

无线网络拥塞控制中流体流模型的 Hopf 分岔及其稳定性

侯萍^{①②} 王执铨^①

^①(南京理工大学自动化学院 南京 210094)

^②(南京人口管理干部学院 南京 210042)

摘要: 该文对一个用于无线网络拥塞控制算法设计的具有通信时延的流体流模型进行 Hopf 分岔分析, 以通信时延作为分岔参数, 证明此模型 Hopf 分岔的存在性, 并应用中心流形和规范型理论推导出确定 Hopf 分岔方向和分岔周期解稳定性的计算公式, 数值仿真实验验证了结论的有效性。

关键词: 无线网络; Hopf 分岔; 拥塞控制; 时延系统

中图分类号: TP393; TP273

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)04-0983-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00358

Stability and Hopf Bifurcation of a Fluid-Flow Model for Congestion Control in Wireless Networks

Hou Ping^{①②} Wang Zhi-quan^①

^①(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

^②(Nanjing College for Population Program Management, Nanjing 210042, China)

Abstract: This paper focuses on the Hopf bifurcation analysis of a fluid-flow model with time-delay for the congestion control algorithm in the wireless networks. By choosing the communication delay as a bifurcation parameter, the model exhibits of Hopf bifurcation are proved. The formulas for determining the direction of the Hopf bifurcation and the stability of bifurcating periodic solutions are obtained by applying the center manifold theorem and the normal form theory. Finally, a numerical simulation is presented to verify the theoretical results.

Key words: Wireless networks; Hopf bifurcation; Congestion control; Time-delay systems

1 引言

近年来, 对网络拥塞控制系统的稳定性和动力学特性研究受到了人们的关注^[1-4]。文献[1]分析一个单源单链路的网络拥塞控制模型, 证明了以增益参数作为分岔参数的Hopf分岔的存在性。文献[2]考虑到通信时延是网络本身所固有的物理特性, 讨论具有通信时延的REM(Random Exponential Marking)算法, 分析当网络平衡条件被破坏后, 系统所表现出的新的运动特性。文献[3, 4]针对简化的网络拥塞控制模型, 当反馈延迟超过关键值时系统将失去稳定, 出现Hopf分岔。目前的研究主要针对有线网络, 对无线网络拥塞控制模型的Hopf分岔研究未见有报道。鉴于此, 本文针对用于无线网络拥塞控制算法设计的流体流模型^[5]进行稳定性和Hopf分岔分析, 首先证明此模型Hopf分岔的存在性, 然后应用中心流形和规范型理论确定Hopf分岔周期解的方向和稳定性, 最后给出数值实例及仿真。

2 流体流模型和Hopf分岔条件

文献[5]给出用于无线网络拥塞控制的流体流模型, 此模型考虑了无线信道传输衰落导致包丢失的情况。模型表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{W}(t) &= \frac{1}{\tau(t)} - (1 - P_{dl}) \frac{W(t) W(t - \tau(t))}{2 \tau(t - \tau(t))} p(t - \tau(t)) \\ &\quad - P_{dl} (W(t) - 1) \frac{W(t - \tau(t))}{\tau(t - \tau(t))} p(t - \tau_{ah}(t)) \\ \dot{q}(t) &= -C + N(1 - P_{ul}) \frac{W(t)}{\tau(t)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $W(t)$ 代表平均TCP窗口尺寸(包), $q(t)$ 是平均队列长度(包), $p(t)$ 是包标识概率函数, $N(t)$ 是TCP连接数, C 是队列带宽(包/秒), $\tau(t) = \frac{q(t)}{C(t)} + T_p$ 是往返时间(s), 它由传输时延和队列时延组成。 $\tau_{ah}(t)$ 是当前时间与最新标识概率被成功接收到的时间的差值。当队列时延远远小于传输时延时, 能假定 $N(t) = N$, $\tau_{ah}(t) \approx \tau(t) = \tau$ 是常数^[5], 考虑概率标识函数与队列长度成比例^[6] $p(t) = Kq(t)$, 忽略窗口

2009-03-19 收到, 2009-09-28 改回
国家自然科学基金(60574082)资助课题
通信作者: 侯萍 houpinghi@163.com

传输延迟。对于无线通信网络，由于信道衰落一些传输包将被丢失， P_{dl} 和 P_{ul} 分别代表下行和上行链路信道包丢失概率，被假定为常数^[5]。式(1)简化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{W}(t) &= \frac{1}{\tau} - \frac{(1+P_{dl})W(t)W(t) - 2P_{dl}W(t)}{2\tau} Kq(t-\tau) \\ \dot{q}(t) &= -C + \frac{N}{\tau}(1-P_{ul})W(t) \end{aligned} \right\} (2)$$

式(2)的平衡点为

$$W_0 = \frac{\tau C}{N(1-P_{ul})}, p_0 = \frac{2}{(1+P_{dl})W_0^2 - 2P_{dl}W_0} = Kq_0$$

系统式(2)在平衡点处线性化，得到

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= \left[-\frac{1}{\tau}(1+P_{dl})W_0P_0 + \frac{P_{dl}}{\tau}P_0 \right] y_1(t) \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2\tau}(1+P_{dl})W_0^2 + \frac{P_{dl}}{\tau}W_0 \right] Ky_2(t-\tau) \\ \dot{y}_2(t) &= \frac{N}{\tau}(1-P_{ul})y_1(t) \end{aligned} \right\} (3)$$

其中 $y_1(t) = W - W_0$, $y_2(t) = q - q_0$

式(3)的特征方程为

$$\lambda^2 + a\lambda + be^{-\lambda\tau} = 0 \quad (4)$$

其中 $a = (1/\tau)(1+P_{dl})W_0P_0 - (P_{dl}/\tau)P_0$, $b = -(N/\tau) \cdot (1-P_{ul})K[-(1/(2\tau))(1+P_{dl})W_0^2 + (P_{dl}/\tau)W_0]$ 。

令特征根 $\lambda = \pm i\omega_0$ ，其中 $\omega_0 > 0$ ，代入特征方程式(4)，虚部实部分开，则有

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^4 + 4b^2} - a^2)} \\ \tau_0 &= \frac{1}{\omega_0} \arctan\left(\frac{a}{\omega_0}\right) \end{aligned} \right\} (5)$$

从中可以看出 $\omega_0\tau_0 < \pi/2$ 。

引理1 当 $\tau = \tau_0$ 时，式(4)有唯一一对纯虚根 $\lambda = \pm i\omega_0$ ， $\omega_0\tau_0 < \pi/2$ 。

引理2^[7] 对于特征方程式(4)，如果令 $M(\tau) = \{\lambda : \text{Re}(\lambda) \geq 0, Q(\lambda, \tau) = 0\}$ 表示使得特征方程 $Q(\lambda, \tau) = 0$ 具有非负实部的特征根的个数，设 $0 \leq \tau_1 < \tau_2$ ，如果对于任意的 $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ，特征方程在虚轴上没有解，则 $M(\tau_1) = M(\tau_2)$ 。

引理3 当 $\tau < \tau_0$ ，特征方程式(4)的所有根都有负实部。

引理4 当 $\tau = \tau_0$ ，特征方程式(4)除了有一对纯虚根 $\pm i\omega_0$ 外，其他的根都有严格负实部。

引理5 设 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ 是式(4)的根，满足 $\alpha(\tau_0) = 0$, $\omega(\tau_0) = \omega_0$ 则 $\left. \frac{d\text{Re}(\lambda(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} > 0$ 。

引理6 当 $\tau > \tau_0$ 式(4)至少有一个根具有严格正实部。

基于上述引理分析特征方程的特征根的分布区域，应用文献[8]中的有限时滞微分方程的Hopf分岔

定理得到式(2)的分岔定理，如下所示：

定理1 对于系统式(2)有如下结论：(1)当 $\tau < \tau_0$ ，系统在平衡点局部渐近稳定；(2)当 $\tau > \tau_0$ ，系统在平衡点不稳定；(3)当 $\tau = \tau_0$ ，系统在平衡点产生Hopf分岔，出现周期解。

3 Hopf分岔的方向和Hopf分岔周期解稳定性

本文用Hassard规范型方法^[9]给出计算以通信时延为参数的流体流模型的Hopf分岔公式，来判断周期解的分岔方向以及周期解的稳定性。为了获得式(3)的高阶表达式，对式(3)在平衡点进行泰勒展开，结果如下：

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t-\tau) + a_{13}y_1^2(t) \\ &\quad + a_{14}y_1(t)y_2(t-\tau) + a_{15}y_1^2(t)y_2(t-\tau) \\ \dot{y}_2(t) &= a_{21}y_1(t) \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{1}{\tau}(1+P_{dl})W_0P_0 + \frac{P_{dl}}{\tau}P_0, \quad a_{12} = -\frac{1}{2\tau}(1+P_{dl})W_0^2 \\ &\quad + \frac{P_{dl}}{\tau}W_0, \quad a_{13} = -\frac{1}{\tau}(1+P_{dl})P_0, \quad a_{14} = -\frac{1}{\tau}(1+P_{dl})W_0 \\ &\quad + \frac{P_{dl}}{\tau}, \quad a_{15} = -\frac{1}{\tau}(1+P_{dl}), \quad a_{21} = \frac{N}{\tau}(1-P_{ul}). \end{aligned}$$

设 $\tau = \tau_0 + \mu$ ， $\mathbf{u}(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ ， $\mathbf{u}_t(\theta) = \mathbf{u}(t+\theta)$ ， $\theta \in [-\tau, 0]$ $C^k[-\tau, 0]$ ，初始条件 $\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta))^T \in C[-\tau, 0]$ 则式(6)表述如下：

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = L_\mu \mathbf{u} + F(\mathbf{u}_t, \mu) \quad (7)$$

$$L_\mu \varphi = \mathbf{B}_1 \varphi(0) + \mathbf{B}_2 \varphi(-\tau) \quad (8)$$

$$F(\varphi, \mu) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{13}\varphi_1^2(t) + a_{14}\varphi_1(t)\varphi_2(t-\tau) + a_{15}\varphi_1^2(t)\varphi_2(t-\tau) \\ 0 \end{pmatrix} (9)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将式(7)转换为下述形式：

$$\dot{\mathbf{u}}_t = A(\mu)\mathbf{u}_t + Q\mathbf{u}_t \quad (10)$$

式(10)可以表示为 $\dot{\mathbf{u}}(t) = L_\mu \mathbf{u}$ 。根据Reisz表示定理可知，存在一个 2×2 矩阵值函数 $\eta(\cdot, \mu) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ，对于所有的 $\varphi(\theta) \in C[-\tau, 0]$ $L_\mu \varphi = \int_{-\tau}^0 d\eta(\theta, \mu)\varphi(\theta)$ ， $L_\mu \mathbf{u} = \int_{-\tau}^0 d\eta(\theta, \mu)\mathbf{u}(t+\theta)$ ， $\eta(\theta, \mu) = \mathbf{B}_1\delta(\theta) + \mathbf{B}_2\delta(\theta + \tau)$ ， $\delta(\cdot)$ 是Dirac delta函数。

对于 $\varphi(\theta) \in C[-\tau, 0]$ ，令

$$A(\mu)\varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta}, & \theta \in [-\tau, 0) \\ \int_{-\tau}^0 d\eta(\theta, \mu)\varphi(\theta) = L_\mu \varphi, & \theta = 0 \end{cases} (11)$$

$$Q(\mu)\varphi = \begin{cases} 0, & \theta \in [-\tau, 0) \\ F(\varphi, \mu), & \theta = 0 \end{cases} \quad (12)$$

令 $q(\theta)$ 是 $A(0)$ 对应于 $\lambda(0)$ 的特征函数, 即 $A(0)q(\theta) = i\omega_0 q(\theta)$ 。对于 $\psi \in C[0, \tau]$, 定义伴随算子为 $A^*(0)$:

$$A^*(0)\psi = \begin{cases} -\frac{d\psi}{ds}, & s \in (0, \tau] \\ \int_{-\tau}^0 d\eta^T(t, 0)\psi(-t) = L_\mu\varphi, & s=0 \end{cases}$$

$A(0)$ 简写为 A , $A^*(0)$ 简写为 A^* , $\eta(\theta, 0)$ 简写为 $\eta(\theta)$, 所以 $Aq(\theta) = \lambda(0)q(\theta)$ 。 $\bar{\lambda}(0)$ 是 A^* 的一个特征值, $A^*q^*(\theta) = -i\omega_0 q^*(\theta)$, 对于 $\varphi(\theta) \in C[-\tau, 0)$ 和 $\psi \in C[0, \tau]$, 定义一个内积

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \bar{\psi}^T(0) \cdot \varphi(0) - \int_{\theta=-\tau}^0 \int_{\xi=0}^\theta \bar{\psi}^T(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\varphi(\xi)d\xi$$

$\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A^*\psi, \varphi \rangle$ 对于 $\varphi = \text{Dom}(A)$, $\psi = \text{Dom}(A^*)$, 则有如下引理:

引理 7^[4] 令 $q(\theta) = Ve^{i\omega_0\theta}$ 是 A 对应于 $i\omega_0$ 的特征向量, $q^*(\theta) = DV^*e^{i\omega_0\theta}$ 是 A^* 对应于 $-i\omega_0$ 的特征向量则 $\langle q^*, q \rangle = 1$, $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$, 其中 $V = (1, \rho_1)^T$, $\rho_1 = \frac{a_{21}}{i\omega_0}$, $V^* = (\rho_2, 1)^T$, $\rho_2 = -\frac{a_{21}}{a_{11} + i\omega_0}$, $\bar{D} = [V^{*T} \cdot V - \tau_0 e^{-i\omega_0\tau_0} \bar{V}^{*T} B_2 V]^{-1}$ 。

下面计算 $\mu = 0$ 时中心流形 C_0 的坐标, 本文采用同 Hassard 同样的表示^[9]。对于 u_t 当 $\mu = 0$ 时, 式(10)的解定义为

$$z(t) = \langle q^*, u_t \rangle \quad (13)$$

$$W(t, \theta) = u_t - zq - \bar{z}\bar{q} = u_t - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\} \quad (14)$$

在中心流形 C_0 上, $W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta)$, 其中

$$W(z(t), \bar{z}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta) z\bar{z} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (15)$$

在向量空间 C 中, z 和 \bar{z} 是中心流形 C_0 在方向 q 和 \bar{q}^* 的局部坐标, 注意到当 u_t 是实数时 W 也是实数, 我们只处理实数解。从式(14)得 $\langle q^*, W \rangle = \langle q^*, u_t - zq - \bar{z}\bar{q} \rangle = 0$ 。

对于式(10)的解 $u_t \in C_0$, 根据式(11), 式(12), 式(13), 由于 $\mu = 0$, 得

$$\dot{z}(t) = \langle q^*, \dot{u}_t \rangle = i\omega_0 z(t) + q^{*T}(0)f_0(z, \bar{z}) \quad (16)$$

$$\dot{z}(t) = i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z}) \quad (17)$$

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots \quad (18)$$

又 $\dot{W} = \dot{u}_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q}$, 从式(10), 式(17)得

$$\dot{W} = \begin{cases} AW - 2\text{Re}\{q^{*T}(0)f_0(z, \bar{z})q\}, & \theta \in [-\tau, 0) \\ AW - 2\text{Re}\{q^{*T}(0)f_0(z, \bar{z})q\} + f_0(z, \bar{z}), & \theta \in [-\tau, 0) \end{cases} \quad (19)$$

$$\dot{W} = AW + H(z, \bar{z}, \theta) \quad (20)$$

$$H(z, \bar{z}, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\bar{z} + H_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (21)$$

在 C_0 上,

$$\dot{W} = W_z \dot{z} + W_{\bar{z}} \dot{\bar{z}} \quad (22)$$

将式(15), 式(17)代入式(22)得

$$\dot{W} = i\omega_0 W_{20}(\theta) z^2 - i\omega_0 W_{02}(\theta) \bar{z}^2 + \dots \quad (23)$$

对照式(20), 式(23)系数, 得

$$\left. \begin{aligned} (A - i2\omega_0)W_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \\ W_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta) \\ (A + i2\omega_0)W_{02}(\theta) &= -H_{02}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

又 $u_t = u(t + \theta) = W(z, \bar{z}, \theta) + zq + \bar{z}\bar{q}$, 则

$$u_t = \begin{pmatrix} y_1(t + \theta) \\ y_2(t + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{(1)}(z, \bar{z}, \theta) \\ W^{(2)}(z, \bar{z}, \theta) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0\theta} + \bar{z} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0\theta}$$

因此, 得到

$$y_1(t + \theta) = ze^{i\omega_0\theta} + \bar{z}e^{-i\omega_0\theta} + W_{20}^{(1)}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(\theta) z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

$$y_2(t + \theta) = z\rho_1 e^{i\omega_0\theta} + \bar{z}\rho_1 e^{-i\omega_0\theta} + W_{20}^{(2)}(\theta) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(\theta) z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

很明显能够计算 $\varphi_1(0)$, $\varphi_1^2(0)$, $\varphi_2(-\tau_0)$, $\varphi_1(0)\varphi_2(-\tau_0)$, $\varphi_1^2(0)\varphi_2(-\tau_0)$ (计算公式在此省略),

$$f_0(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} a_{13}\varphi_1^2(0) + a_{14}\varphi_1(0)\varphi_2(-\tau_0) + a_{15}\varphi_1^2(0)\varphi_2(-\tau_0) \\ 0 \\ K_1 z^2 + K_2 z\bar{z} + K_3 \bar{z}^2 + K_4 z^2 \bar{z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = a_{13} + a_{14}\rho_1 e^{-i\omega_0\tau_0}$$

$$K_2 = 2a_{13} + a_{14}(\bar{\rho}_1 e^{i\omega_0\tau_0} + \rho_1 e^{-i\omega_0\tau_0})$$

$$K_3 = a_{13} + a_{14}\bar{\rho}_1 e^{i\omega_0\tau_0}$$

$$K_4 = a_{13} [2W_{11}^{(1)}(0) + W_{20}^{(1)}(0)] + a_{14} [W_{11}^{(2)}(-\tau_0)$$

$$+ \frac{1}{2} W_{20}^{(2)}(-\tau_0) + \frac{1}{2} W_{20}^{(1)}(0)\bar{\rho}_1 e^{i\omega_0\tau_0}$$

$$+ W_{11}^{(1)}(0)\rho_1 e^{-i\omega_0\tau_0}] + a_{15} [\bar{\rho}_1 e^{i\omega_0\tau_0} + 2\rho_1 e^{-i\omega_0\tau_0}]$$

因为 $\bar{q}^*(0) = \bar{D}(\bar{\rho}_2, 1)^T$, 得

$$g(z, \bar{z}) = \bar{D}\bar{\rho}_2(K_1 z^2 + K_2 z\bar{z} + K_3 \bar{z}^2 + K_4 z^2 \bar{z})$$

与式(18)比较系数

$$g_{20} = 2\bar{D}\bar{\rho}_2 K_1, g_{11} = \bar{D}\bar{\rho}_2 K_2, g_{02} = 2\bar{D}\bar{\rho}_2 K_3, g_{21} = 2\bar{D}\bar{\rho}_2 K_4$$

为了得到式中的 g_{21} , 还需要计算出 $W_{11}(\theta)$ 和 $W_{20}(\theta)$ 的值, $\theta \in [-\tau, 0)$ 。根据前面已经得到的式(19), 式(20), 式(21)和式(24), 对于 $\theta \in [-\tau, 0)$, 得

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\omega_0} q(0)e^{i\omega_0\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0} \bar{q}(0)e^{-i\omega_0\theta} + E_1 e^{i2\omega_0\theta}$$

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\omega_0} q(0)e^{i\omega_0\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0} \bar{q}(0)e^{-i\omega_0\theta} + E_2$$

令 $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)})^T, E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)})^T$, 解得

$$E_1^{(1)} = \frac{i2\omega_0 K_1}{4\omega_0^2 + i2\omega_0 a_{11} + a_{12} a_{21} e^{-i2\omega_0\tau}}$$

$$E_1^{(2)} = \frac{a_{21}}{i2\omega_0} E_1^{(1)}$$

$$E_2^{(1)} = 0$$

$$E_2^{(2)} = -\frac{K_2}{a_{12}}$$

根据文献[9], 最后得到

$$\left. \begin{aligned} C_1(0) &= \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2} \\ \mu_2 &= -\frac{\text{Re}\{C_1(0)\}}{\text{Re}\lambda'(0)} \\ T_2 &= -\frac{\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2 \text{Im}\lambda'(0)}{\omega_0} \\ \beta_2 &= 2\text{Re}\{C_1(0)\} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

利用前面得到的公式, 给出下面的定理:

定理 2 对于系统式(2), 当 $\tau = \tau_0$ 时, Hopf 分岔的方向和周期解得稳定性由式(25)和下述结果决定: (1)分岔方向由 μ_2 决定。如果 $\mu_2 > 0$, 则Hopf 分岔是超临界的, 当 $\tau > \tau_0$ 时系统有周期解。如果

$\mu_2 < 0$, 则Hopf分岔是亚临界的, 当 $\tau < \tau_0$ 时系统有周期解。(2)分岔周期解的稳定性由 β_2 决定。如果 $\beta_2 < 0$, 则周期解的轨迹是稳定的; 如果 $\beta_2 > 0$, 则周期解的轨迹是不稳定的。(3)系统分岔周期解的周期由 T_2 决定。如果 $T_2 > 0$, 则周期解增加; 如果 $T_2 < 0$, 则周期解减少。

4 数值仿真

当系统参数为 $N = 50, K = 0.001, C = 1000$ 包/秒, $P_{dl} = P_{ul} = 0.1$ 。根据式(5)得到 τ_0 是 τ 的减函数, 通过计算知当 $\tau_0 = 0.3131$ 时分岔发生。选择 $\tau = 0.2$ 则 $W_0 = 4.4444, P_0 = 0.0960, a = 2.2986, b = 11.7220, \omega_0 = 3.0617$; 这样根据上一节得到公式, 可以计算出 $C_1(0) = -57.1999296 + 623.3492715i, \mu_2 = 11.13651307, T_2 = -210.6099969, \beta_2 = -114.3998592$, 因此根据上述计算知当 $\tau < \tau_0, \mu_2 = 11.13651307 > 0$ Hopf 分岔是超临界的。 $\tau = 0.2$ 时系统的状态图见图1和图2, 相位图见图3和图4。调整 τ 的值使得 $\tau > \tau_0$, 当 $\tau = 0.32$, 系统的状态图见图5和图6, 相位图见图7和图8, 系统有周期解, 与定理2的结论一致。 $\beta_2 = -114.3998592 < 0$, 则周期解的轨迹是稳定的, $T_2 = -210.6099969 < 0$, 系统分岔周期解的周期减少。

5 结论

本文证明了用于无线网络拥塞控制算法设计的具有通信时延的流体流模型的 Hopf 分岔的存在性, 然后应用中心流形和规范型理论, 得到了关于确定 Hopf 分岔方向和分岔周期解稳定性的计算公式。数值仿真验证了结论的有效性。这些结论可以帮助我们对于无线网络拥塞控制算法的内部性能进行深入了解, 可以采用有效的分岔控制方法使无线网络系统取得更好的服务性能。

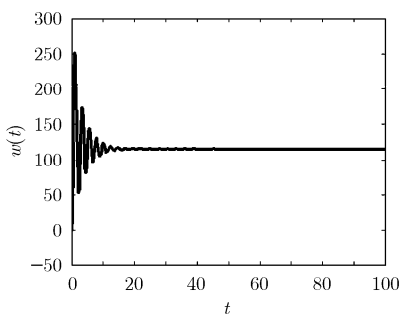


图1 当 $\tau = 0.2$ 时 $W(t)$ 的状态图

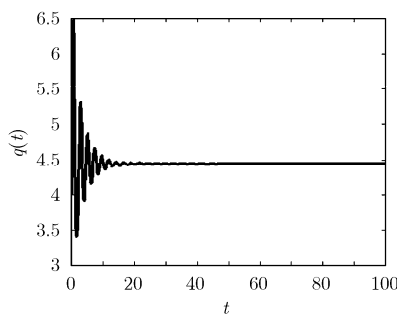


图2 当 $\tau = 0.2$ 时 $q(t)$ 的状态图

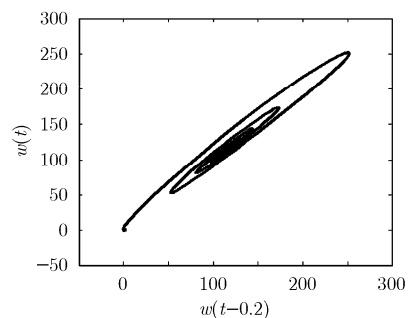
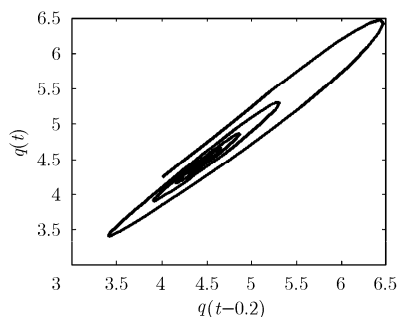
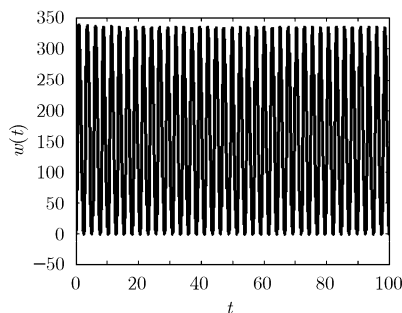
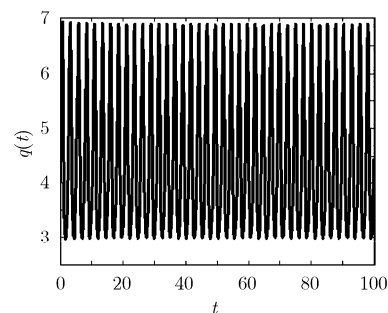
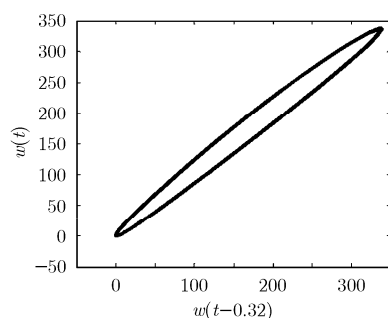
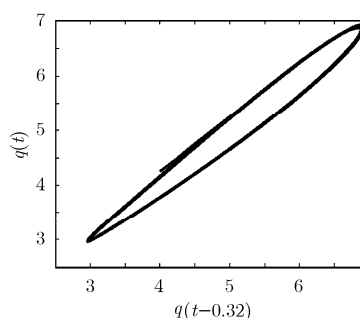


图3 当 $\tau = 0.2$ 时 $W(t)$ 的相位图

图4 当 $\tau = 0.2$ 时 $q(t)$ 的相位图图5 当 $\tau = 0.32$ 时 $W(t)$ 的状态图图6 当 $\tau = 0.32$ 时 $q(t)$ 的状态图图7 当 $\tau = 0.32$ 时 $W(t)$ 的相位图图8 当 $\tau = 0.32$ 时 $q(t)$ 的相位图

参 考 文 献

- [1] Li C, Chen G, and Liao X, *et al.*. Hopf bifurcation in an Internet congestion control model[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 19(4): 853-862.
- [2] Yang H and Tian Y. Hopf bifurcation in REM algorithm with communication delay[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 25(5): 1093-1105.
- [3] Raina G and Heckmann O. TCP: Local stability and Hopf bifurcation[J]. *Performance Evaluation*, 2007, 64(3): 266-275.
- [4] Ding D, Zhu J, and Luo X. Hopf bifurcation analysis in a fluid flow model of Internet congestion control algorithm[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(2): 824-839.
- [5] Zheng F and Nelson J. An H_∞ approach to congestion control design for AQM routers supporting TCP flows in wireless access networks[J]. *Computer Networks*, 2007, 51(6): 1684-1704.
- [6] Hollot C V, Misra V, and Towsley D, *et al.*. Analysis and design of controllers for AQM routers supporting TCP flows[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(6): 945-959.
- [7] Cooke K and Grossman Z. Discrete delay, distributed delay and stability switches [J]. *Mathematical Analysis and Applications*, 1982, 86(2): 592-627.
- [8] Hale J. Theory of Functional Differential Equations [M]. New York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag, 1977, Chapter 11.
- [9] Hassard B D, Kazarinoff N D, and Wan Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation[M]. Cambridge, Cambridge University Press, 1981, Chapter 3.

侯 萍: 女, 1977 年生, 博士生, 讲师, 研究领域为网络拥塞控制、鲁棒控制。

王执铨: 男, 1939 年生, 博士生导师, 教授, 研究领域为容错控制、鲁棒控制、信息安全、拥塞控制等。