

## 一种基于傅里叶基神经网络的频谱分析方法

曾喆昭

(长沙理工大学电气与信息工程学院 长沙 410076)

**摘要:** 该文提出了一种用递推最小二乘法训练傅里叶基神经网络权值的频谱分析方法。其主要思想是采用递推最小二乘法训练傅里叶基神经网络权值, 根据权值获得信号的幅度谱和相位谱。该方法不涉及复数的乘法运算和加法运算, 便于软件和硬件实现, 特别适合于 DSP 软硬件实现。仿真结果表明, 该方法不仅计算精度高, 计算速度快, 而且具有噪声滤波功能, 是一种有效的频谱分析方法。

**关键词:** 频谱分析; 神经网络; 递推最小二乘法

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)08-1821-04

## A Spectrum Analysis Method Based on FBF Neural Network

Zeng Zhe-zhao

(College of Electrical and Information Engineering, Changsha University of Science and Technology,  
Changsha 410076, China)

**Abstract:** A method of spectrum analysis is proposed using recursive least square algorithm to train the weights of Fourier Basis Functions (FBF) neural network. Its main idea is that the weights of the FBF neural network are trained with recursive least square algorithm, and then the amplitude spectrum and phase spectrum are computed according to the obtained weights. The approach is not involved in plural multiplication operation and plural addition operation. Software and hardware of the approach are easily implemented. It is especially fit for the implementation of software and hardware of DSP chips. The results of spectrum analysis show that the method presented has not only high accuracy and fast convergence speed but also filtering function. Therefore, it is an effective approach of spectrum analysis.

**Key words:** Spectrum analysis; Neural-network; Recursive least algorithms

### 1 引言

众所周知, 在通信、图像传输、雷达、声纳等领域都涉及信号的频谱分析, 需要进行 DFT 的计算, 此外, 在系统分析、设计和实现中也都会用到 DFT 计算, 因此, DFT 的计算在数字信号处理中具有十分重要的作用。但是, 在相当长的时间里, 由于 DFT 的计算量太大, 即使采用计算机也很难对问题进行实时处理, 因而没有得到真正的应用。直到 1965 年库利 (Cooley) 和图基 (Tukey) 在 *Mathematics of Computation* 杂志上发表了著名的“机器计算傅里叶级数的一种算法”的文章, 提出了 DFT 的一种快速算法, 后来又有桑德 (Sabbatini) 和图基的快速算法相继出现后, 情况才发生了根本性的改变。经过人们对算法的改进, 发展和完善了一套高速有效的计算方法, 使 DFT 的计算量大大简化, 从而使 DFT 的运算在实际中得到了多学科领域

的广泛应用<sup>[1-6]</sup>。然而, DFT 或 FFT 都涉及复数的乘法和加法运算, 给计算带来不方便, 特别是给硬件实现带来不方便。文献[7]用外差混频和直接检波方法测量亚毫米波连续波源的频谱, 取得了较好的研究成果。此外, 文献[8,9]分别提出了连续结构微带滤波器的矩阵运算法分析和一种用于光谱图像的基于邻域背景检测的矢量滤波器, 并分别取得了较好的成果。近年来, 国内外在用现有的频谱分析理论方法在各领域中的应用报道较多, 而有关频谱分析的新理论和新方法报道较少。文献[10]提出了频谱分析的数值方法, 取得了良好结果; 文献[11]用基于最速下降法的神经网络算法分析信号的频谱获得了很高的计算精度, 但是, 对含有噪声的信号, 该方法收敛速度较慢, 计算精度不高。为此, 本文提出了一种用递推最小二乘法训练神经网络的信号频谱分析方法。下面详细介绍该方法及其在信号频谱分析的应用实例。

### 2 频谱分析的算法模型

众所周知, 对于周期为  $T$  的周期信号  $f(t)$ , 可

以表示为连续时间傅里叶级数(CTFS), 即

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (1)$$

其中  $\omega_0 = 2\pi/T$  为基波角频率,  $a_0$  为直流分量,  $a_n$ 、 $b_n$  为傅里叶级数系数。

对于时限非周期信号  $f(t)$ , ( $0 \leq t \leq T$ ), 将  $f(t)$  以周期  $T$  延拓而成的周期信号记为  $f_p(t)$ , 则有

$$f_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t - mT) \quad (2)$$

其中  $m$  为整数。很显然, 当时间  $t$  为  $0 \leq t \leq T$  时有:  $f_p(t) = f(t)$ , 因而周期信号  $f_p(t)$  的连续时间傅里叶级数在主值周期 ( $0 \leq t \leq T$ ) 内同样可表示为式(1)的形式。

对于频带有限信号  $f(t)$  ( $0 \leq \omega \leq N\omega_0$ ), 式(1)可改写为

$$f(t) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cos(\omega_0 T_s) & \cdots & \cos(N\omega_0 T_s) & \sin(\omega_0 T_s) & \cdots & \sin(N\omega_0 T_s) \\ 1 & \cos(2\omega_0 T_s) & \cdots & \cos(2N\omega_0 T_s) & \sin(2\omega_0 T_s) & \cdots & \sin(2N\omega_0 T_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(M\omega_0 T_s) & \cdots & \cos(MN\omega_0 T_s) & \sin(M\omega_0 T_s) & \cdots & \sin(MN\omega_0 T_s) \end{bmatrix}$$

则式(5)可表示为

$$f(k) = C(k, :)\mathbf{W} \quad (6)$$

其中  $C(k, :) = [1 \cos(k\omega_0 T_s) \cdots \cos(kN\omega_0 T_s) \sin(k\omega_0 T_s) \cdots \sin(kN\omega_0 T_s)]$  为神经网络在  $kT_s$  时刻的激励函数向量。

由式(5)和式(6)可知, 通过神经网络训练后即可获得权值向量  $\mathbf{W}$  即傅里叶级数系数  $a_n$  和  $b_n$ , 从而可得到  $n$  次谐波分量的幅值  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  和相位  $\varphi_n = \arctan(a_n/b_n)$ 。由式(5)和式(6)可知,  $f(k)$  与  $k$  的映射关系是非线性映射关系, 但是,  $f(k)$  与神经网络激励函数  $\cos(n\omega_0 kT_s)$  和  $\sin(n\omega_0 kT_s)$  的映射关系则是线性关系, 即  $f(k)$  是神经网络激励函数  $\cos(n\omega_0 kT_s)$  和  $\sin(n\omega_0 kT_s)$  的线性加权求和, 加权系数为  $a_n$  和  $b_n$ , 即加权向量  $\mathbf{W}$ 。下面采用基于最小二乘法的傅里叶基神经网络算法来训练权值向量  $\mathbf{W}$ , 以获得信号  $f(t)$  的幅频特性和相频特性。由式(6)可知, 若以  $f(k)$  为神经网络训练样本(信号采样值),  $\mathbf{W}$  为神经网络权值向量,  $C(k, :)$  为神经网络激励函数向量, 神经网络模型如图 1 所示。

神经网络算法如下:

(1)神经网络输出:

$$f_{nn}(k) = C(k, :)\mathbf{W} \quad (7)$$

(2)误差函数:

或

$$f(t) = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (4)$$

其中,  $A_0 = a_0$  为直流分量;  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  为  $n$  次谐波分量的振幅;  $\varphi_n = -\arctan(b_n/a_n)$  为  $n$  次谐波分量的相位。只要获得  $a_n$  和  $b_n$ , 就得到了信号  $f(t)$  的幅度谱特性  $A_n$  和相位谱特性  $\varphi_n$ 。

当  $f(t)$  是复杂信号或未知信号时, 求  $a_n$  和  $b_n$  是困难的, 为此, 将式(4)离散化为下列形式:

$$f(k) = \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega_0 kT_s) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\omega_0 kT_s) \quad (5)$$

其中  $T_s$  为采样周期, 且为  $T_s \leq (\pi/(N\omega_0)) = T/(2N)$ ,  $k = 0, 1, \dots, M$ ,  $M \geq 2N + 1$ 。

设权值向量为  $\mathbf{W} = [a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N]^T$ , 神经网络激励矩阵为

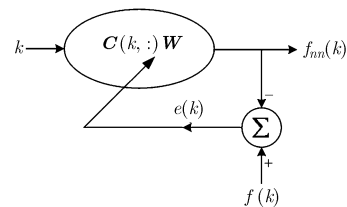


图 1 傅里叶基函数神经网络模型

$$e(k) = f(k) - f_{nn}(k) \quad (8)$$

(3)性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M e^2(k) \quad (9)$$

(4)使  $J = \min$  的权值向量  $\mathbf{W}$ , 即为所求的神经网络权值向量  $\mathbf{W}$ , 这是一个多变量线性优化问题, 为此, 由  $\partial J/\partial \mathbf{W} = 0$  可得递推最小二乘法:

$$\mathbf{W}^{k+1} = \mathbf{W}^k + \mathbf{Q}^k [f(k) - C(k, :)\mathbf{W}^k] \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}^k = \frac{\mathbf{P}^k C^T(k, :)}{1 + C(k, :)\mathbf{P}^k C^T(k, :)} \quad (11)$$

$$\mathbf{P}^{k+1} = [\mathbf{I} - \mathbf{Q}^k C(k, :)]\mathbf{P}^k, \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (12)$$

随机产生初始权值向量  $\mathbf{W}^0 = \text{rand}(2N + 1, 1)$ , 设  $\mathbf{P}^0 = \alpha \mathbf{I} \in \mathbf{R}^{(2N+1) \times (2N+1)}$  ( $\alpha$  是足够大的正数,  $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{(2N+1) \times (2N+1)}$  是单位矩阵), 通过对样本数据训

练, 即可获得神经网络权值向量  $\mathbf{W}$ 。

### 3 仿真实例

为了检验本文方法的有效性, 给出了两个频谱分析实例。

**例 1** 已知某非周期信号为<sup>[11]</sup>

$$f(t) = |\cos(100\pi t)|, \quad 0 \leq t \leq 0.01 \text{ s}$$

将  $f(t)$  以周期  $T = 0.01 \text{ s}$  进行周期重复可得偶对称的周期信号, 由傅里叶级数分析方法易知,  $a_0 = 2/\pi$ ,  $a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$ ,  $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$ 。显然信号  $f(t)$  含有高次谐波。如果取谐波次数为  $N = 50$ , 采样周期为  $T_s = T/(2N) = 0.1 \text{ ms}$ , 构造激励矩阵  $\mathbf{C}$ , 给定  $\text{Tol} = 10^{-8}$ , 给定正实数  $\alpha = 10^5$ 。经过 1 次神经网络训练, 得性能指标为:  $J = 2.475457 \times 10^{-9}$ , 计算精度达  $10^{-5}$ , 其傅里叶系数如图 2 所示。由于傅里叶系数个数较多, 此处略去了计算结果的罗列。

**例 2** 假设神经网络训练样本受白噪声影响,

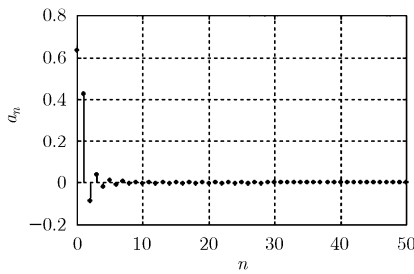


图 2 例 1 傅里叶系数分析结果

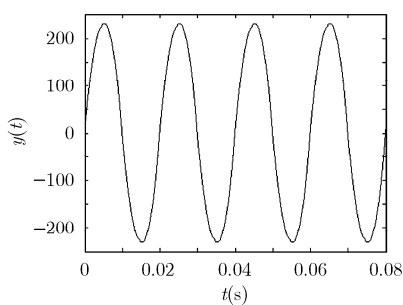


图 3 原始信号  $y(t)$

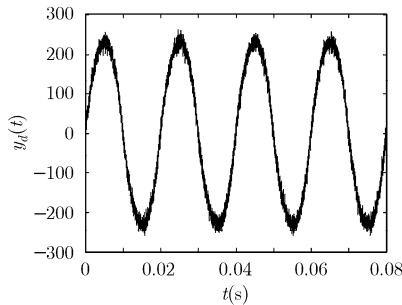


图 4 受噪声影响信号  $y_d(t)$

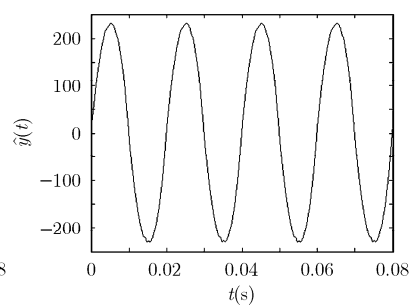


图 5 神经网络输出信号  $\hat{y}(t)$

其表达式为文献[12]使用的 25 次谐波信号与均值为 0, 方差为 10 的白噪声信号  $v(t)$  叠加而成, 即  $y_d(t) = \sum_{n=1}^{25} A_n \sin(2\pi f_n t + \phi_n) + v(t)$ 。原始信号  $y(t)$  与受噪声影响信号  $y_d(t)$  分别如图 3 和图 4 所示。

由于受白噪声影响的信号  $y_d(k)$  具有很宽的频带范围, 因此需要采用很高的采样频率。在仿真实例中设采样频率为  $f_s = 100 \text{ kHz}$ , 取 8000 个样本数据  $y_d(k)$  (约 4 个周期), 神经网络拓扑结构为  $1 \times 101 \times 1$ , 随机产生权值向量  $\mathbf{W}^0 = \text{rand}(101, 1)$ ; 给定正实数  $\alpha = 2 \times 10^6$ , 将 8000 个样本数据送神经网络训练。经过 2 次神经网络训练, 得神经网络输出信号  $\hat{y}(t)$  如图 5 所示。比较图 3、图 4 和图 5 可知, 经递推最小二乘法训练得到的神经网络输出, 具有良好的噪声滤除效果。

### 4 结论

本文提出的用递推最小二乘法训练傅里叶基神经网络的信号频谱分析方法不涉及复数的乘法运算和复数的加法运算, 因而简化了软硬件实现, 特别适合于 DSP 芯片的软、硬件实现。研究表明, 本文提出的信号频谱分析方法不仅计算精度高、计算量小, 而且还具有随机噪声的滤波功能。与 DFT 或 FFT 相比, 本文提出的频谱分析方法能更准确反映真实信号的频谱特征, 用 DFT 或 FFT 方法得到的频谱是真实信号频谱与噪声信号频谱的叠加。因此, 本文方法是一种更有效的频谱分析方法。

### 参考文献

- [1] He Yan-feng, Wu Xiao-dong, and Han Guo-qing, *et al.* Frequency spectrum analysis method for recognition of dynamometer card. *Acta Petrolei Sinica*, 2008, 29(4): 619-624.
- [2] Lee Usik, Lee Jaesang, and Kim Chang-Boo. Spectral analysis method for nonlinear dynamic systems. 10th International Conference on the Mechanical Behaviour of Material, Switzerland, 2007: 861-864.
- [3] Raghavan S, Imbrie P K, and William A. Spectral analysis of R-lines and vibronic sidebands in the emission spectrum of ruby using genetic algorithms. *Applied Spectroscopy*, 2008, 62(7): 759-765.
- [4] Lin Wei-jun. Chebyshev spectral element method for elastic wave modeling. *Acta Acustica*, 2007, 32(6): 525-533.

- [5] 侯正信, 王兆华, 杨希. 全相位 DFT 数字滤波器的设计与实现[J]. 电子学报, 2003, 31(4): 539-543.  
Hou Zheng-xin, Wang Zhao-hua, and Yang Xi. Design and implementation of all phase DFT digital filter[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(4): 539-543.
- [6] Yang Hai, Cheng Wei, and Chu Li-yan. Time-frequency analysis based on process neural network for non-stationary random vibration of spacecraft. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(1): 12-15.
- [7] 申小芳, 姚骑均, 林镇辉等. 用外差混频和直接检波方法测量亚毫米波连续波源的频谱[J]. 红外与毫米波学报, 2005, 24(5): 3-5.  
Shen X F, Yao Q J, and Lin Z H, *et al.* Measurement of the frequency spectrum of a sub-millimeter cw source by heterodyne mixing and direct detection[J]. *Journal Infrared Millimeter and Waves*, 2005, 24(5): 3-5.
- [8] 梁唯一, 焦扬, 王均宏. 连续结构微带滤波器的矩阵运算法分析[J]. 红外与毫米波学报, 2006, 25(1): 62-65.  
Liang Wei-yi, Jiao Yang, and Wang Jun-hong. Analysis of structure-continuous micro-strip filters by matrix multiplication method[J]. *Journal Infrared Millimeter and Waves*, 2006, 25(1): 62-65.
- [9] 马艳华, 王建宇, 马德敏, 舒嵘. 一种用于光谱图像的基于邻域背景检测的矢量滤波器[J]. 红外与毫米波学报, 2006, 25(2): 79-82.  
Ma Yan-hua, Wang Jian-yu, Ma De-min, and Shu Rong. New vector filter based on background detection used in spectral images [J]. *Journal Infrared Millimeter and Waves*, 2006, 25(2): 79-82.
- [10] Katsuhiko I S and Katsuhiko I W, *et al.* Numerical analysis of a path-length-resolved spectrum of time-varying scattered light field. *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*, 2008, 25(3): 718-724.
- [11] 曾喆昭, 竺炜, 王耀南. 一种基于神经网络算法的频谱分析方法[J]. 红外与毫米波学报, 2007, 26(2): 141-145.  
Zeng Zhe-zhao, Zhu Wei, and Wang Yao-nan. Analysis approach of spectrum based on neural network algorithm [J]. *Journal Infrared Millimeter and Waves*, 2007, 26(2): 141-145.
- [12] 曾喆昭, 文卉, 王耀南. 一种高精度的电力系统谐波智能分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(10): 23-27.  
Zeng Zhe-zhao, Wen Hui, and Wang Yao-nan. An approach with high accuracy for intelligent analysis of power system harmonics [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2006, 26(10): 23-27.
- 曾喆昭: 男, 1963 年生, 博士, 教授, 研究方向为智能信息处理与智能控制.