

基于随机矩阵理论的协作频谱感知

王磊 郑宝玉 李雷

(南京邮电大学信号处理与传输研究院 南京 210003)

摘要: 认知无线电频谱共享技术在新一代无线通信网络中具有广泛的应用前景, 频谱感知是其中最重要的环节。该文提出了一种新的在多认知用户环境中, 基于大维随机矩阵理论的协作频谱感知算法。充分利用随机矩阵的渐近谱分布特性及小样本下最大特征值收敛特性来提高感知性能。理论分析和仿真结果均表明, 新算法性能明显优于同类算法和典型的能量检测算法。

关键词: 无线通信; 频谱感知; 随机矩阵理论; 特征值; 协作

中图分类号: TN92

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)08-1925-05

Cooperative Spectrum Sensing Based on Random Matrix Theory

Wang Lei Zheng Bao-yu Li Lei

(Institute of Signal Processing and Transmission, Nanjing University of Posts and Telecom, Nanjing 210003, China)

Abstract: Spectrum sharing of Cognitive Radios (CRs) has broad application prospects to the new generation of wireless communication networks. In multi-cognitive-user circumstance, using tools from asymptotic random matrix theory, a new cooperative scheme for frequency band sensing is proposed. The property of asymptotic spectrum distribution of random matrices and the convergence of the maximum eigenvalue with low samples are well considered. Theoretical analysis and simulations results show that the new algorithm is obviously outperforming congener algorithms and classical energy detection techniques.

Key words: Wireless communication; Spectrum sensing; Random matrix theory; Eigenvalue; Cooperative

1 引言

在无线通信中, 随着不同网络、不同业务和不同接入方式的不断增长, 其频谱资源越来越紧缺。如何进一步提高频谱利用率, 从而进一步提高系统容量和通信服务质量是下一代无线通信亟待解决的问题。认知无线电 CR(Cognitive Radio)频谱共享技术是解决该领域问题的一个崭新的研究课题, 在新一代无线通信网络中具有非常广阔的应用前景。认知无线电的认知循环中最基本的也是最初的步骤就是感知频谱。目前感知方式可分为: 发射机感知、协作感知和接收机感知(即基于干扰温度的感知)等^[1]。其中, 协作感知能够减小阴影和多径衰落的影响, 提高感知率, 因而受到普遍关注。

最近, 已有学者将大维随机矩阵理论应用于频谱感知^[2, 3]。随机矩阵理论(RMT)是研究大维随机矩阵的经验谱分布函数在一定条件下特殊收敛性质的相关理论^[4], 现已被广泛应用于无线通信领域中, 如无线信道容量、阵列信号处理、接收机性能分析、

通信系统设计等的各个方面。有关 RMT 在无线通信领域应用的具体情况参见文献[4]。基于 RMT 的频谱感知算法具有能够在噪声统计特性未知的情况下成功感知的优点^[3, 4]。

2008年初, Cardoso 等人在文献[2]中提出的一种基于大维随机矩阵理论的协作频谱感知算法(以下简称 LSC 算法), 该算法利用 M-P 律给出了大系统情况下的频谱感知算法, 但它在实际应用中采样数较小的情况下性能不够理想。Zeng 等人提出了基于大维随机矩阵理论的最大最小值特征值(MME)算法^[3], 该算法充分考虑了实际中采样数较小的问题, 它是一种非协作感知算法, 仅研究了单个认知用户的情况。

本文在充分分析上述算法的基础上提出了一种新的基于 RMT 的多用户协作频谱感知算法。新算法是一种基于 RMT 的协作最大最小特征值频谱感知算法(简称为 CMME 算法), 该算法保持了基于 RMT 能够在噪声统计特性未知的情况下成功感知的优点, 又充分利用多认知用户共享信息进行协作认知来提高算法的性能, 同时很好地解决了实际应用中采样个数有限的问题。仿真结果表明, 该算法既克服了典型的能量检测(ED)等算法在噪声信息

2008-09-16 收到, 2009-03-04 改回

国家自然科学基金(60372107, 10471114), 江苏省自然科学基金基础研究计划(BK2007729), 江苏省高校自然科学基金重大项目(06KJA51001)和江苏省高校自然科学基金(04KJB110097)资助课题

无法获得的情况下将不能工作的缺点，又克服了 LSC 算法必须工作在大样本情况下的缺点。实现了算法在不需噪声信息且只能获得小样本情况下的多认知用户协作检测。

本文其它部分组织如下：第 2 节给出系统模型及算法；第 3 节对算法的阈值进行详细的理论分析；第 4 节通过仿真详细分析算法性能；最后是结束语。

2 系统模型及算法

频谱感知的基本问题是在噪声环境中检测是否有主用户信号存在。这在无线通信中是一个困难的工作，尤其在经多径和衰落后信号功率很低，难于检测。在基本的发射机检测中，接收信号假设模型为

$$y(t) = \begin{cases} n(t), & H_0 \\ h(t)s(t) + n(t), & H_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $y(t)$ 是在 t 时刻收到信号的采样值， $n(t)$ 是方差为 σ^2 的噪声(不一定是高斯噪声)， $h(t)$ 是衰落因子， $s(t)$ 是在 $E[s(t)^2] \neq 0$ 时噪声中混有的待检测信号， H_0 和 H_1 分别表示噪声中没有信号情况和噪声中混有信号的情况。另外，我们假定信道 $h(t)$ 在 N 个采样点是保持恒定的 ($t = 1, \dots, N$)。

典型的能量检测(ED)方法是将收到的信号能量与一个已知的根据噪声统计特性确定的阈值 V_T 比较。这种方法的判决规则为

$$\text{decision} = \begin{cases} H_0, & E[y(t)^2] < V_T \\ H_1, & E[y(t)^2] \geq V_T \end{cases} \quad (2)$$

其中 $E[y(t)^2]$ 是接收到的信号能量，阈值 V_T 通常选用噪声方差。这种方法的一个缺点是，必须事先知道噪声分布或方差。而实际应用中难于准确获得 V_T 。而基于 RMT 的算法突出优点正是可以在噪声信息未知的情况下很好地进行检测。

考虑图 1 所示情况：主用户与主基站之间通信(图中黑色表示)。次基站 $\{BS_1, BS_2, \dots, BS_K\}$ 协作感知频谱是否空闲可用。为了进一步分析，假设：

(1) K 个次基站之间信息共享。基站之间通过有线高速传输来实现这一点，不占用无线资源；

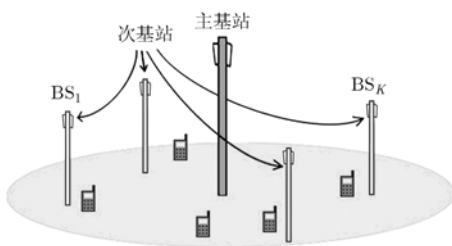


图 1 多认知用户的频谱感知环境

(2) K 个次基站分析同一段频谱。

这样可以得到如下由 K 个基站的采样数据组成的 $K \times N$ 矩阵($y_i(t)$ 是基站 i 在时刻 t 的采样值)：

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & y_1(2) & \dots & y_1(N) \\ y_2(1) & y_2(2) & \dots & y_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_K(1) & y_K(2) & \dots & y_K(N) \end{bmatrix} \quad (3)$$

下面给出一种基于大维随机矩阵理论的新的协作频谱感知算法。

算法 1 协作最大最小特征值(CMME)频谱感知算法。

步骤1 进行信号采样获得式(3)并计算：

$$R(N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} Y Y^H$$

步骤2 计算 $R(N)$ 的最大和最小特征值 λ_{\max}

和 λ_{\min} ；

步骤3 按下式计算判别阈值 γ ：

$$\gamma = \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(1 + \frac{(\sqrt{N} + \sqrt{K})^{-2/3}}{(NK)^{1/6}} F_1^{-1}(1 - P_{fa}) \right)$$

步骤4 按如下规则判决：

$$\text{decision} = \begin{cases} H_0, & \lambda_{\max} < \gamma \\ H_1, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 H_0 和 H_1 分别表示噪声中没有信号的情况和噪声中混有信号的情况。

该算法既克服了 ED 等算法在噪声信息无法准确获得的情况下将不能工作的缺点，又克服了 LSC 算法必须工作在大样本情况下的缺点。实现了无噪声信息且只有小样本情况下的正常检测。下面对算法中判决阈值 γ 的由来进行详细的说明。

3 判别阈值 γ 的理论分析

RMT 与传统概率理论有所不同，在该理论体系中称一个以随机变量为元素的矩阵为随机矩阵^[5, 6]。如果随机矩阵的维数趋于无穷，则称之为大维随机矩阵。RMT 就是研究当大维随机矩阵的维数 $K \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ ，但 $\beta = K/N$ 时，即该随机矩阵的行数和列数趋于无穷大而它们的比值保持恒定时，它的经验谱分布函数所呈现的许多确定矩阵所不具备的优良特性^[4]。该理论起源于核物理中对 Schrodinger 算子能量水平的研究，对矩阵维数比值的限定是源于原子核能量水平在不同维度上增长速度的限制^[5]。上世纪 50 年代后该理论得到了较快发展，近年来在无线通信中广泛应用，具体可参见文献^[4]。

现假设噪声为零均值独立同分布，信号与噪声

不相关, 记 $\mathbf{R}(N)$ 为收到信号的样本协方差矩阵, 即

$$\mathbf{R}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^{\text{H}} \quad (4)$$

当 N 很大时, 可以认为样本协方差矩阵近似等于统计协方差矩阵记为 $\mathbf{R}(N) \approx \mathbf{R}$, 该统计协方差矩阵可视为大维随机矩阵。

定义 1^[5] 一个 $N \times N$ 维 Hermitian 矩阵 \mathbf{A} 的经验累积分布函数(c.d.f), 即经验谱分布函数(ESD), 可以定义为

$$F_{\mathbf{A}}^N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}\{\lambda_i(\mathbf{A}) \leq x\} \quad (5)$$

这里 $\lambda_i(\mathbf{A})$ 是随机矩阵 \mathbf{A} 的特征值, $\mathbf{1}\{\cdot\}$ 是指示函数。若 $F_{\mathbf{A}}^N(\cdot)$ 在 $N \rightarrow \infty$ 时收敛, 相应的极限(渐近 ESD) 记为 $F_{\mathbf{A}}(\cdot)$ 。

定理 1(M-P 律)^[5] 设随机矩阵 \mathbf{H} 中的元素满足零均值独立同分布, 方差为 $1/N$, 则当 $K \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, 且 $\beta = K/N$ 时, $\mathbf{H} \mathbf{H}^{\text{H}}$ 的 ESD 几乎一定收敛到 M-P 律, 它的概率密度函数为

$$f_{\beta}(x) = (1 - \beta^{-1})^+ \delta(x) + \frac{\sqrt{(x - \eta_1)^+ (\eta_2 - x)^+}}{2\pi\beta x} \quad (6)$$

这里 $\eta_1 = \sigma^2(1 - \sqrt{\beta})^2$, $\eta_2 = \sigma^2(1 + \sqrt{\beta})^2$, 分别为最小特征值和最大特征值的收敛值, 即 $\lambda \in [\eta_1, \eta_2]$ 其中 σ^2 为方差, $(a)^+$ 为 0 和 a 中取大者, $\delta(x)$ 为单位冲击函数。

根据大维随机矩阵理论, 当矩阵元素分布不满足上述条件时(如: 有信号存在时将不满足零均值独立同分布), 其最大特征值将大于上述收敛值 η_2 , 即 $\lambda_{\max} \notin [\eta_1, \eta_2]$ 且 $\lambda_{\max} > \eta_2$ 。Cardoso 等人所提出的 LSC 算法就是利用这一特性给出了大样本情况下的频谱感知算法。这种情况下当噪声中有信号存在时, $\lambda_{\max} / \lambda_{\min} > \eta_2 / \eta_1$, 利用该性质即可进行检测^[2]。

LSC 算法的缺点是只能适用于大样本情况, 即样本数趋于无穷大。而在实际中, 我们只能获得有限的采样点数。因此, 样本协方差矩阵 $\mathbf{R}(N)$ 可能与统计协方差矩阵 \mathbf{R} 差别很大。 $\mathbf{R}(N)$ 的谱分布也变得非常复杂^[7-9]。这样选择恰当的特征值比值的阈值变得非常困难。尤其在低信噪比时算法的性能对阈值的选择非常敏感。因此, 我们研究适用于小样本下判别阈值。

记 P_d 表示检测概率, 即在假设 H_1 情况下, 算法检测到有信号存在的概率。 P_{fa} 表示虚警率, 即在假设 H_0 的情况下, 算法检测到有信号存在的概率。很明显, 对于一个好的检测算法, P_d 应该高并且 P_{fa} 应该低。 P_d 和 P_{fa} 大小根据具体应用而定。因为我们不知道是否有信号存在, 也不能获得所传信号的相关信息, 所以基于 P_d 来研究感知算法是困难的。因此, 通常基于 P_{fa} 研究感知算法。在 H_0 情况下, 可用 Y_n 表

示收到了信号, 它的样本协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_n(N) = \frac{1}{N} \mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_n^{\text{H}} \quad (7)$$

这是个特殊的 Wishart 随机矩阵^[7], 它的联合概率密度函数(PDF)已经研究出很多年, 但是其表达式非常复杂, 而且没有找到特征值的边缘概率密度函数的明确表达式。最近 Johnstone 和 Johansson 发现了这类矩阵的最大特征值的分布^[8, 9], 具体如下。

定理 2^[10] 假设为实噪声, 记 $\mathbf{A}(N) = (N/\sigma^2) \cdot \mathbf{R}_n(N)$, $\mu = (\sqrt{N-1} + \sqrt{K})^2$ 和 $\nu = (\sqrt{N-1} + \sqrt{K}) \cdot (1/\sqrt{N-1} + 1/\sqrt{K})^{1/3}$ 。假设 $\lim_{N \rightarrow \infty} K/N = \beta$, ($0 < \beta < 1$)。则有 $\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}(N)) - \mu}{\nu}$ 收敛到 Tracy-Widom 第 1 分布。

定理 3^[10] 假设为复噪声, 记 $\mathbf{A}(N) = (N/\sigma^2) \cdot \mathbf{R}_n(N)$, $\mu' = (\sqrt{N} + \sqrt{K})^2$ 和 $\nu' = (\sqrt{N} + \sqrt{K})(1/\sqrt{N} + 1/\sqrt{K})^{1/3}$, $\lim_{N \rightarrow \infty} K/N = \beta$ ($0 < \beta < 1$)。则有 $\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}(N)) - \mu'}{\nu'}$ 收敛到 Tracy-Widom 第二分布。

当 N 很大时, μ 和 μ' , ν 和 ν' 几乎相同, 也就是说, 两种情况下最大特征值分布的均值和方差几乎是一样的。但是它们的极限分布是不同的。

Tracy-Widom 分布是由 Tracy 和 Widom 发现的某些类型随机矩阵最大特征值的分布。记 F_1 和 F_2 为 Tracy-Widom 第 1 和第 2 分布的累积分布函数(CDF)。因为没有明确表达式, 通常情况下很难计算它们, 幸运的是, 基于数值计算, 现在有这些函数的数值表可供查询^[8]。表 1 列出了 F_1 在某些点处的值。可以通过逆函数 $F_1^{-1}(y)$ 求一些点的值。例如 $F_1^{-1}(0.95) = 0.98$, $F_1^{-1}(0.9) = 0.45$ 。

表 1 Tracy-Widom 第 1 分布数值表^[8]

t	-0.39	-2.78	...	0.45	0.98	2.02
$F_1(t)$	0.01	0.10	...	0.90	0.95	0.99

在定理 1 和定理 2 基础上, 在根据前述随机矩阵特征值收敛特性, 我们就可以推导出 CMME 算法阈值。考察实信号时算法的虚警率:

$$\begin{aligned} P_{fa} &= P\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} > \gamma\right) = P\left(\frac{\sigma^2}{N} \lambda_{\max}(\mathbf{A}(N)) > \gamma \lambda_{\min}\right) \\ &\approx P\left(\lambda_{\max}(\mathbf{A}(N)) > \gamma(\sqrt{N} - \sqrt{K})^2\right) \\ &= P\left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}(N)) - \mu}{\nu} > \frac{\gamma(\sqrt{N} - \sqrt{K})^2 - \mu}{\nu}\right) \\ &= 1 - F_1\left(\frac{\gamma(\sqrt{N} - \sqrt{K})^2 - \mu}{\nu}\right) \end{aligned}$$

上式第 2 步是根据定理 2，其中 $A(N) = (N/\sigma^2) \cdot R_n(N)$ ，第 3 步根据定理 1 中特征值最小值的收敛值。第 4 步也是根据定理 2，因此得到

$$1 - F_1 \left(\frac{\gamma(\sqrt{N} - \sqrt{K})^2 - \mu}{\nu} \right) = P_{fa} \quad (8)$$

即

$$F_1 \left(\frac{\gamma(\sqrt{N} - \sqrt{K})^2 - \mu}{\nu} \right) = 1 - P_{fa} \quad (9)$$

$$\frac{\gamma(\sqrt{N} - \sqrt{K})^2 - \mu}{\nu} = F^{-1}(1 - P_{fa}) \quad (10)$$

将定理 2 中 μ 和 ν 值代入式(10)得到算法的阈值，即为

定理 4 CMME 算法阈值

$$\gamma = \frac{\eta_2}{\eta_1} \left(1 + \frac{(\sqrt{N} + \sqrt{K})^{-2/3}}{(NK)^{1/6}} F_1^{-1}(1 - P_{fa}) \right) \quad (11)$$

其中 η_2 和 η_1 分别为定理 1 中的最大和最小特征值的收敛值。

对于复信号，推导过程的不同之处仅在于用定理 3 代替定理 2，阈值中的函数 F_1 用 F_2 代替。

在此基础上，可以得到

定理 5 CMME 算法判别规则：

$$\text{decision} = \begin{cases} H_0, & \lambda_{\max} < \gamma \\ H_1, & \text{其它} \end{cases} \quad (12)$$

其中 H_0 和 H_1 分别表示噪声中没有信号的情况和噪声中混有信号的情况。

4 仿真分析

在瑞利衰落环境下进行频谱感知仿真来验证上述 CMME 算法的性能。为了便于比较，我们同时给出了在相同环境下文献[11,12]中的 ED 算法和文献[2]中给出的 LSC 算法的性能仿真。按照第 2 节给出的感知模型， $h(t)$ 满足方差为 $1/K$ 的瑞利多径衰落。方差进行归一化是考虑到能量不要随基站数的增加而无限增大。仿真中我们采用 $K = 10$ 个基站，能量判决的阈值为 $V_T = \sigma^2$ ，并取多数基站判决结果为协作判决总结果。特征值判决采用本文给出的规则。

图 2 给出了本文算法在基站数为 $K = 10$ ，信噪比 SNR= 5dB 时，实际仿真得到的 $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ 与本文给出的判别阈值的关系图。如图中所示，该阈值随着采样数的不同(即矩阵维数不同)而动态调整，

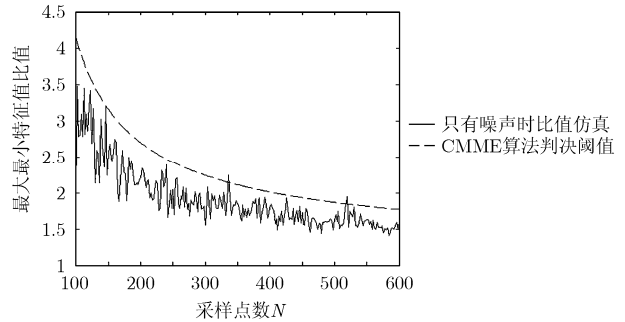


图 2 CMME 算法判别阈值的有效性

从而保证了判别阈值的合理性。仿真的比值曲线在算法阈值曲线的下方，也充分说明了判别阈值的有效性。

在预知噪声方差的情况下，可以使用传统的能量检测算法。图 3 给出了本文算法与文献[11,12]中能量检测在相同虚警率下算法性能的比较。如图中检测正确率曲线所示，在相同条件下 CMME 算法性能明显优于 ED 检测算法。而且在不能获得噪声方差的情况下 ED 算法将完全失效，CMME 算法却可以正常检测。可见 CMME 的算法无论是检测性能还是算法适用范围都具有明显的优越性。

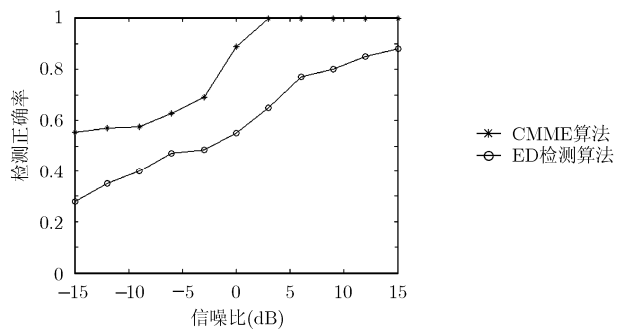


图 3 CMME 算法与 ED 算法性能比较

基于大维随机矩阵理论的算法的突出优点是在不能获得噪声方差的情况下可以进行正常检测。图 4 给出了噪声方差均未知情况下 CMME 算法与 LSC 算法的性能比较。如图中所示，CMME 算法在信噪比 2.5 dB 时检测正确率就已解近 100%，而 LSC 算法要大于 6 dB 后才能达到该性能。在低信噪比时检测性能优势更加明显，在信噪比 -15 dB 时，CMME 算法检测正确率仍接近 60%，而 LSC 算法已低于 10%。可见 CMME 算法在小样本下仍然可以获得较好的性能，而 LSC 算法在低信噪比小样本下性能急剧下降。这充分说明了在小样本的情况下 CMME 算法的阈值选择是合理的，CMME 算法整体性能明显优于 LSC 算法。

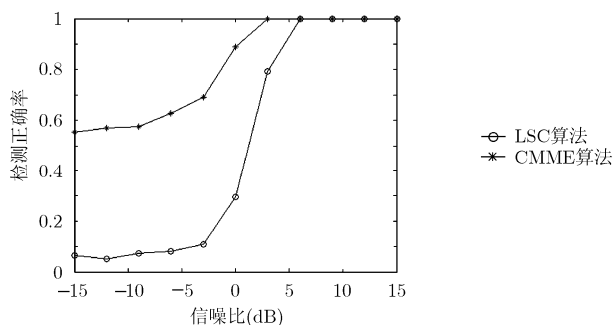


图 4 CMME 算法与 LSC 算法性能比较

5 结束语

本文提出了一种新的在多认知用户环境中基于大维随机矩阵理论的协作频谱感知算法(CMME 算法)。该算法既克服了 ED 等算法在噪声信息无法获得的情况下将不能工作的缺点, 又克服了 LSC 算法必须工作在大样本情况下的缺点。实现了感知算法在不需要噪声信息且只能获得小样本情况下的高性能检测。在瑞利衰落环境中的仿真结果表明, 新算法性能明显优于同类算法和典型的能量检测算法。该算法还具有一定普遍性, 也可以应用到其它信号检测或相关领域。

参考文献

- [1] Sahai A. Spectrum sensing: Fundamental limits and practical challenges, DySPAN 2005 tutorial part I [C]. DySPAN 2005, Maryland, Nov 2005: 1-138.
- [2] Cardoso L S, Debbah M, and Bianchi P. Cooperative spectrum sensing using random matrix theory [C]. ISWPC, Santorini, 7-9 May 2008: 334-338.
- [3] Zeng Yong-hong and Liang Ying-chang. Maximum minimum eigenvalue detection for cognitive radio [C]. The 18th Annual IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC'07), Athens, 3-7 Sept. 2007: 1-5.
- [4] Tulino A M and Verdu S. Random Matrix Theory and Wireless Communications [M]. Boston: Now Publishers Inc, 2004: 168-189.
- [5] Mehta M L. Random Matrices [M]. Third edition, London: Academic Press, 2006: 394-438.
- [6] Bai Z D and Silverstein Jack W. Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices [M]. Beijing: Science Press, 2006: 283-357.
- [7] Bai Z D. Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, a review [J]. *Statistica Sinica*, 1999, 9(1): 611-677.
- [8] Johnstone I M. On the distribution of the largest eigenvalue in principle components analysis [J]. *The Annals of Statistics*, 2001, 29(2): 295-327.
- [9] Johansson K. Shape fluctuations and random matrices [J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2000, 209(2): 437-476.
- [10] Tracy C A and Widom H. On orthogonal and symplectic matrix ensembles [J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1996, 177(3): 727-754.
- [11] Ghasemi A and Sousa E S. Collaborative spectrum sensing for opportunistic access in fading environments [C]. First IEEE International Symposium on New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks (DySPAN 2005), Maryland, Nov 2005: 131-136.
- [12] Ghasemi A and Sousa E S. Spectrum Sensing in Cognitive Radio Networks: The Cooperation-Processing Tradeoff [M]. USA: WILEY, 2007: 1049-1060.

王 磊: 男, 1977 年生, 博士生, 研究方向为现代通信中的智能信号与信息处理。

郑宝玉: 男, 1945 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代通信中的智能信号与信息处理。

李 雷: 男, 1958 年生, 教授, 研究方向为智能信号处理和非线性数学及其在通信中的应用。