

最小二乘法重构 r 重平移不变子空间采样的研究

朱肇轩 王厚军 王志刚

(电子科技大学自动化工程学院 成都 610054)

摘要: 该文根据 r 重平移不变子空间采样模型, 提出了一种基于最小二乘法的 r 重平移不变子空间采样重构方法, 并且获得了重构滤波器的频域表达式; 同时利用 Hilbert 空间投影理论分析了重构误差; 最后, 以调幅信号为例, 验证了最小二乘法重构 r 重平移不变子空间采样的可行性。

关键词: r 重平移不变子空间; 最小二乘法; 采样重构; 投影理论

中图分类号: TP274⁺.2

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)11-2649-04

Studying on Reconstruction Sampling in Shift-Invariant Subspace with Multiplicity r from Least Squares Method

Zhu Zhao-xuan Wang Hou-jun Wang Zhi-gang

(College of Automation, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: According to the model of sampling in shift-invariant subspace with multiplicity r , this paper proposes a reconstruction method of sampling in shift-invariant subspace with multiplicity r based on least squares method, moreover, obtains the reconstruction filter's frequency expression. And the reconstruction error is analyzed from the projection theory of Hilbert space. Finally, with amplitude modulation signal as example, the reconstruction method of sampling in shift-invariant subspace with multiplicity r based on least squares method is proved by simulation, the results show that the reconstruction algorithm is effective.

Key words: Shift-invariant subspace with multiplicity r ; Least squares method; Sampling reconstruction; Projection theory

1 引言

传统的采样理论为限带信号提供了有效的采样方式。在数学上, 传统的采样与重构过程是将限带信号投影到平移不变空间 $V = \text{span}\{\text{sinc}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ^[1]。随着信号复杂性的提高, 近年来, 将传统的采样理论推广到了平移不变空间^[2], Hilbert 空间^[3], 多分辨率信号空间^[4]等。Unser 等人在样条函数空间上逼近信号, 消除采样中由于抗混叠滤波器非理想所引起的误差^[5]; Eldar 等人在 Unser 研究基础上将样条函数空间推广到更一般的平移不变空间 $V_\varphi = \text{span}\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ^[6], 并且对其误差进行了分析; 另外, Vidyanathan 等人利用样条函数表示非限带信号^[7], 然后通过非均匀采样、微分采样实现非限带信号采样。上述研究都是建立在单一空间中, 然而, 实际采样信号通常是联合子空间上的信号, 因此, Do 等人建立了信号在联合子空间的采样理论^[8], 为复杂信号采集提供了更有效的方法, 其中重

点分析了采样空间的选择, 从而为联合子空间采样提供了理论的指导。本文在 Do 的研究基础上, 将最小二乘法应用于 r 重平移不变子空间采样中, 实现采样重构; 同时针对于最小二乘法引进的重构误差进行了分析; 最后通过实例对最小二乘法重构 r 重平移不变子空间采样的可行性进行了验证。

2 r 重平移不变子空间采样模型

设 $\Psi(t) = [\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{r-1}(t)]^T$ 是 r 重生成函数, 定义空间 V 为

$$V = \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_i[n] \varphi_i(t-nT) : c_i[n] \in l^2 \right\}$$

则称 V 是 $\Psi(t)$ 生成的 r 重平移不变子空间。如果函数序列 $\{\varphi_i(t-nT)\}_{i=0,1,\dots,r-1,n \in \mathbb{Z}}$ 对于任意 $x(t) \in V$, 存在两个正常数 A 和 $B(0 < A \leq B < \infty)$ 使得

$$A \|x(t)\|^2 \leq \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle x(t), \varphi_i(t-nT) \rangle|^2 \leq B \|x(t)\|^2$$

则称 $\{\varphi_i(t-nT)\}_{i=0,1,\dots,r-1,n \in \mathbb{Z}}$ 组成子空间 V 的一个框架。

现将信号 $x(t)$ 由平移不变子空间 V 逼近, 为分析方便, 称 r 重平移不变子空间 V 为重构空间, 其

2008-12-02 收到, 2009-05-04 改回

国家自然科学基金(60772145)和新世纪优秀人才支持计划(NCET-06-0808)资助课题

逼近形式如式(1)所示。

$$x(t) \approx \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_i[n] \varphi_i(t - nT) \quad (1)$$

对于 r 重平移不变子空间采样则是获取信号 $x(t)$ 在空间 V 中系数序列 $\{c_i[n]\}_{i=0,1,\dots,r-1,n \in \mathbb{Z}}$ ，为了实现 r 重平移不变子空间采样，首先构建 L 重平移不变子空间 W 作为采样空间，且空间 W 的框架为 $\{h_k(t - nT)\}_{k=0,1,\dots,L-1,n \in \mathbb{Z}}$ ，接着以 $\{h_k(t - nT)\}_{k=0,1,\dots,L-1,n \in \mathbb{Z}}$ 作为采样函数对信号进行采样，其采样结构如图 1 所示。

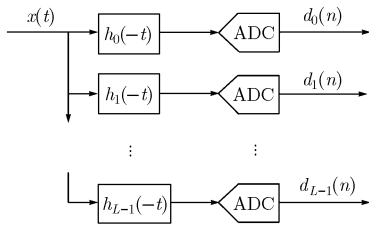


图 1 采样结构

根据图 1 结构，采样数据可由式(2)所描述。

$$d_k[n] = \langle x(t), h_k(t - nT) \rangle \quad k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (2)$$

分析式(2)可知，采用空间 W 对信号进行采样，等效于将信号投影到空间 W 中，然而实际采样需获取的是信号在空间 V 中系数序列 $\{c_i[n]\}_{i=0,1,\dots,r-1,n \in \mathbb{Z}}$ ，因此需增加一个算子 $T: W \rightarrow V$ 实现 W 空间与 V 空间的转换，定义算子 $T: W \rightarrow V$ 为重构算子或重构滤波器。根据上述分析可构建 r 重平移不变子空间采样模型如图 2 所示。

按照图 2 所示的 r 重平移不变子空间采样结构， r 重平移不变子空间采样首先将信号 $x(t)$ 投影到采样空间 W 中获得 $P_W(x(t))$ (P_W 为投影算子)，然后再由 ADC 采样信号 $x(t)$ 投影在空间 W 中的系数 $\{d_k[n]\}_{k=0,1,\dots,L-1,n \in \mathbb{Z}}$ ，最后利用重构算子 T 将信号从 W 空间转换到 V 空间；如果利用几何表示 r 重平移不变子空间采样过程，其过程如图 3 所示，分析图 3 可知，算子 T 选择将直接决定于 r 重平移不变子空间采样的精度；本文将采用最小二乘法确定算子 T 。

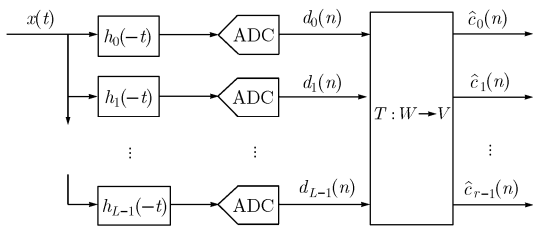


图 2 r 重平移不变子空间采样模

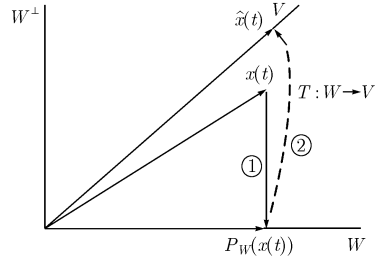


图 3 r 重平移不变子空间采样过程几何表示

3 最小二乘法重构

根据如图 2 所示的采样结构，选择最小二乘法的目标函数为

$$J_{LS} = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|d_i[k] - \hat{d}_i[k]\|^2 \quad (3)$$

式中， $\{\hat{d}_i[n]\}_{i=0,1,\dots,L-1,n \in \mathbb{Z}}$ 为重构后信号 $\hat{x}(t)$ 在空间 W 上的投影系数。

按照 Parseval 理论，式(3)可变形为式(4)形式。

$$J_{LS} = \sum_{i=0}^{L-1} \int_{-\pi}^{\pi} \|D_i(\omega) - \hat{D}_i(\omega)\|^2 d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathbf{D}(\omega) - \hat{\mathbf{D}}(\omega)) (\mathbf{D}(\omega) - \hat{\mathbf{D}}(\omega))^H d\omega \quad (4)$$

其中， $D_i(\omega)$ 、 $\hat{D}_i(\omega)$ 分别是 $d_i[k]$ 和 $\hat{d}_i[k]$ 的离散傅里叶变换， $\mathbf{D}(\omega) = (D_0(\omega), D_1(\omega), \dots, D_{L-1}(\omega))^T$ ， $\hat{\mathbf{D}}(\omega) = (\hat{D}_0(\omega), \hat{D}_1(\omega), \dots, \hat{D}_{L-1}(\omega))^T$ 。

根据 r 重平移不变子空间采样结构， $\hat{D}_i(\omega)$ 的计算表达式可由式(5)所示。

$$\hat{D}_i(\omega) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{L-1} D_j(\omega) G_{k,j}(\omega) \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} \Psi_k(\omega + 2\pi l) H_i(\omega + 2\pi l)^* \quad (5)$$

其中， $\Psi_k(\omega)$ 为 $\varphi_k(t)$ 的傅里叶变换， $G_{k,j}(\omega)$ 是矩阵 $\mathbf{G}(\omega)$ ($\mathbf{G}(\omega)$ 为重构算子 T 的傅里叶变换) 第 k 行 j 列的元素， $H_i(\omega)$ 是 $h_i(-t)$ 的傅里叶变换。

将式(5)写成矩阵的形式如式(6)所示。

$$\hat{\mathbf{D}}(\omega) = \mathbf{A}_{H\Psi}(\omega) \mathbf{G}(\omega) \mathbf{D}(\omega) \quad (6)$$

其中， $\mathbf{G}(\omega)$ 为 $r \times L$ 的矩阵； $\mathbf{A}_{H\Psi}(\omega)$ 是一个 $L \times r$ 的矩阵，且第 i 行 k 列元素 $\{\mathbf{A}_{H\Psi}(\omega)\}_{i,k}$ 为

$$\{\mathbf{A}_{H\Psi}(\omega)\}_{i,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} H_i^*(\omega + 2\pi l) \Psi_k(\omega + 2\pi l)$$

将式(6)代入式(4)，目标函数式(4)变形为式(7)形式。

$$J_{LS} = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathbf{D}(\omega) - \mathbf{A}_{H\Psi}(\omega) \mathbf{G}(\omega) \mathbf{D}(\omega)) \cdot (\mathbf{D}(\omega) - \mathbf{A}_{H\Psi}(\omega) \mathbf{G}(\omega) \mathbf{D}(\omega))^H d\omega \quad (7)$$

当目标函数式(7)最小值时，可求得重构算子 T 的傅里叶变换 $\mathbf{G}(\omega)$ 的表达式如式(8)所示。

$$G(\omega) = A_{H\Psi}(\omega)^H / (A_{H\Psi}(\omega)A_{H\Psi}(\omega)^H) \quad (8)$$

根据上面分析, 式(8)则表示了采用最小二乘法实现 r 重平移不变子空间采样重构时重构算子 T 的频域表达式。

4 误差分析

首先定义 Hilbert 空间中子空间 A 和 B 之间夹角的余弦和正弦, 其定义式分别由式(9)和式(10)所示^[9]。

$$\cos(A, B) = \inf_{f \in A, \|f\|=1} \|P_B f\| \quad (9)$$

$$\sin(A, B) = \sup_{f \in A, \|f\|=1} \|P_{B^\perp} f\| \quad (10)$$

根据图 3 所示的 r 重平移不变子空间采样过程的几何表示, 其重构后信号 $\hat{x}(t) \in V$, 因此 r 重平移不变子空间采样系统重构误差 $e(x(t))$ 满足式(11)关系。

$$\begin{aligned} \|e(x(t))\|^2 &= \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 \\ &= \|P_V x(t) - \hat{x}(t)\|^2 + \|P_{V^\perp} x(t)\|^2 \\ &\geq \|P_{V^\perp} x(t)\|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

由式(11)可知, $\|P_{V^\perp} x(t)\|^2$ 是重构误差 $\|e(x(t))\|^2$ 的最小值; 同时, 结合图 3 所示的 r 重平移不变子空间采样过程可获得 $e(x(t))$ 与 $P_{V^\perp} x(t)$ 的关系如式(12)所示。

$$P_{V^\perp} x(t) = P_{V^\perp} e(x(t)) \quad (12)$$

根据式(8)所示的重构滤波器表达式, 当信号 $x(t) \in V \oplus W^\perp$ 时, 采用最小二乘法重构 r 重平移不变子空间采样重构后信号 $\hat{x}_{LS}(t)$ 为

$$\hat{x}_{LS}(t) = E_{VW^\perp}(x(t)) \quad (13)$$

其中, E_{VW^\perp} 表示为沿 W 垂直空间 W^\perp 投影到 V 空间的算子。

按照式(13), 最小二乘法重构误差 $e_{LS}(x(t))$ 的表达式如式(14)所示。

$$e_{LS}(x(t)) = x(t) - \hat{x}_{LS}(t) = E_{W^\perp V}(x(t)) \quad (14)$$

结合式(12)、式(14)以及两子空间夹角余弦值的定义, 可得 $\|e_{LS}(x(t))\|^2$ 的上界为

$$\|e_{LS}(x(t))\|^2 \leq \|P_{V^\perp} x(t)\|^2 / \|\cos(V^\perp, W^\perp)\|^2 \quad (15)$$

根据式(11), $\|P_{V^\perp} x(t)\|^2$ 是重构误差的最小值, 再结合两子空间夹角正弦值的定义, 则可得出 $\|P_{V^\perp} x(t)\|^2$ 与 $\|e_{LS}(x(t))\|^2$ 的关系如下。

$$\|P_{V^\perp} x(t)\|^2 / \|\sin(V, W^\perp)\|^2 \leq \|e_{LS}(x(t))\|^2 \quad (16)$$

结合式(15)和式(16), 最小二乘法重构误差 $\|e_{LS}(x(t))\|^2$ 的上界和下界如式(17)所示。

$$\begin{aligned} \|P_{V^\perp} x(t)\|^2 / \|\sin(V, W^\perp)\|^2 &\leq \|e_{LS}(x(t))\|^2 \\ &\leq \|P_{V^\perp} x(t)\|^2 / \|\cos(V^\perp, W^\perp)\|^2 \end{aligned} \quad (17)$$

综合上述分析可得出最小二乘法的重构误差几何描述如图 4 所示, 分析图 4 可知, 当信号 $x(t)$ 偏离 V 空间越远, 其重构误差越大。如果 $x(t) \in V$, 则信号可通过最小二乘法完全重构。

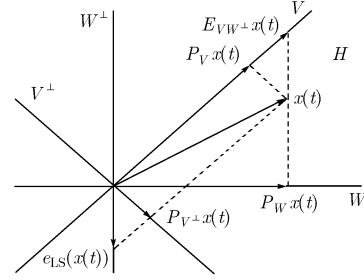


图 4 最小二乘法重构误差几何表示

5 仿真与分析

构建 2 重平移不变子空间采样系统, 采样空间 W 的生成函数 $h_0(-t)$ 和 $h_1(-t)$ 如式(18)所示。

$$h_0(-t) = \delta(t), \quad h_1(-t) = \delta(t - T/3) \quad (18)$$

重构空间 V 的生成函数 $\varphi_0(t)$ 和 $\varphi_1(t)$ ($\text{sinc}(t) = (\sin \pi t) / (\pi t)$) 分别为

$$\varphi_0(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \exp\left(j2\pi \frac{5}{6T} t\right) \quad (19)$$

$$\varphi_1(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \exp\left(-j2\pi \frac{5}{6T} t\right) \quad (20)$$

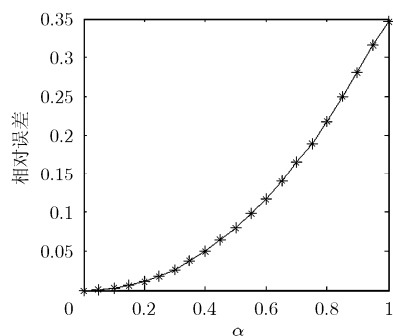
2 重平移不变子空间采样系统以采样周期 $T_s = T = 10^{-8}$ s 对信号

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - \alpha) 2 \sin(2\pi 2 \times 10^8 t / 3) \cos(2\pi 10^8 t / 3) \\ &\quad + \alpha \sum_{n \in \mathbb{Z}} (s_0(t + 10^{-8} n) + s_1(t + 10^{-8} n)) \end{aligned} \quad (21)$$

进行采样, 其中

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{10^{-8}}{3}\right] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ s_1(t) &= \begin{cases} 1, & t \in \left[\frac{10^{-8}}{3}, \frac{2 \times 10^{-8}}{3}\right] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

然后采用最小二乘法重构 2 重平移不变子空间采样, 重构后相对误差 ($\|e_{LS}(x(t))\|^2 / \|x(t)\|^2$) 与式(21)中 α 值关系如图 5 所示。分析图 5 可知, 当 $\alpha = 0$ 时, 相对误差接近于零; 接着, 随 α 增加而增加, 其增加速度也随 α 增加而增加。图 5 中增加趋势与第 4

图5 重构相对误差与 α 的关系

节分析的极其相似。

为了进一步分析最小二乘法重构的失真情况,将重构后波形与原信号波形进行对比,当 $\alpha = 0$ 、0.25、0.5、0.75时重构波形分别如图6中的6(a)、6(b)、6(c)、6(d)图所示,其中“虚线”为重构波形,“实线”表示原信号波形。分析图6中4个图可得,当 $\alpha = 0$ 时,重构失真非常小,信号可完全重构。接着随 α 增加,信号失真越来越严重。从而进一步验证了当信号 $x(t)$ 偏离 V 空间越远,其重构误差越大的结论。

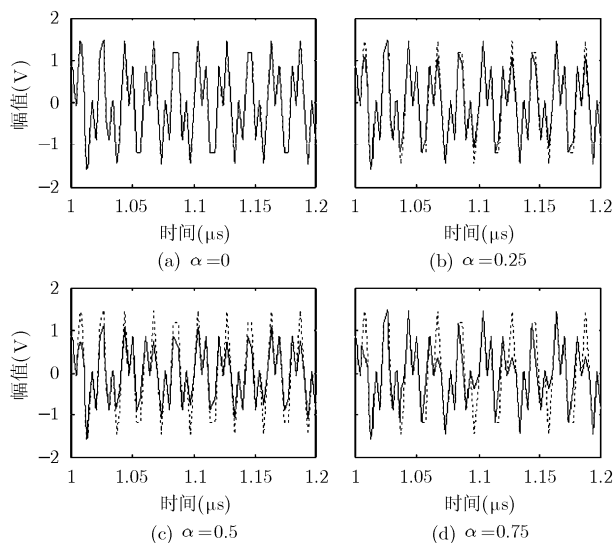


图6 最小二乘法重构波形

6 结论

根据信号在 r 重平移不变子空间中近似表达式,建立起了 r 重平移不变子空间采样模型;同时针对

于 r 重平移不变子空间采样的重构提出了一种基于最小二乘法的重构方法;并且,对最小二乘法重构 r 重平移不变子空间采样所引进的误差进行了详细的分析,得出了信号偏离重构空间 V 越远,重构误差越大的结论;最后通过实例验证了重构误差随信号偏离重构 V 空间距离增加而增大,只有当信号在重构空间 V 中时,才可实现完全重构。

参考文献

- [1] Butzer P L. A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 1983, 3(1): 185-212.
- [2] Chen W, Itoh S, and Shiki J. On sampling in shift-invariant spaces. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, 48(10): 2802-2810.
- [3] Chang Eon Shin, Mun Bae Lee, and Kyung Soo Rim. Nonuniform sampling of bandlimited functions. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(7): 3814-3819.
- [4] Selesnick I W. Interpolating multiwavelets bases and the sampling theorem. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(6): 1615-1621.
- [5] Remani S and Unser M. Nonideal sampling and regularization theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(3): 1055-1070.
- [6] Eldar Y C and Unser M. Non-ideal sampling and interpolation from noisy observations in shift-invariant spaces. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(7): 2636-2651.
- [7] Vaidyanathan P P. Generalization of the sampling theorem: seven decades after nyquist. *IEEE Transactions on Circuits and System*, 2001, 48(9): 1094-1109.
- [8] Lu Y M and Do M N. A theory for sampling signals From a Union of Subspaces. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2334-2345.
- [9] Tang W S. Oblique projections, biorthogonal Riesz bases and multiwavelets in Hilbert space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2000, 128(2): 463-473.

朱肇轩: 男, 1981年生, 博士生, 研究方向为数据采集与处理。

王厚军: 男, 1961年生, 教授, 研究方向为自动化检测系统、数据域测试、军事电子装备故障诊断等。

王志刚: 男, 1967年生, 副教授, 研究方向为信号检测与处理。