

归一化子带自适应滤波器步长控制

倪锦根 商慧亮 李 锋*
(复旦大学电子工程系 上海 200433)

摘要: 定步长子带自适应滤波器必须在快的收敛速度和低的稳态失调之间进行折中。根据自适应滤波器系数向量均方偏差与步长之间的函数关系, 该文采用使自适应滤波器系数向量均方偏差在每次迭代更新时最速下降的方法, 提出一种步长控制算法来解决上述问题。该算法可以兼得快的收敛速度和低的稳态失调。实验结果验证了该方法的有效性。

关键词: 子带自适应滤波器; 步长控制; 均方偏差

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)11-2606-04

Step-Size Control for the Normalized Subband Adaptive Filter

Ni Jin-gen Shang Hui-liang Li Feng

(Department of Electronic Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: Fixed step-size Subband Adaptive Filters (SAFs) must carry out a trade-off between fast convergence rate and low steady-state misadjustment. According to the functional relationship between the Mean-Square Deviation (MSD) of the coefficient vector of the adaptive filter and step-size, this paper proposes a step-size control algorithm to address the problem above, which is derived by the largest decrease method of the MSD of the coefficient vector of the adaptive filter for each iterative update. This algorithm can obtain both fast convergence rate and low steady-state misadjustment. Experimental results verify the validity of the proposed method.

Key words: Subband Adaptive Filter (SAF); Step-size control; Mean-Square Deviation (MSD)

1 引言

自适应滤波技术在系统辨识、信道均衡、噪声消除、主动噪声控制和雷达等领域得到了广泛应用^[1]。最小均方(LMS)和归一化最小均方(NLMS)算法, 因其计算量小、稳定性好和易于实现等优点, 被广泛使用。但一方面, LMS和NLMS算法的收敛速度会随自适应滤波器阶数的增加而下降^[2]; 另一方面, 当输入信号为相关信号时, LMS和NLMS算法的收敛速度较慢^[1]。在许多应用中, 都需要用到高阶自适应滤波器, 如免提电话和电话会议系统中的回声消除。这些未知系统模型具有很长的冲击响应, 往往有上千个采样点的数量级, 且其输入信号的相关性较强^[2]。上述两个特点使得LMS和NLMS自适应滤波算法在这类应用中受到了限制。

为解决上述问题, 一些学者提出了子带自适应滤波的方法。在子带自适应滤波中, 输入信号和期望响应被滤波器组分割并抽取, 形成子带信号。然后, 自适应滤波在子带中进行。子带分割的作用是减小输入信号的相关性, 从而加快滤波器收敛速

度^[2]。在近年来提出的子带自适应滤波算法中, 无混叠、临界抽取子带自适应滤波器因其收敛速度快、稳态失调小等优点得到了人们较多的关注^[3-5]。一些文献对该类子带自适应滤波器的性质和性能进行了研究^[6-9]。由 Lee 和 Gen 提出的归一化子带自适应滤波器(NSAF)^[5]因其固有的去相关和最小扰动特性具有较好的收敛性能^[7]。

LMS 类自适应滤波算法的性能, 如收敛速度和稳态失调等, 由步长来控制。步长越大(越小), 则收敛越快(慢), 稳态失调越大(小)^[10]。在自适应滤波过程中, 如果选用固定步长, 则该自适应滤波器必须在快的收敛速度和低的稳态失调之间进行折中, 从而使得自适应滤波器不能兼得快的收敛速度和低的稳态失调。由于 Lee 和 Gen 提出的 NSAF 使用了定步长方法, 因而该自适应滤波器也必须在收敛速度和稳态失调之间进行折中。

研究表明, 使用变步长方法可以在某种程度上解决上述问题^[10,11]。变步长方法的基本思想是: 在自适应滤波初始阶段, 选用较大的步长, 使得滤波器具有较快的收敛速度; 在自适应滤波接近稳态阶段, 选用较小的步长, 使得滤波器具有较小的稳态失调。本文提出了一种易于实现的步长控制方法来

改进 NSAF 的收敛性能。仿真结果表明, 该算法能够兼得较快的收敛速度和较低的稳态失调。

2 信号模型与定步长归一化子带自适应滤波器(NSAF)

在自适应滤波中, 一般认为期望响应 $d(n)$ 满足如下的线性模型^[1,9]:

$$d(n) = \mathbf{w}_o^T \mathbf{u}(n) + \eta(n) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u}(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]^T$ 为输入信号向量, $u(n)$ 为输入信号, M 为自适应滤波器系数向量长度; $\mathbf{w}_o = [w_{o,0}, w_{o,1}, \dots, w_{o,M-1}]^T$ 为未知系统的系数向量; $\eta(n)$ 为系统噪声, 且与输入信号 $u(n)$ 相互独立。

将横向 FIR 自适应滤波器扩展到子带方法, Lee 和 Gen^[5]提出了图 1 所示的子带自适应滤波器结构。在该图中, $H_i(z)$ 和 $G_i(z)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, 分别表示分析滤波器组和综合滤波器组; $\downarrow N$ 和 $\uparrow N$ 分别表示对信号进行 N 倍抽取和 N 倍内插。各信号之间的关系如图 1 所示。根据最小扰动原理, Lee 和 Gen^[5]推导出了如下的自适应滤波器系数向量更新公式

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) + \mu \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{u}_i(k) \|\mathbf{u}_i(k)\|^{-2} e_{i,D}(k) \quad (2)$$

其中 $\hat{\mathbf{w}}(k) = [\hat{w}_0(k), \hat{w}_1(k), \dots, \hat{w}_{M-1}(k)]^T$ 为自适应滤波器在 kN 时刻的系数向量, 且每输入 N 个信号样值, 该向量更新一次; $\mathbf{u}_i(k) = [u_i(kN), u_i(kN-1), \dots, u_i(kN-M+1)]^T$ 为 kN 时刻的子带输入信号向量; μ 为固定步长, 且必须满足 $0 < \mu < 2$ 。

3 步长控制算法

为解决上述定步长算法存在的不足, 本文以下

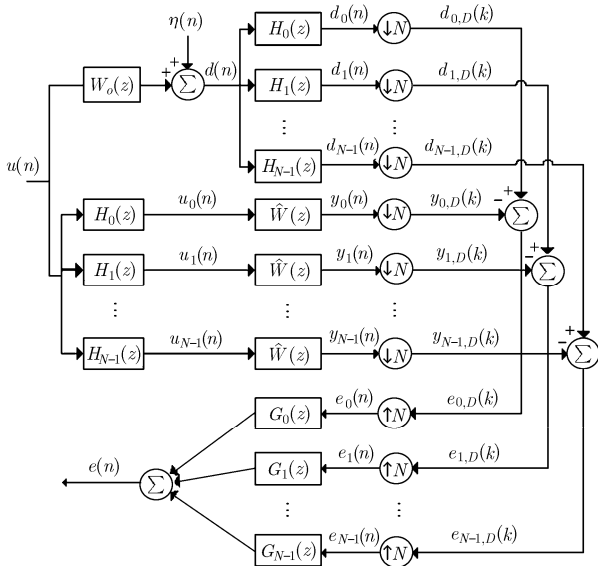


图 1 NSAF 结构框图

部分将推导一种步长控制算法。

定义 kN 时刻的系数误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$, 无干扰误差向量 $\mathbf{e}_a(k)$ 和均方偏差 $c(k)$ 分别为 $\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \mathbf{w}_o - \hat{\mathbf{w}}(k)$, $\mathbf{e}_a(k) = \mathbf{U}^T(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ 和 $c(k) = E[\|\boldsymbol{\varepsilon}(k)\|^2]$ ^[9], 其中 $\mathbf{U}(k) = [\mathbf{u}_0(k), \mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_{N-1}(k)]$ 和 $\mathbf{e}_D(k) = [e_{0,D}(k), e_{1,D}(k), \dots, e_{N-1,D}(k)]^T$ 分别为 kN 时刻的输入信号矩阵和子带误差向量。文献[9]证明了下式成立

$$c(k) - c(k+1) \approx -\mu^2 E[\mathbf{e}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)] + 2\mu E[\mathbf{e}_a^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)] \quad (3)$$

其中

$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k) = \text{diag}[\|\mathbf{u}_0(k)\|^{-2}, \|\mathbf{u}_1(k)\|^{-2}, \dots, \|\mathbf{u}_{N-1}(k)\|^{-2}]$ 为对角矩阵, 其对角元素分别为 $\|\mathbf{u}_i(k)\|^{-2}, i = 0, 1, \dots, N-1$ 。

令 $\delta_{(k+1)}(\mu) = c(k) - c(k+1)$ 。如果在任何时刻 kN , 选择合适的 μ , 使得 $\delta_{(k+1)}(\mu)$ 取得最大值, 则均方偏差能够以最快的值下降, 从而自适应滤波器能够得到最佳的收敛性能^[12]。由式(3)可知, $\delta_{(k+1)}(\mu)$ 是关于 μ 的开口向下的 2 次函数, 当 $\delta_{(k+1)}(\mu)$ 取得最大值时, μ 在 kN 时刻的最佳值 $\mu_o(k)$ 满足

$$\mu_o(k) \approx \frac{E[\mathbf{e}_a^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)]}{E[\mathbf{e}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)]} \quad (4)$$

式(4)表示的最优步长在实际应用中无法实现, 需要进一步简化。令 $\boldsymbol{\eta}_{i,D}(k)$ 为 kN 时刻第 i 个子带系统噪声, $\boldsymbol{\eta}_D(k) = [\eta_{0,D}(k), \eta_{1,D}(k), \dots, \eta_{N-1,D}(k)]^T$ 为 kN 时刻子带系统噪声向量。在式(1)线性模型条件下, 子带系统噪声向量满足^[9]

$$\mathbf{e}_D(k) = \mathbf{U}^T(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k) + \boldsymbol{\eta}_D(k) = \mathbf{e}_a(k) + \boldsymbol{\eta}_D(k) \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)可得

$$\begin{aligned} \mu_o(k) &\approx \frac{E\{[\mathbf{e}_D(k) - \boldsymbol{\eta}_D(k)]^T \boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)\}}{E[\mathbf{e}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)]} \\ &= 1 - \frac{E[\boldsymbol{\eta}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)]}{E[\mathbf{e}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)]} \\ &= 1 - \frac{E\{\boldsymbol{\eta}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)[\mathbf{e}_a(k) + \boldsymbol{\eta}_D(k)]\}}{E[\mathbf{e}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)]} \\ &= 1 - \frac{E[\boldsymbol{\eta}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_a(k)] + E[\boldsymbol{\eta}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\boldsymbol{\eta}_D(k)]}{E[\mathbf{e}_D^T(k)\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_D(k)]} \end{aligned} \quad (6)$$

忽略 $\boldsymbol{\eta}_D(k)$ 与 $\hat{\mathbf{w}}(k)$ 之间的弱相关性(若 $\eta(n)$ 为高斯白噪声, $\boldsymbol{\eta}_D(k)$ 与 $\hat{\mathbf{w}}(k)$ 不相关^[9]), 则 $\boldsymbol{\eta}_D(k)$ 与 $\mathbf{e}_a(k)$ 不相关。再考虑到 $\eta(n)$ 与输入信号 $u(n)$ 相互独立, 式(6)可展开为

$$\mu_o(k) \approx 1 - \frac{E[\boldsymbol{\eta}_D^T(k)]E[\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(k)\mathbf{e}_a(k)] + \sum_{i=0}^{N-1} E[\eta_{i,D}^2(k)]E[\|\mathbf{u}_i(k)\|^{-2}]}{\sum_{i=0}^{N-1} E[e_{i,D}^2(k)\|\mathbf{u}_i(k)\|^{-2}]} \quad (7)$$

在许多自适应滤波器应用领域, 可以将系统噪声 $\eta(n)$ 近似看成均值为零的白噪声, 从而有 $E[\boldsymbol{\eta}_D(k)] \approx \mathbf{0}$ 。再利用完全重构滤波器组子带信号功率之和等于全带信号功率这一性质^[13], 可得 $E[\eta_{i,D}^2(k)] \approx (\sigma_\eta^2 / N)$, 其中 σ_η^2 为系统噪声的方差, 其值可在自适应滤波器处于静态时从输出端周期性估计得到^[11,14,15]。由上述分析可知, 式(7)可简化为

$$\mu_o(k) \approx 1 - \frac{(\sigma_\eta^2 / N) \sum_{i=0}^{N-1} E[\|\mathbf{u}_i(k)\|^{-2}]}{\sum_{i=0}^{N-1} E[e_{i,D}^2(k) \|\mathbf{u}_i(k)\|^{-2}]} \quad (8)$$

由于式(8)中的均值无法求得, 因此本文使用自适应信号处理中的常用方法, 即使用式(9)瞬时值来代替式(8)中的均值

$$\mu_o(k) \approx 1 - \frac{(\sigma_\eta^2 / N) \sum_{i=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_i(k)\|^{-2}}{\sum_{i=0}^{N-1} e_{i,D}^2(k) \|\mathbf{u}_i(k)\|^{-2}} \quad (9)$$

由于使用瞬时值代替均值会使得波动加大, 从而会增大稳态失调。为了解决瞬时值代替均值带来的波动, 可以使用式(10)的滑动窗来平滑步长。

$$\hat{\mu}(k) = \lambda \hat{\mu}(k-1) + (1-\lambda)\mu_o(k) \quad (10)$$

其中 λ 为遗忘因子, 在本算法中其典型的取值范围为 $0.9 \leq \lambda \leq 0.99$ 。式(10)是自适应滤波中用来求均值和对信号或参数进行平滑的常用方法。在本文中, λ 取值的大小可以在较小的范围内调节收敛速度的快慢和稳态失调的大小: 当 λ 取值较小时, 收敛速度较快; 当 λ 取值较大时, 稳态失调较小。在上述取值范围内, 本文算法的学习曲线对 λ 的变化敏感性较小。经过式(10)平滑之后, $\hat{\mu}(k)$ 仍然存在较小的波动性, 从而使得 $\hat{\mu}(k)$ 在滤波器接近和达到稳态阶段时在少数采样点可能出现负值。但是, 在任何时刻自适应滤波器的步长都不应该为负, 因此, 本文采用式(11)的步长。

$$\mu(k) = \begin{cases} \hat{\mu}(k), & \hat{\mu}(k) > 0 \\ \hat{\mu}_0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

来代替 $\hat{\mu}(k)$, 使得步长始终为正。式(11)中 $\hat{\mu}_0$ 是一个大于零的小常数。实验结果表明, 对于 $N=8$ 子带自适应滤波器而言, 当 $\hat{\mu}_0$ 在 0.08 附近取值时, 本文算法能够得到较好的收敛性能。

由式(9)–式(11)可知, 在任何采样时刻 kN , 式(11)的步长满足 $\hat{\mu}_0 \leq \mu(k) < 1$, 因而其始终位于步长稳定范围 $0 < \mu < 2$ 以内^[5]。这说明本文设计的步长在任何采样时刻 kN , 都能使得算法稳定。最后, 用式(11)表示的 $\hat{\mu}(k)$ 代替式(2)中的定步长 μ , 即可得本文步长控制 NSAF 算法。

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) + \mu(k)$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{u}_i(k) [\|\mathbf{u}_i(k)\|^2 + \delta]^{-1} e_{i,D}(k) \quad (12)$$

其中 δ 为一个很小的正常数, 即正则化因子。引入该常数是为了避免输入信号很小时引起数值计算困难^[5]。

4 实验结果与分析

文献[5]已将定步长 NSAF 算法与其他相关算法进行了比较。比较结果证实了定步长 NSAF 算法性能的优越性。因此, 本文只需与定步长 NSAF 算法进行比较。

分别利用本文步长控制算法和文献[5]的定步长算法辨识一个未知系统。该未知系统为一个房间回声路径的脉冲响应, 长度为 1000。使用两组具有不同相关性的信号作为滤波器的输入: 第 1 组为高斯白噪声信号 $u_1(n)$; 第 2 组为有色信号 $u_2(n)$, 该信号被建模为 $u_2(n) = 0.9u_2(n-1) + \varphi(n)$, 其中 $\varphi(n)$ 为高斯白噪声。系统噪声 $\eta(n)$ 为高斯白噪声, 且与输入信号相互独立, 其方差 $\sigma_\eta^2 = 0.001$ 。在两种信号输入情况下, 输入信号的大小都满足使得自适应滤波系统的信噪比 $\text{SNR} = 30$ dB。选用精确重建余弦调制滤波器组对输入信号和期望信号进行分割, 其子带数目 $N = 8$ 。在两组实验中, 文献[5]定步长算法的步长取为 $\mu = 1.0$ 和 $\mu = 0.1$; 本文算法的参数取为 $\lambda = 0.95$, $\hat{\mu}_0 = 0.08$ 。定义 kN 时刻的归一化失调 (Misalignment)^[5] 为 $10 \lg E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k)] / (\mathbf{w}_o^T \mathbf{w}_o)$, 单位为 dB。所有学习曲线为 25 次独立实验的平均。实验结果分别如图 2 和图 3 所示: 图 2 是第 1 组信号, 即高斯白噪声信号 $u_1(n)$ 输入时的学习曲线; 图 3 是第 2 组信号, 即有色信号 $u_2(n)$ 输入时的学习曲线。

从图 2 和图 3 可以看出: 对于白输入信号和有色输入信号, 文献[5]的定步长方法都必须在快的收敛速度和低的稳态失调之间进行折中; 而使用本文提出的步长控制算法, 既能得到较快的收敛速度, 又能达到较低的稳态失调。

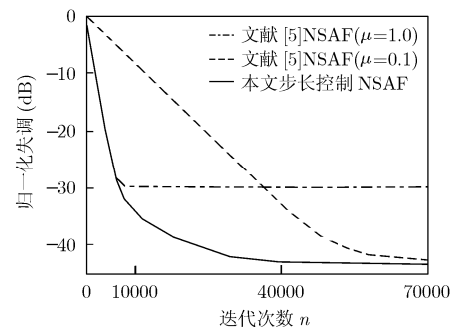


图2 输入信号为白噪声信号时的算法学习曲线

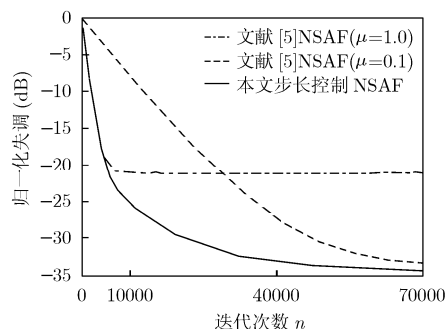


图 3 输入信号为有色信号时的算法学习曲线

5 结束语

在自适应滤波器应用领域, 如果输入信号为有色信号, 使用子带自适应滤波器能够得到更快的收敛速度。然而, 固定步长的子带自适应滤波器必须在快的收敛速度和低的稳态失调之间进行折中。根据步长和自适应滤波器系数向量均方偏差之间的关系, 利用每次系数向量更新过程中使均方偏差下降最快的原理, 本文针对归一化子带自适应滤波器, 提出了一种有效的步长控制算法。仿真结果表明, 使用该算法来控制滤波器系数更新过程中步长的变化, 能够得到较快的收敛速度和较低的稳态失调。

参考文献

- [1] Haykin S. Adaptive Filter Theory [M]. Fourth edition, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002, 22-34: 331-340.
- [2] Diniz P S R. Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation [M]. Second edition, Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002: 467-499.
- [3] Courville M D and Duhamel P. Adaptive filtering in subbands using a weighted criterion [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(9): 2359-2371.
- [4] Pradhan S S and Reddy V U. A new approach to subband adaptive filtering [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(3): 655-664.
- [5] Lee K A and Gan W S. Improving convergence of the NLMS algorithm using constrained subband updates [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(9): 736-739.
- [6] Miyagi S and Sakai H. Convergence analysis of alias-free subband adaptive filters based on a frequency domain

technique [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(1): 79-89.

- [7] Lee K A and Gan W S. Inherent decorrelating and least perturbation properties of the normalized subband adaptive filter [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4475-4480.
- [8] Lee K A and Gan W S. On the subband orthogonality of cosine-modulated filter banks [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2006, 53(8): 677-681.
- [9] Lee K A, Gan W S, and Kuo S M. Mean-square performance analysis of the normalized subband adaptive filter [C]. The Fortieth Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, Pacific Grove, California, October 29-November 1, 2006: 248-252.
- [10] Bershad N J, Bermudez J C M, and Tournet J Y. An affine combination of two LMS adaptive filters—Transient mean-square analysis [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(5): 1853-1864.
- [11] Benesty J, Rey H, and Vega L R, *et al.* A nonparametric VSS NLMS algorithm [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2006, 13(10): 581-584.
- [12] Shin H C, Sayed A H, and Song W J. Variable step-size NLMS and affine projection Algorithms. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(2): 132-135.
- [13] Petraglia M R and Batalheiro P. Nonuniform subband adaptive filtering with critical sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(2): 565-575.
- [14] Kong S J, Hwang K Y, and Song W J. An affine projection algorithm with dynamic selection of input vectors [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2007, 14(8): 529-532.
- [15] Rey H, Vega L R, and Tressens S, *et al.* Variable explicit regularization in affine projection algorithm: robustness and optimal choice [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(5): 2096-2109.

倪锦根: 男, 1979年生, 博士生, 研究方向为自适应信号处理、多抽样率与滤波器组理论及语音信号处理。

商慧亮: 男, 1978年生, 博士生, 讲师, 研究方向为电路理论、网络图论及信号处理。

李 锋: 男, 1946年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为电路理论、电路故障诊断、网络图论及信号处理等。