

## 参数优化模型的正交逼近算法

杨丹<sup>①</sup> 游磊<sup>②</sup> 张小洪<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(重庆大学软件学院 重庆 400044)

<sup>②</sup>(重庆大学数理学院 重庆 400044)

**摘要:** 在图像拼接中, 该文将图像配准转化成一个无约束最优化问题, 运用2次型理论提出一种新的参数优化模型算法——正交方向逼近法。该算法根据参数矩阵最优函数特有的性质, 无须计算函数的导数或梯度, 仅须计算函数值即可。其优点是克服了以往算法所要求占用大量计算机内存的缺点, 仅用一个矩阵存储数字信息。通过仿真实验证明: 该算法收敛速度快, 结果精度高, 具有较高的实用价值

**关键词:** 图像拼接; 图像配准; 凹凸性; 最优化

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)11-2610-04

## Orthogonal Approximation Algorithm for Parameter Model Optimization

Yang Dan<sup>①</sup> You Lei<sup>②</sup> Zhang Xiao-hong<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(College of Software Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

<sup>②</sup>(College of Mathematics & Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** Image registration is transformed an unconstrained optimization problem in image mosaic. Parameter optimization model algorithm is proposed by means of quadratic form theory-- orthogonal approximation algorithm. According to properties of best-function, a direct method is adopted without calculating derivative or gradient, only calculating function values. The advantages are eliminating of taking up large computer memory, only using a matrix to store information. Simulation experiments show the algorithm has advantages of fast convergence, result precisely and good practicality.

**Key words:** Image mosaic; Image registration; Concavity and convexity; Optimization

### 1 引言

图像配准是计算机视觉及其相关领域的一个基本问题, 也是图像拼接中关键一步。图像配准的根本问题就是找出图像对之间的变换关系。目前, 国内外对于图像配准的研究已取得一些成果<sup>[1-3]</sup>, 其中在图像配准过程中, 采用8参数变换模型式(1)<sup>[4]</sup>, 经过变换可得式(2), 如果有4对以上匹配点, 就可以得到一个超定方程组  $A_{m \times 8} X = b$ , 由于线性解法结果不稳定, 就采用了非线性方法 Levenberg-Marquardt 算法<sup>[5]</sup>, 得到最优化8参数模型。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'x & -x'y \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -xy' & -yy' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2)$$

Levenberg-Marquardt 算法是一个非常优秀的无约束最优化算法, 它结合了梯度法和牛顿法的优点, 几乎可以应用于所有的无约束最优化问题, 但是它主要存在两个缺点: (1)输入参数过多, 收敛速度依赖于输入参数; (2)在迭代过程中需要计算大量的梯度, 从而影响计算效率。为了解决以上问题, 在研究变换矩阵最优函数的基础上, 提出一种正交方向逼近法, 该方法主要有3个优点: (1)克服传统方法占用大量计算机内存的缺点; (2)结果精度高, 从理论上讲, 可以达到任何计算机可以达到的范围; (3)过程简单, 收敛速度快。

### 2 正交逼近算法原理及其实现

#### 2.1 目标函数及其性质

将获得的匹配点对代入式(2), 可以得到超定方程组  $A_{m \times 8} X = b$ , 最优解采用累计误差平方和最小

的方法得到, 那么就转化成为无约束 8 元 2 次方程最优化问题:

$$\arg \min f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \left( b_i - \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \right)^2 \quad (n=8) \quad (3)$$

针对式(3)运用 2 次型理论<sup>[6-8]</sup>研究它的特殊性, 先将式(3)转化为 2 次型形式:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \left( b_i - \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \right)^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{C}$$

其中  $\mathbf{A}_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}]$ ,  $\mathbf{B} = 2 \left[ \sum_{i=1}^m a_{i1} b_i \ \dots \ \sum_{i=1}^m a_{in} b_i \right]$ ,

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^m b_i^2, \mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i.$$

**引理 1** 矩阵  $\mathbf{A}$  是半正定矩阵。

**证明** 因为  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i = [\mathbf{A}_1^T \ \dots \ \mathbf{A}_m^T] [\mathbf{A}_1^T$

$\dots \ \mathbf{A}_m^T]^T = \mathbf{S}_{n \times m} \mathbf{S}_{n \times m}^T$ , 可得  $\mathbf{A}$  是对称阵。对于任意的  $\mathbf{X}^T$ , 有  $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = (\mathbf{S}_{n \times m}^T \mathbf{X})^2 \geq 0$ , 所以矩阵  $\mathbf{A}$  是半正定矩阵。

**定义 1** 设  $D \subseteq R^n$  是凸集, 函数  $f(\mathbf{X})$  在定义  $D$  上, 若对任意的实数  $t \in (0,1)$  以及任意的两点  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in D$ , 恒有:  $f(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}) \leq tf(\mathbf{X}) + (1-t)f(\mathbf{Y})$ , 则称函数  $f(\mathbf{X})$  在定义  $D$  上为凸函数。

**定理 1** 设  $n$  元 2 次函数  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{C}$ , 其中  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶半正定矩阵, 秩为  $r$ , (1)存在可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{I}_r$  是  $r$  阶单位矩阵; (2)则对任意的  $\mathbf{X} \in D$ ,  $f(\mathbf{X})$  在  $D$  上是凸函数。

**证明** (1)秩为  $r$  的 2 次型  $f(\mathbf{X})$  可以经过满秩

线性代换  $\mathbf{Y} = \mathbf{Q} \mathbf{X}$  转化为:  $f(\mathbf{X}) = (\mathbf{Q} \mathbf{X})^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{C}$ , 取  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ , 有  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;

(2)取  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} = [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n]^T$ , 有  $f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 +$

$\mathbf{B} \mathbf{X} + \mathbf{C}$ ; 那么,

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}) &= [t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}]^T \mathbf{A} [t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}] \\ &\quad + 2\mathbf{B}[t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}] + \mathbf{C} \\ &= [\mathbf{P}^{-1}(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y})]^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \mathbf{P}^{-1}[t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}] \\ &\quad + 2\mathbf{B}[t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}] + \mathbf{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= t^2 (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X})^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}) + 2t(1-t) \\ &\quad \cdot (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{X})^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}) \\ &\quad + (1-t)^2 (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y})^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}) \\ &\quad + 2\mathbf{B}[t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}] + \mathbf{C} \end{aligned}$$

设  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y} = [\beta_1 \ \dots \ \beta_n]^T$ , 那么  $(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y})^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\cdot (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^r \beta_i^2$ 。这时,

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}) &= t^2 \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^r \beta_i^2 \\ &\quad + 2t(1-t) \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i + 2t\mathbf{B}\mathbf{X} \\ &\quad + 2(1-t)\mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

又因为  $tf(\mathbf{X}) + (1-t)f(\mathbf{Y}) = t \sum_{i=1}^r \alpha_i^2 + (1-t)$

$\cdot \sum_{i=1}^r \beta_i^2 + 2t\mathbf{B}\mathbf{X} + 2(1-t)\mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{C}$ , 所以,

$$\begin{aligned} &f(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}) - (tf(\mathbf{X}) + (1-t)f(\mathbf{Y})) \\ &= t(t-1) \sum_{i=1}^r (\alpha_i - \beta_i)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

可得  $f(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}) \leq tf(\mathbf{X}) + (1-t)f(\mathbf{Y})$ , 那么  $f(\mathbf{X})$  在  $D$  上是凸函数。

由此可得性质 1。

**性质 1** 存在  $N$  点  $\mathbf{X}_i \in D (i=1, \dots, N)$ , 有  $f(\mathbf{X}_i) = f(\mathbf{X}_j)$ , 那么存在实数  $l_i \in (0,1) (i=1, \dots, N)$ , 满足  $\sum_{i=1}^N l_i = 1$ , 使得:  $f\left(\sum_{i=1}^N l_i \mathbf{X}_i\right) \leq f(\mathbf{X}_j) (j=1, \dots, N)$ 。

这个性质的几何意义可以这样理解: 在  $N$  个函数值相等的点所构成的一个凸包中, 要么形成一个超平面上的“低谷”; 要么所有点相等。

### 2.2 算法理论依据

有了以上的性质和定理, 现提出一个命题, 这将为提出的算法提供支持和依据。

**命题 1** 存在  $N$  点  $\mathbf{X}_i \in D (i=1, \dots, N)$ , 有  $f(\mathbf{X}_i) = f(\mathbf{X}_j)$ , 设  $\mathbf{P}_{r \times n}$  是  $\mathbf{P}$  的前  $r$  行, 如果  $\mathbf{P}_{r \times n} \mathbf{X}_i = \mathbf{P}_{r \times n} \mathbf{X}_j$ , 那么存在实数  $l_i (i=1, \dots, N)$ , 满足  $\sum_{i=1}^N l_i = 1$ , 使得  $f\left(\sum_{i=1}^N l_i \mathbf{X}_i\right) = f(\mathbf{X}_j) (j=1, \dots, N)$ 。

**证明** 由于  $f(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}) - (tf(\mathbf{X}) + (1-t)$

$$f(\mathbf{Y}) = t(t-1) \sum_{i=1}^r (\alpha_i - \beta_i)^2$$

当  $\mathbf{P}_{r \times n} \mathbf{X} = \mathbf{P}_{r \times n} \mathbf{Y}$  时,  $f(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}) = tf(\mathbf{X}) + (1-t)f(\mathbf{Y})$ ; 又因为  $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$ , 所以  $f(t\mathbf{X} + (1-t)\mathbf{Y}) = f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$ 。用几何意义表示, 由  $X$  和  $Y$  所决定的直线上所有点的函数值相等, 满足命题条件。同理可以扩展到 3、4, 甚至  $N$  个点, 因此有:

$$f\left(\sum_{i=1}^N l_i \mathbf{X}_i\right) = \sum_{i=1}^N l_i f(\mathbf{X}_i) = f(\mathbf{X}_j), \text{ 它的几何意义}$$

可以这样理解: 满足命题 1 条件的  $N$  个点所决定的一个  $K(K \leq N)$  维空间上所有的点的函数值相同。

命题 1 是性质 1 中第 2 种特殊情况。如果性质 1 中, 加上  $\mathbf{P}_{r \times n} \mathbf{X}_i \neq \mathbf{P}_{r \times n} \mathbf{X}_j$  这个条件, 那么他的几何意义将是: 在  $N$  个函数值相等的点所构成的一个凸包中, 形成一个超平面上的“低谷”; 如果加上  $\mathbf{P}_{r \times n} \mathbf{X}_i = \mathbf{P}_{r \times n} \mathbf{X}_j$  这个条件, 就是所有点相等。

### 2.3 算法思想及步骤

有了以上分析, 先给出算法的主要步骤:

步骤1 给定步长  $d_0$ , 以及  $n$  个正交方向  $\mathbf{e}_i$ , 采用线性解法得到初始解  $\mathbf{X}_0$ , 函数值为  $f(\mathbf{X}_0)$ , 以及最小精度  $\varepsilon_0$ ;

步骤2 计算所有  $f(\mathbf{X}_0 \pm d_0 \mathbf{e}_i) (i = 1, \dots, n)$ , 并且同  $f(\mathbf{X}_0)$  比较大小; 如果  $f(\mathbf{X}_0)$  是极小值, 进入步骤 3; 如果  $f(\mathbf{X}_0)$  不是极小值, 进入步骤 4;

步骤3 判断  $d_0$  是否大于  $\varepsilon_0$ , 如果  $d_0$  大于  $\varepsilon_0$ , 减少步长  $d_0 = d_0 / N$  ( $N$  是正整数), 进入步骤 2; 否则进入步骤 5;

步骤4 选取极小值的  $f(\mathbf{X}_0 \pm d_0 \mathbf{e}_i)$ , 更新  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0 \pm d_0 \mathbf{e}_i$ , 进入步骤 2;

步骤5 输出  $\mathbf{X}_0$  以及  $f(\mathbf{X}_0)$ 。

最后给出收敛性的简单证明。

首先,  $f(\mathbf{X})$  是凸函数, 那么存在极小值点, 设为  $\mathbf{X}_{\min}$ ; 假设  $\mathbf{X}_k$  是每一步迭代轨迹点, 显然  $f(\mathbf{X}_k)$  是单调递减的, 由于  $f(\mathbf{X})$  有下界, 那么  $f(\mathbf{X}_k)$  必然收敛; 假设  $f(\mathbf{X}_k)$  收敛于  $\mathbf{X}'$  且  $\mathbf{X}' \neq \mathbf{X}_{\min}$ ; 那么  $\forall \varepsilon > 0$ , 有  $f(\mathbf{X}') \leq f(\mathbf{X}' \pm \varepsilon \mathbf{e}_i)$ , 必定存在一个方向  $\mathbf{e}_j$ , 使得  $f(\mathbf{X}') < f(\mathbf{X}' + \varepsilon \mathbf{e}_j)$ , 否则由命题 1 描述相同, 所有点的函数值将相等; 当  $\varepsilon$  充分小时, 可知  $f(\mathbf{X}')$  是局部极小值点, 由于  $f(\mathbf{X})$  的凸函数性质, 局部极小值点必然为全局极小值点, 所以  $f(\mathbf{X}_k)$  收敛于  $\mathbf{X}'$  且  $\mathbf{X}' = \mathbf{X}_{\min}$ 。

### 3 实验结果及其分析

本算法具有一般性, 是针对所有如式(3)这类目标函数的。为了检验算法效果, 分别对实际图像进行了实验。图 1 所示, 4 对图像进行了 SIFT 特征检测<sup>[9]</sup>以及 RANSAC<sup>[10]</sup>剔出误匹配后的匹配结果。在此基础上采用正交方向逼近法计算  $\min f(\mathbf{X})$  和变换矩阵。

表 1 说明设置的精度不一样, 得到的结果精度不同, 并且可以看出本文算法的精度可以达到 Levenberg-Marquardt 算法精度。图 2 说明了采用低精度的变换矩阵同 Levenberg-Marquardt 算法的效果是一样的: 在图中提取每一个点, 采用公式(1)作变换, 而变换矩阵分别使用了低精度变换矩阵和通过 Levenberg-Marquardt 算法获得的变换矩阵。变换后, 获得的两组对应坐标点再求平均累计误差  $(1/N) \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_2^2$  ( $N$  为坐标点总数)。可以看出误差非常小, 所以求得低精度就足够, 从而达到节约时间的目的。

另外, 正交逼近算法需要输入参数个数为 2 个: 初始步长和步长阈值; 而 Levenberg-Marquardt 算

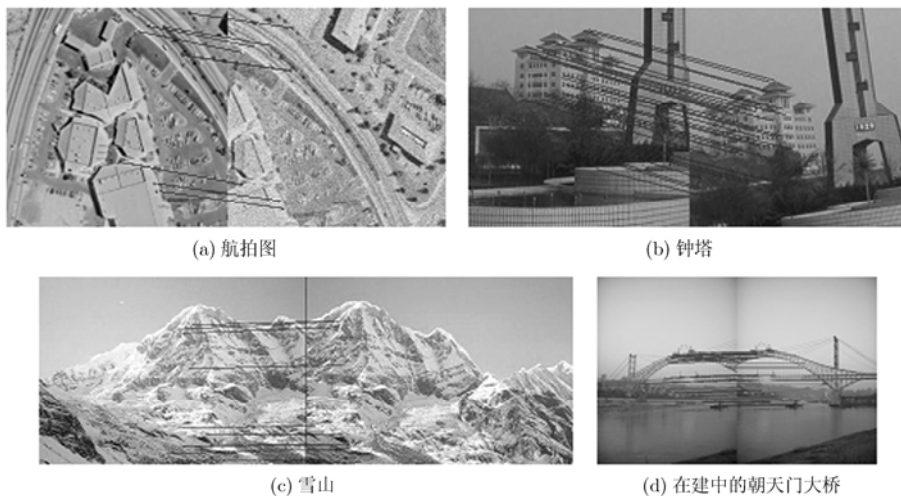


图 1 匹配结果

表 1 正交逼近法同 Levenberg-Marquardt 比较

匹配 点数	正交逼近法				Levenberg-Marquardt 算法	
	低精度( $\epsilon < 10e-5$ )		高精度( $\epsilon < 10e-12$ )		$\min f(x)$	$x$
	$\min f(x)$	$x$	$\min f(x)$	$x$		
图 1(a) 10	0.9921	-0.1195 139.9955	0.9930	-0.1205 140.0179	0.9930	-0.1205 140.0179
	0.0773	0.1235 0.9945 -27.2260	0.0592	0.1249 0.9954 -27.2273	0.0592	0.1249 0.9954 -27.2273
	0.0000	0.0000 1.0000	0.0000	-0.0000 1.0000	0.0000	-0.0000 1.0000
图 1(b) 47	1.0069	-0.1241 49.1863	1.0071	-0.1238 49.1885	1.0071	-0.1238 49.1885
	92.2365	0.1387 0.9998 -71.3706	92.2183	0.1387 0.9907 -71.3724	92.2183	0.1387 0.9907 -71.3724
	0.0000	-0.0000 1.0000	-0.0000	0.0000 1.0000	-0.0000	0.0000 1.0000
图 1(c) 10	0.8941	0.2164 145.2447	0.8924	0.2131 145.2472	0.8924	0.2131 145.2472
	0.0513	-0.0453 0.9858 5.8346	0.0354	-0.0453 0.9863 5.8340	0.0354	-0.0453 0.9863 5.8340
	0.0000	0.0000 1.0000	-0.0000	-0.0000 1.0000	-0.0000	-0.0000 1.0000
图 1(d) 51	0.9997	0.0389 150.8689	0.9997	0.0390 150.8604	0.9997	0.0390 150.8604
	209.6067	-0.0421 0.9988 7.5847	209.6055	-0.0423 0.9987 7.5834	209.6055	-0.0423 0.9987 7.5834
	-0.0000	0.0000 1.0000	-0.0000	0.0000 1.0000	0.0000	0.0000 1.0000

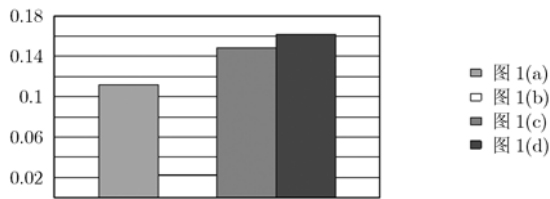


图 2 平均累计误差

法多达 6 个。一般此可见正交逼近算法对参数依赖少, Levenberg-Marquardt 算法收敛速度受输入参数的限制。

以上实验表明本算法针对性强、结果精度高、速度快, 适用于所有变换参数优化模型。

#### 4 结束语

本文运用 2 次型理论提出一种新的参数优化模型算法。此算法有这几个特点: (1)无需计算梯度, 是一种简洁方法; (2)算法过程简单, 只是数值计算, 易于实现; (3)对硬件要求低, 占用计算机内存少; (4)结果精度高, 精度可以达到计算机所能达到的任何范围; (5)收敛速度快, 在保证精度的情况下, 可以很快收敛。此外根据参数优化函数的凹凸性, 在搜索过程中, 不会陷入局部极值, 而且它的极值必定是一点或者在一个连通片中, 这样保证了收敛性, 因此本算法是一种稳健而实用的算法。

#### 参考文献

[1] 赵向阳, 杜立民. 一种全自动自动稳健的图像自动拼接融合

算法[J]. 中国图像图形学报, 2004, 9(4): 417-422.

[2] Brown M and Lowe D G. Recognising panoramas[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision, Nice, France, 2003, 2: 1218-1255.

[3] 李艳丽, 向辉. 稳健的球面全景图全自动生成算法[J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2007, 19(11): 1393-1398.

[4] Hartley R I. In defence of the 8-point algorithm[C]. Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision, Cambridge, Britain, 1995: 1064-1070.

[5] 杨敏. 基于 Levenberg-Marquardt 算法的图像拼图研究[J]. 电子工程师, 2007, 33(10): 43-45.

[6] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000: 210-241.

[7] 江苏师范学院数学系《解析几何》编写组. 解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988: 244-265.

[8] 韩凌燕. 二次型化简二次曲线方法的探究[J]. 山东科学, 2008, 21(2): 65-67.

[9] Lowe D G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints[J]. *International Journal of Computer Vision*, 2004, 60(2): 91-110.

[10] Chum O, Matas J, and Kittler J. Locally Optimized RANSAC[J]. DAGM Symposium on Pattern Recognition, LNCS, 2003, 2781: 236-243.

杨 丹: 男, 1962 年生, 教授, 研究方向为数字图像处理、模式识别与计算机视觉、科学与工程计算等。

游 磊: 男, 1983 年生, 硕士生, 研究方向为数字图像处理。

张小洪: 男, 1973 年生, 副教授, 研究方向为模式识别、人工智能、软件工程及应用。