

基于流形分离技术的稀疏均匀圆阵快速 DOA 估计方法

潘捷 周建江 汪飞

(南京航空航天大学信息科学与技术学院 南京 210016)

摘要: 该文针对阵元数有限以及阵元稀疏的均匀圆阵, 提出基于流形分离技术(Manifold Separation Technique, MST)的快速波达方向估计算法, PM-Root-MUSIC 方法。该方法避免了均匀圆阵中基于相位模式激励原理的波束空间变换所带来的映射误差, 同时利用传播因子(PM)和根 MUSIC 算法, 避免了传统算法中的特征分解和谱峰搜索过程, 有效降低了计算量, 并获得了接近克罗美劳(Cramer-Rao)下限的估计精度。仿真实验验证了该文算法的有效性。

关键词: 均匀圆阵; 波束空间变换; PM 方法; 流形分离技术

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)04-0963-04

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00175

A Fast Algorithm of DOA Estimation for Sparse Uniform Circular Array Based on Manifold Separation Technique(MST)

Pan Jie Zhou Jian-jiang Wang Fei

(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: A novel version of PM-Root-MUSIC algorithm is developed in this paper. The algorithm is based on the Manifold Separation Technique (MST) for fast DOA estimation of Uniform Circular Array (UCA) when elements of UCA are sparse. The method does not suffer from the mapping error caused by classic beamspace transform and does not need eigenvalue decomposition, so the computational burden is greatly reduced and the estimation results are close to CRB performance. Simulation results show the method is effective.

Key words: Uniform Circular Array (UCA); Beamspace transform; Propagator Method (PM); Manifold Separation Technique (MST)

1 引言

波达方向(DOA)估计是阵列信号处理的重要环节。而均匀圆形天线阵列因为几何上的中心对称性, 其估计性能与方位角无关, 正越来越多地受到研究者的关注, 在智能天线、导航、雷达等领域也都有着广泛的应用。目前广泛采用的均匀圆阵 DOA 估计方法如 UCA-ESPRIT, UCA-RB-MUSIC^[1]等, 大都采用基于相位模式激励原理^[2]的波束空间变换来重建导向矢量的范德蒙结构。波束空间变换类算法^[1,3]的主要特点是要求阵元足够多且较密集, 以避免波束变换带来的误差。Belloni^[4]分析了阵元数目有限时波束空间变换所造成的映射误差, 指出这种误差会随着相位模式激励模式阶数的增加而变大, 从而会影响在应用中选择较高阶的激励模式以获得较好的性能。同时在高信噪比时映射误差成为影响

估计精度的主要因素, 并使 DOA 估计均方根误差(RMSE)不再随信噪比上升而降低。Belloni 提出一种误差补偿方法: 以有偏的估计结果估计映射误差进行校正, 通过迭代逐渐逼近理想结果。

Belloni^[5,6], Costa^[7]利用流形分离技术^[8], 将阵元空间的根 MUSIC 等求根类方法应用于均匀圆阵甚至任意阵列, 避免了波束空间变换, 其估计性能接近 Cramer-Rao 门限。Rubsamen^[9]分析了上述方法的理论性能。Goossens^[10]改进了以相位模式逼近波束空间变换后阵列导向矢量的方法, 实现了对稀疏均匀圆阵的 DOA 估计。

PM(Propagator Method)^[11]是一种非特征分解的子空间估计方法, 因此其具有更小的计算量和更低的计算复杂度。Lian^[3]基于波束空间变换首次将 PM 引入均匀圆阵, 在阵元数较多地情况下获得了与 UCA-RB-MUSIC 方法几乎一致的性能。

本文针对 UCA-PM-MUSIC 在阵元数有限(小于 10)或阵列稀疏(阵元间隔大于 $\lambda/2$)情况下出现的性能下降, 提出一种基于流形分离技术的波束空间

2009-02-13 收到, 2009-12-23 改回

国家 863 计划项目(2005AA05077)和江苏省六大人才高峰计划 A 类(P0952-041)资助课题

通信作者: 潘捷 panjie1982@nuaa.edu.cn

PM-Root-MUSIC方法,实验仿真表明,在处理阵元较少或稀疏的均匀圆阵时,该方法有效降低了波束空间变换和PM方法带来的性能损失,获得了接近Cramer-Rao门限的估计精度。

2 信号模型

在一些实际应用中,如海上舰船间的通信与导航、移动通信中宏蜂窝环境下的RF定位等,目标与天线阵高度基本相同且距离较远,可以近似认为目标与天线处于同一平面。这种情况下,人们更关心的是能否准确提取目标方位角信息。因此,不失一般性,本文研究阵列与信源共面的一维方位角估计。

考虑均匀圆阵由 N 个全向天线组成,均匀分布在平面内半径为 r 的圆周上,坐标系定义为极坐标系,以圆周中心为原点。假设目标与天线阵处于同一平面, K 个波长为 λ 的远场窄带信号入射到天线阵,方位角为 ϕ_i ($i=1,2,\dots,K$)。

均匀圆阵接收信号

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{X}_0(t), \mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_{N-1}(t)]$$

写成矩阵形式

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{S}(t) = [\mathbf{S}_0(t), \mathbf{S}_1(t), \dots, \mathbf{S}_{K-1}(t)]^T$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\phi_1), \mathbf{a}(\phi_2), \dots, \mathbf{a}(\phi_K)]$$

$$\mathbf{a}(\phi_i) = [e^{jk_0 r \cos(\phi_i - \gamma_0)}, e^{jk_0 r \cos(\phi_i - \gamma_1)}, \dots, e^{jk_0 r \cos(\phi_i - \gamma_{N-1})}]^T \quad (2)$$

其中 $k_0 = \lambda/(2\pi)$ 为波数, $\gamma_n = 2\pi n/N$ 为阵元位置,而 $\mathbf{n}(t)$ 为 $N \times 1$ 维,方差为 σ 的零均值加性高斯白噪声。

3 流形分离技术 (Manifold Separation Technique, MST)

流形分离技术将阵列导向矢量 $\mathbf{a}(\theta) \in \mathcal{C}^{N \times 1}$ ($\mathcal{C}^{N \times 1}$ 为 $N \times 1$ 维复数空间)分解为采样矩阵和一个范德蒙结构向量的乘积,并使采样矩阵与来波方向无关,范德蒙结构向量与阵列结构无关。因此,对于任意的阵列结构,都可以将导向矢量分解,使其与一个范德蒙结构向量相联系,从而使用根MUSIC算法进行DOA估计。

采样矩阵可由有效孔径分布函数(EADF)计算得到。定义测量点 $\phi^c = \{\phi_1^c, \phi_2^c, \dots, \phi_Q^c\}$ 为 Q ($Q \gg N$)个在方位角 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布的测量点(Q 为奇数)。测量到的远场信号源激励下阵列响应 $\mathbf{b}^{\text{cal}}(\phi^c) = \mathbf{a}(\phi^c) \in \mathcal{C}^{N \times 1}$ (ϕ^c 为测量角)。通过构造测量数据矩阵 $\mathbf{B}_\phi^{\text{cal}} = [\mathbf{b}^{\text{cal}}(\phi_1^c), \dots, \mathbf{b}^{\text{cal}}(\phi_Q^c)] \in \mathcal{C}^{N \times Q}$,定义EADF矩阵 $\mathbf{G}_e \in \mathcal{C}^{N \times Q}$,其行向量为 $\mathbf{B}_\phi^{\text{cal}}$ 的对应

行向量的逆离散傅里叶变换(IDFT),则: $\mathbf{a}(\phi) = \sum_{-(Q-1)/2}^{(Q-1)/2} [\mathbf{G}_e]_m e^{jm\phi} + \varepsilon(Q)$,其中 m 称为EADF的阶数, $[\mathbf{G}_e]_m$ 为矩阵 \mathbf{G}_e 的 $m + (Q+1)/2$ 列。当 Q 足够大时, $\varepsilon(Q)$ 可以忽略^[6]。

由于高阶EADF的模值很小^[6],可以定义 $\mathbf{G}_t \in \mathcal{C}^{N \times M}$ 为EADF矩阵 \mathbf{G}_e 的截短形式,即

$$\mathbf{G}_t = [[\mathbf{G}_e]_{-M_e}, \dots, [\mathbf{G}_e]_{M_e}] \quad (3)$$

且

$$M = 2M_e + 1 \quad (4)$$

$N < M < Q$ 。 M_e 为所选取的EADF最高阶数的绝对值。

可得

$$\mathbf{a}(\phi) = \mathbf{G}_t \mathbf{d}(\phi) + \varepsilon(M, Q) \quad (5)$$

其中 $\varepsilon(M, Q)$ 为映射误差,与测量点数和选取的模式数目有关。 $\mathbf{d}(\phi) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$ 为范德蒙向量,

$$\mathbf{d}(\phi) = \left[e^{-j\frac{M-1}{2}\phi}, \dots, 1, \dots, e^{j\frac{M-1}{2}\phi} \right]^T \quad (6)$$

实际应用中,可根据需要选择合适的模式数目 M 和测量点数 Q ,以实现对阵列流形的分解,使映射误差足够小。

4 基于MST的波束空间PM-Root-MUSIC

考虑式(5),可重写式(1)的信号模型为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{G}_t \mathbf{D}\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (7)$$

其中 \mathbf{G}_t 为 $N \times M$ 的矩阵(参见式(3)), $\mathbf{D} = [\mathbf{d}(\phi_1), \dots, \mathbf{d}(\phi_K)]$, ϕ_1, \dots, ϕ_K 为 K 个独立信源的到达角。

构造 $\tilde{M} \times N$ 的波束变换矩阵 \mathbf{F}_e^H ^[2]

$$\mathbf{F}_e^H = \mathbf{C}_v \mathbf{V}^H \quad (8)$$

其中 $\mathbf{C}_v = \text{diag}\{j^{-\tilde{M}_e}, \dots, j^{-1}, j^0, j^1, \dots, j^{\tilde{M}_e}\}$, $\mathbf{V} = \sqrt{N}[\mathbf{w}_{-\tilde{M}_e}, \dots, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{\tilde{M}_e}]$, $\gamma_n = 2\pi n/N$, $\mathbf{w}_m^H = (1/N)[1, e^{jm\gamma_0}, \dots, e^{jm\gamma_{N-1}}]$,激励模式 $m \in [-\tilde{M}_e, \tilde{M}_e]$, $\tilde{M}_e = [k_0 r]$ 为接近 $k_0 r$ 的最小整数, $\tilde{M} = 2\tilde{M}_e + 1$,如果阵元稀疏,上述方法计算的 \tilde{M} 大于 N ,则只能取最大的 \tilde{M}_e ,使得 $\tilde{M} = 2\tilde{M}_e + 1 \leq N$ 。

令 $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}_e^H \mathbf{X}(t)$,考虑 p 个快拍,则

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}(t_1), \mathbf{Y}(t_2), \dots, \mathbf{Y}(t_p)] \quad (9)$$

应用PM方法,令

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中 \mathbf{Y} 由式(9)定义, \mathbf{Y}_1 为 $K \times p$ 的矩阵,而 \mathbf{Y}_2 的维数为 $(\tilde{M} - K) \times p$,则线性算子

$$\mathbf{P} = \mathbf{Y}_1^+ \mathbf{Y}_2^H \quad (11)$$

其中 \mathbf{Y}_1^+ 为 \mathbf{Y}_1 的Moore-Penrose逆。构造矩阵

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{I}_{(\tilde{M}-K)} \end{pmatrix} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{I}_{(\tilde{M}-K)}$ 为单位矩阵, 可以将 \mathbf{E} 正交化以提高性能。

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(\mathbf{E}^H \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^H \quad (13)$$

根据文献[11]可得

$$\mathbf{D}^H \mathbf{G}_t^H \mathbf{F}_e^H \mathbf{E}_0 = 0 \quad (14)$$

因此波束空间谱可表示为

$$P(\phi) = \frac{1}{\mathbf{d}(\phi)^H \mathbf{G}_t^H \mathbf{F}_e^H \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_0^H \mathbf{F}_e \mathbf{G}_t \mathbf{d}(\phi)} \quad (15)$$

由于 $\mathbf{d}(\phi)$ 的范德蒙结构, 应用求根 MUSIC 即可实现对方位角的估计。

5 算法复杂度分析

如文献[11]所述, 对于 $n \times p$ 维阵列数据 \mathbf{Y} ($p \gg n$), k 个目标, PM 方法计算量约为奇异值分解 (svd) 的 k/n 。针对稀疏均匀圆阵, 比较本文算法与文献[5,10]中算法的复杂度。令 UCA 阵元数为 n ,

目标数为 k , 快拍数 p , 本文算法与文献[5]中 MST 模式阶数都为 M (见式(4)), 文献[10]中选取的相位模式阶数也为 M , 本文算法与文献[10]中的波束空间变换维数相同, 且尽可能使波束空间维数与阵元数一致。即, 当阵元数为奇数时, 波束空间变换维数与阵元数一致, 当阵元数为偶数时, 波束空间变换维数为 $n-1$ 。波束空间变换可以在数据接收过程中动态实现, 因此不再计入算法复杂度。对于矩阵 svd 与求逆等运算的具体计算量, 本文采用文献[12]中的结论: 对于 $n \times n$ 的方阵, svd 计算量为 $25n^3$ 次浮点运算 (flop), 求逆为 $(8/3)n^3$ flop。对于式(13)中的正交化过程, 由于 $(\mathbf{E}^H \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{I}_{n-k} + \mathbf{P}^H (\mathbf{I}_k + \mathbf{P} \mathbf{P}^H)^{-1} \mathbf{P}$, 因此式(13)中原本 $(n-k) \times (n-k)$ 维矩阵求逆转化为 $k \times k$ 维矩阵求逆, 求逆环节算法复杂度仅为 $O(k^3)$ 。相对于奇异值分解, 自相关矩阵计算等计算量很小, 所以不再予以考虑。表 1 给出了阵元数为奇数时文献[10]算法, 文献[5]算法, 本文算法的算法复杂度比较。对于偶数阵元的情形, 本文算

表 1 算法复杂度比较

| | 文献[10]算法 | 文献[5]算法 | 本文算法 |
|---------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 计算自相关矩阵 | $n^2 p$ | $n^2 p$ | $k^2 p + (8/3)k^3 + k(n-k)p + k^2(n-k)$ |
| 计算噪声子空间 | $25n^3$ | $25n^3$ | |
| 计算多项式系数 | $Mn(n-k) + M^2(n-k)$ | $Mn(n-k) + M^2(n-k)$ | $Mn(n-k) + M^2(n-k)$ |
| 总计 | $n^2 p + 25n^3 + Mn(n-k) + M^2(n-k)$ | $n^2 p + 25n^3 + Mn(n-k) + M^2(n-k)$ | $k^2 p + p(n-k)k + k^2(n-k) + Mn(n-k) + M^2(n-k) + (8/3)k^3$ |

法与文献[10]算法中的 n 用 $n-1$ 代替。

本文比较的 3 种算法都需要 M 阶多项式求根, 而且当前有不少多项式求根算法计算量小、精度高, 对于 n 阶多项式, 其算法复杂度都远远小于 $O(n^3)$ [13,14], 与自相关矩阵计算、svd 等相比计算量很小, 因此不再计入算法复杂度。

6 算法仿真

仿真 1 考虑 8 个全向阵元组成的均匀圆阵, 半径为 $\lambda/2.6$, 仿真的快拍数为 256, 独立实验 200 次, 噪声为加性高斯白噪声。图 1 显示两个窄带独立信号源 $\phi_1 = 10^\circ$, $\phi_2 = 80^\circ$ 入射目标阵列时分别采用 UCA-RB-MUSIC [2]、UCA-PM-MUSIC [3]、阵元空间 Root-MUSIC [5] 以及本文所提出的方法进行 DOA 估计时, 不同信噪比下的均方根误差。波束空间变换矩阵维数与阵元数相等 $\tilde{M} = 7$, MST 的测量点数 Q 为 361, 模式数目选择为 $M_e = 14$ 。

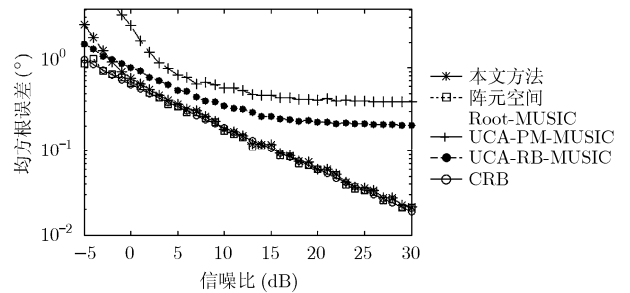


图 1 8 个全向阵元, 半径 $\lambda/2.6$ 均匀圆阵, DOA 估计随信噪比变化的均方根误差

从图 1 可以看出, 在阵元数目有限的情况下, 随着信噪比降低 UCA-PM-MUSIC [3] 会出现比 UCA-RB-MUSIC [2] 更严重的性能下降。而本文提出的基于 MST 的波束空间 PM-Root-MUSIC 与 UCA-PM-MUSIC, UCA-RB-MUSIC 等波束空间变换类算法相比, 性能有了明显的提高, 在信噪比大于 0 dB 时具有接近 Cramer-Rao 门限的估计精度。与基于特

征值分解的阵元空间 Root-MUSIC^[5]相比,在信噪比大于 0 dB 时性能几乎一致。

仿真 2 考虑 11 个全向阵元的均匀圆阵,半径为 1.3λ , 快拍数为 256, 独立实验 200 次, 噪声为加性高斯白噪声, 考虑两个独立信号源, 方位角分别为目标 1: 10° , 目标 2: $10^\circ + \delta$, 两目标角度间隔 δ 以 1° 为步长从 1° 到 100° 间变化, 信噪比 10 dB。在上述条件下, 由于阵元稀疏, 传统的波束空间变换类方法已失效。仿真就文献[10]中的稀疏均匀圆阵 Root-MUSIC 方法和本文的方法做了比较。其中, 波束空间变换矩阵维数 $\tilde{M} = 11$, MST 的模式数目选择为 $M_e = 20$, MST 的测量点数同仿真 1。仿真结果如图 2 所示。从图中可以看出, 本文提出的 DOA 估计方法在阵元稀疏的 UCA 情况下依然具有良好的估计性能, 与稀疏均匀圆阵 Root-MUSIC 方法^[10]相比避免了特征分解, 而精度基本相同, 估计性能接近 Cramer-Rao 下限。

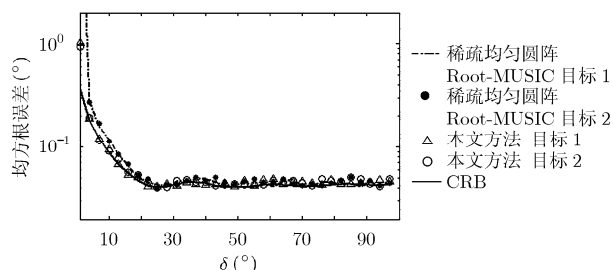


图 2 11 个全向阵元, 半径为 1.3λ 均匀圆阵, DOA 估计随方位角间隔变化的均方根误差

对于仿真 1 的实验环境, 结合表 1 中的结论, 本文算法计算量约为 10933flop, 文献[5]算法计算量约为 35622flop, 减少约 64.28%, 对于仿真 2 的环境, 本文算法计算量约为 29141flop, 文献[10]算法计算量约为 83439flop, 减少约 65.05%, 由此可见, 较少的阵元数虽然使文献[11]中的结论不再准确, 但本文方法计算量的减少仍然是明显的。

7 结论

本文提出了基于 MST 的波束空间 PM-Root-MUSIC 算法, 在降低计算量的同时, 获得了接近 Cramer-Rao 下限的估计性能。利用 MST, 能够以极小的误差将 UCA 的导向矢量映射到类似线阵的虚拟阵列上, 避免了相位模式激励残余项对 DOA 估计精度的影响。而将 PM 方法应用于均匀圆阵, 又可以避免特征值分解, 减小算法的复杂度。对于阵元数目较少或阵元稀疏的均匀圆阵, 该方法与传统的波束空间变换类算法相比性能明显提高, 与基于特征分解的类似算法具有基本相同的性能。

参考文献

- [1] Mathews C P and Zoltowski M D. Eigenstructure techniques for 2-D angle estimation with uniform circular arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(9): 2395-2407.
 - [2] Davies D E N and Rudge A W. Ed. *The Handbook of Antenna Design*. London, UK, Peregrinus, 1983, Vol.2, Ch.12.
 - [3] Lian Xiao-hua and Zhou Jian-jiang. 2-D DOA estimation for uniform circular arrays with PM. 7th International Symposium on Antennas, Propagation & EM Theory, Beijing, 2006: 1-4.
 - [4] Belloni F and Koivunen V. Beamspace transform for UCA: Error analysis and bias reduction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(8): 3078-3089.
 - [5] Belloni F, Richter A, and Koivunen V. Extension of root-MUSIC to non-UCLA array configurations. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP)*, France, 2006: 897-900.
 - [6] Belloni F, Richter A, and Koivunen V. DoA estimation via manifold separation for arbitrary array structures. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(10): 4800-4810.
 - [7] Costa M, Richter A, Belloni F, and Koivunen V. Polynomial rooting-based direction finding for arbitrary array configurations. 5th IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM08) Germany, 2008: 58-62.
 - [8] Doron M A and Doron E. Wavefield modeling and array processing, Part I—Spatial sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(10): 2549-2559.
 - [9] Rubsam M and Gershman A B. Performance analysis of root-music-based direction-of-arrival estimation for arbitrary non-uniform array, 5th IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM08), Germany. 2008: 381-385.
 - [10] Goossens R, Rogier H, and Werbrouck S. UCA root-MUSIC with sparse uniform circular arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8): 4095-4099.
 - [11] Marcos S, Marsal A, and Benidir M. Propagator method for source bearing estimation. *Signal Processing*, 1995, 42(2): 121-138.
 - [12] 季飞, 等. 基于 DOA 矩阵法的矢量传感器阵列二维波达方向估计. *电子与信息学报*, 2008, 30(8): 1886-1889.
 - [13] Ji Fei, et al. A DOA matrix algorithm for 2-D direction finding estimation with electromagnetic vector sensor arrays. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(8): 1886-1889.
 - [14] Neff C A and Reif J H. An efficient algorithm for the complex roots problem. *Journal of Complexity*, 1996, 12(2): 81-115.
 - [15] Lang M and Frenzel B C. Polynomial root finding. *IEEE Signal Processing Letters*, 1994, 1(10): 141-143.
- 潘捷: 男, 1982年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理。
周建江: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为信号处理、目标特征的提取与控制。
汪飞: 男, 1976年生, 博士, 副教授, 研究方向为谱分析、信号特征参量估计等。