俯仰 2 维角度。改进方法会使运算量有所提高, 却能有效地估计处于测角盲区内信号的角度。

### 3.4 算法描述

在估计信号角度之前, 需要估计信源数目。对于  $K$  的估计, 很多文献<sup>[17–19]</sup>已经进行了研究, 限于篇幅, 这里不再涉及。下面给出算法步骤:

(1) 由式(2)的接收数据  $\mathbf{X}(t)$  估计信号源数目  $\hat{K}$ 。

(2) 根据 3.2 节描述的式(16)–式(19)稀疏求解过程, 计算信号沿阵列  $y$  轴的空间频率  $\sin(\theta_k) \cos(\phi_k)$ , 并分离信号  $\mathbf{Y}_s^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, \hat{K}$ 。

(3) 如果分离的信号数目等于估计的信源数, 则

由式(20)–式(22)分别计算每个信号沿阵列水平方向的空间频率  $\sin(\phi_k)$ , 进而由式(8)–式(9)求得信号的 2 维角度  $(\theta_k, \phi_k)$ ,  $k = 1, \dots, \hat{K}$ 。

(4) 如果分离的信号数目小于估计的信源数, 根据式(24)–式(27)计算 2 维稀疏解, 沿  $y$  和  $z$  轴两维方向分辨位于盲区内信号, 并由每个信号所在的空间频率计算其 2 维角度  $(\theta_k, \phi_k)$ ,  $k = 1, \dots, \hat{K}$ 。

## 4 计算机仿真结果

为验证本文方法的有效性和理论分析的正确性, 进行如下的计算机仿真。所用的面阵为图 1 所示的  $16 \times 16$  的 URA, 阵元间距  $d_y = d_z = 1.5\lambda$ , 阵列发射信号频率为 200 MHz, 对应的波长  $\lambda = 1.5$  m。首先考虑两个相干源的回波信号, 信噪比均为 10 dB, 10 个快拍, 入射到面阵的 2 维角度分别为  $(5^\circ, 3^\circ)$  和  $(6^\circ, 4^\circ)$ 。选取  $M_y = M_z = 256$ ,  $p = 0.2$ 。图 2 中虚线为直接对第 16 行的 16 根天线做 256 点 DFT 的结果, 实线所示为对应的行天线沿  $y$  轴的稀疏解向量所对应的结果。可见, DFT 方法分辨力较低, 沿  $y$  轴的 DFT 无法分辨角度间隔较小的信号, 而稀疏求解后, 在对应的角度处能形成两个很尖的峰值, 大大提高了空间分辨力。图 3 所示的是经过沿  $y$  轴的稀疏求解分离信号后, 分别用直接 DFT 的方法和稀疏求解的方法得到的两个信号俯仰维的空间分布。相比于直接 DFT 的方法, 稀疏求解后的  $|\mathbf{Z}|$  在对应的目标仰角处出现两个主瓣更窄、旁瓣很低的峰值。

为了验证本文方法的统计有效性, 进行 200 次独立的 Monte-Carlo 实验统计单个快拍不同信噪比下的测角误差。同一距离单元内空间间隔较小的两个相干信号的 2 维入射角度分别为  $(8^\circ, 2^\circ)$  和  $(9^\circ, 4^\circ)$ , 选取  $M_y = M_z = 256$ ,  $p = 0.5$ 。图 4 是用 2D Unitary ESPRIT<sup>[5]</sup>和本文方法得到的两个信号仰角的平均均方根误差 (ARMSE) 随信噪比的变化曲线, 其中

$$\text{ARMSE} \triangleq \frac{\sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\hat{\phi}_{l1} - \phi_1)^2} + \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\hat{\phi}_{l2} - \phi_2)^2}}{2}$$

$L$  是进行 Monte-Carlo 实验的次数。图 5 是对应的方位角的平均均方根误差随信噪比的变化曲线。由图 4 和图 5 可见, 在较低的信噪比下, 本文方法的测角性能要远好于 Unitary ESPRIT 算法, 同时本文方法不需要特征值分解和解相关处理。新方法测角误差随信噪比变化不明显, 这说明本文方法具有对信噪比变化的不敏感性, 因此其在低信噪比环境

下尤其适用。

为了说明改进方法解决测角盲区问题的有效性，考虑两个相干信号，入射角度分别为  $(0^\circ, 2^\circ)$  和  $(0^\circ, 4^\circ)$ ， $p$  取 0.2，其它条件和上面的实验完全相同。此时， $\sin(\theta_1)\cos(\phi_1) = \sin(\theta_2)\cos(\phi_2) = 0$ ，因此沿  $y$  轴向的稀疏解无法分离两个信号，如图 6 所示，在相应的空间角频率处只有一个峰值。而改进方法通过求空间两维稀疏解，从  $y$  轴和  $z$  轴两维方向进行分辨，可以明显地分辨两个信号，如图 7 所示，有效地解决了测角盲区问题。

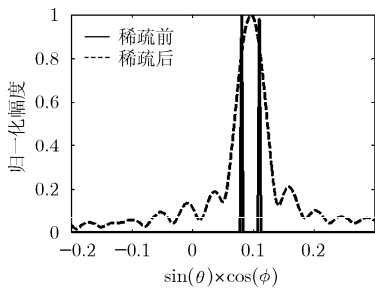


图 2  $y$  轴向稀疏求解前后的空间分布

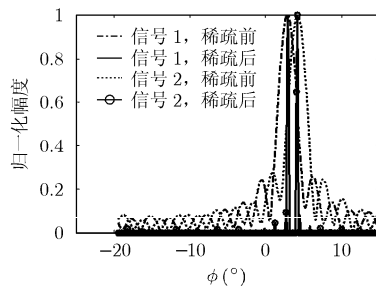


图 3  $z$  轴向稀疏求解前后的空间分布

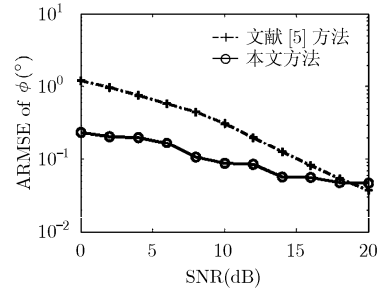


图 4 仰角误差随信噪比的变化

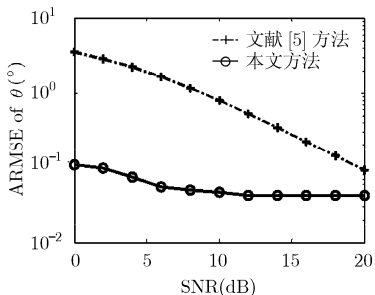


图 5 方位角误差随信噪比的变化

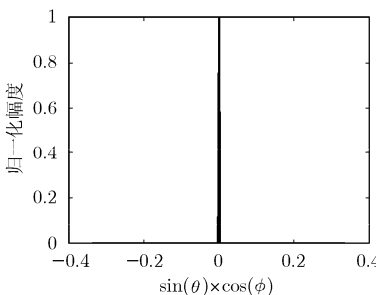


图 6 存在测角盲区时  $|Y|$  的空间分布

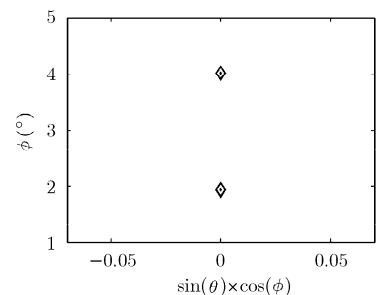


图 7 改进方法的 2 维稀疏解的空间分布

### 5 结束语

本文提出了一种基于稀疏解的 2 维角度估计的高分辨算法，用迭代算法依次沿面阵方位向和俯仰向求接收数据矩阵对应的稀疏解，并确定信号的 2 维角度，在增强空间信号能量的同时等效地拓展了阵列孔径，提高了角度分辨力和测量精度。该方法不需要特征值分解和多维角度搜索，并且对于相关源无需解相关处理，因此显著降低了运算量。仿真结果表明该方法具有较高的分辨力和低信噪比门限。

### 参考文献

[1] Zhang T T, Lu Y L, and Hui H T. Compensation for the mutual coupling effect in uniform circular arrays for 2D DOA estimations employing the maximum likelihood technique. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(3): 1215-1221.

[2] Forster P, Larzabal P, and Boyer E. Threshold performance analysis of maximum likelihood DOA estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(11): 3183-3191.

[3] Li Ming-hui and Lu Yi-long. Maximum likelihood DOA estimation in unknown colored noise fields. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(3): 1079-1090.

[4] Park Cheol-Sun, Choi Jun-Ho, and Yang Jong-Won, et al. Direction of arrival estimation using weighted subspace

fitting with unknown number of signal sources. Proc. 11th International Conference on Advanced Communication Technology, Phoenix Park, Dublin, Feb.15-18, 2009: 2295-2298.

[5] Jian C, Wang S, and Lin L. Two-dimensional DOA estimation of coherent signals based on 2D Unitary ESPRIT method. Proc. 8th International Conference on Signal Processing, Beijing, China, 2006: 16-20.

[6] Gao Fei-fei, Nallanathan A, and Wang Yi-de. Improved MUSIC under the coexistence of both circular and noncircular sources. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(7): 3033-3038.

[7] Zoltowski M D and Lee T S. Maximum likelihood based sensor array signal processing in the beamspace domain for low angle radar tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(3): 656-671.

- [8] Bobin J, Starck J L, and Fadili J, *et al.* Sparsity and morphological diversity in blind source separation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(11): 2662–2674.
- [9] Cheng Ping, Jiang Yi-cheng, and Xu Rong-qing. ISAR imaging based on sparse signal representation with multiple measurement vectors. Proc. Int. Conf. Radar, Shanghai, China, Oct. 16–19, 2006: 1–4.
- [10] Pisharody G and Weile D S. Robust solution of time-domain integral equations using loop-tree decomposition and bandlimited extrapolation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2005, 53(6): 2089–2098.
- [11] Gorodnitsky I F and Rao B D. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: A re-weighted minimum norm algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(3): 600–616.
- [12] Wipf D P and Rao B D. Bayesian learning for sparse signal reconstruction. Proc. IEEE ICASSP., La Jolla, CA, Apr. 6–10, 2003: 601–604.
- [13] Cotter S F, Rao B D, and Kjersti Engan, *et al.* Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2477–2488.
- [14] Malioutov D, Cetin M, and Willsky A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022.
- [15] Rao B D, Engan K, and Cotter S F, *et al.* Subset selection in noise based on diversity measure minimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(3): 760–770.
- [16] Sacchi M D, Ulrych T J, and Walker C J. Interpolation and extrapolation using a high-resolution discrete Fourier transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(1): 31–38.
- [17] Chen P, Wu T J, and Yang J. A comparative study of model selection criteria for the number of signals. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2008, 2(3): 180–188.
- [18] Huang Lei, Wu Shun-jun, and Li Xia. Reduced-rank MDL method for source enumeration in high-resolution array processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(12): 5658–5667.
- [19] Huang Lei, Long Teng, and Wu Shun-jun. Source enumeration for high-resolution array processing using improved gerschgorin radii without eigendecomposition. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(12): 5916–5925.
- 杨雪亚: 男, 1984年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理及米波雷达测高方法研究.
- 陈伯孝: 男, 1966年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向包括新体制雷达系统与雷达信号处理、阵列信号处理、精确制导与目标跟踪等.