

LFM 信号调频斜率的双正交 Fourier 变换分析算法

王本庆 李兴国

(南京理工大学电光学院 南京 210094)

摘要: 现有很多 LFM 信号调频斜率的分析算法, 但这些算法存在诸多不足, 如计算复杂、搜索时间长, 对多 LFM 信号有交叉项等。该文提出了基于双正交 Fourier 变换的新 LFM 信号调频斜率分析算法, 其特点是信号在双正交基下展开, 通过变换得到信号调频斜率密度谱。该算法不需要搜索, 且特别适合对不同调频斜率组成的多 LFM 信号进行调频斜率分析。文中推导了连续双正交 Fourier 变换公式和离散变换公式, 并讨论了算法的一些主要性质。

关键词: 双正交基; 多 LFM 分析; 调频斜率估计; Fourier 变换

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)07-1620-04

Analysis Algorithm to Frequency Rate of LFM Signal Based on Biorthogonal Fourier Transform

Wang Ben-qing Li Xing-guo

(School of Electronic Engineering and Optoelectronic Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: There are many analysis algorithms for frequency rate of LFM signal, but those algorithms have some drawbacks, such as highly computational complexity, long time for searching, and cross-term in multi-LFM signal. In this paper, a new analysis algorithm of frequency rate of LFM signal is presented based on Biorthogonal Fourier Transform (BFT), the signal is expanded with biorthogonal base function that could be got frequency rate density spectrum of the signal. This algorithm need no searching, and has better performance for detection different frequency rate of multi-LFM signal. This paper derives continual BFT formula and discrete transform formula and discusses its some main characters.

Key words: Biorthogonal base; Multi-LFM analysis; FM rate estimation; Fourier Transform (FT)

1 引言

线性调频(Linear Frequency Modulation, LFM)信号是一种大时宽带宽积信号, 被广泛地应用于雷达和声纳等通信系统。现有的分析 LFM 信号的算法主要有基于时频分析的小波变换(WT)^[1,2]、短时 Fourier 变换(STFT)^[3]、分数阶 Fourier 变换(FRFT)^[4-7]和基于 Radon 变换或 Hough 变换的复合算法, 如 Radon-Wigner 变换^[8-10]、Radon-Ambiguity 变换^[11,12]和 WVD-Hough 变换^[13,14]等, 此外还有人工神经网络(ANN)^[15]、支持向量机(SVC)^[16]等。但这些算法本身存在一些固有的不足, 运算都比较复杂, 如基于 Radon 变换的复合算法和 FRFT 等算法需要进行搜索, 基于二次型的一些算法, 如 AF, WVD 等算法在分析多 LFM 信号时会出现交叉项等干扰。

本文提出了一种新的 LFM 信号调频斜率的分析方法, 这种算法是把信号采用双正交函数展开, 得到信号的调频斜率密度谱, 本文简称斜率谱, 它是一种类似于频谱的密度分布, 特别适合分析多个不

同调频斜率信号的组成成分。通过双正交 Fourier 变换, 就像单频信号的频谱是冲激函数一样, 单 LFM 信号在斜率谱就会表现为相应的冲激函数, 而且不同调频斜率的 LFM 信号彼此正交, 因此斜率谱能够很好地分析和表示多 LFM 信号。

2 连续双正交 Fourier 变换

由积分公式:

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} t \exp(ikt^2) dt = \pi \delta(k), \quad k \in Z \quad (1)$$

其中 Z 表示整数集, δ 为离散冲激函数。可以得到 $L^2[0, \sqrt{2\pi}]$ 上的双正交函数系列:

$$\left. \begin{aligned} \phi_k(t) &= \exp(ikt^2) \\ \tilde{\phi}_k(t) &= \frac{t}{\pi} \exp(ikt^2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

用内积表示为

$$\begin{aligned} \langle \phi_k, \tilde{\phi}_l \rangle &= \int_0^{\sqrt{2\pi}} \phi_k \tilde{\phi}_l^* dt \\ &= \int_0^{\sqrt{2\pi}} \frac{t}{\pi} \exp[i(k-l)t^2] dt = \delta(k-l) \end{aligned} \quad (3)$$

由上面的分析, 可以得到函数的双正交 Fourier

级数展开为

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f(t), \phi_k(t) \rangle \tilde{\phi}_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k) \tilde{\phi}_k(t) \quad (4)$$

其中

$$F(k) = \langle f(t), \phi_k(t) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{2\pi}} f(t)t \exp(-ikt^2) dt \quad (5)$$

当 $t \in [0, T]$ 时, 引入时域系数 $\varpi_2 = 2\pi/T^2$, 则可以得到 $L^2[0, T]$ 上的双正交函数系列:

$$\left. \begin{aligned} \phi_k(t) &= \exp(ik\varpi_2 t^2) \\ \tilde{\phi}_k(t) &= \frac{2t}{T^2} \exp(ik\varpi_2 t^2) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

此时式(4)和式(5)分别变为

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k\varpi_2) \exp(ik\varpi_2 t^2) \\ F(k\varpi_2) &= \frac{2}{T^2} \int_0^T f(t)t \exp(-ik\varpi_2 t^2) dt \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

当 $T \rightarrow +\infty$ 时, $T^2 \rightarrow +\infty$, $\varpi_2 \rightarrow 0$, $F(k\varpi_2) \rightarrow 0$, $k\varpi_2 \rightarrow \omega_2$ 成为连续变量, 但是 $F(k\varpi_2)$ 与 ϖ_2 的比值趋向一个固定值, 令:

$$F(\omega_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{F(k\varpi_2)}{\varpi_2} \quad (8)$$

为信号的斜率谱, 则有

$$F(\omega_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^2 F(k\varpi_2) = 2 \int_0^{+\infty} f(t)t \exp(-i\omega_2 t^2) dt \quad (9)$$

上式称为双正交 Fourier 正变换。

另一方面, 由式(7)得

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{F(k\varpi_2)}{\varpi_2} \exp(ik\varpi_2 t^2) \varpi_2 \quad (10)$$

当 $T \rightarrow +\infty$ 时, $\varpi_2 \rightarrow d\omega$, $\frac{F(k\varpi_2)}{\varpi_2} \rightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega_2)$,

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$, 则式(10)变为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_2) \exp(i\omega_2 t^2) d\omega_2 \quad (11)$$

上式称为双正交 Fourier 反变换。综合式(9)和式(11), 可得双正交 Fourier 变换为

$$\left. \begin{aligned} F(\omega_2) &= 2 \int_0^{+\infty} f(t)t \exp(-i\omega_2 t^2) dt \triangleq \text{BFT}[f(t)] \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_2) \exp(i\omega_2 t^2) d\omega_2 \triangleq \text{IBFT}[F(\omega_2)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3 算法特性

下面讨论一下本算法的特性, 限于篇幅, 仅就主要性质做简单论述。

3.1 线性可加性

多个信号的和信号的双正交 Fourier 变换为每个信号双正交 Fourier 变换的和。

3.2 共轭对称特性

实函数的高阶双正交 Fourier 变换实部是偶函数, 虚部是奇函数。

3.3 矩形脉冲函数的双正交 Fourier 变换

矩形脉冲函数定义为

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & t \geq T \end{cases} \quad (13)$$

其双正交 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} \text{BFT}[E(t)] &= \frac{i}{\omega_2} [\exp(-i\omega_2 T^2) - 1] \\ &= T^2 \text{sinc}\left(\frac{\omega_2 T^2}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\omega_2 T^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

取模可以得到斜率谱为

$$|\text{BFT}[E(t)]| = T^2 \text{sinc}\left(\frac{\omega_2 T^2}{2}\right) \quad (15)$$

可见, 矩形脉冲函数的斜率谱和它的频谱一样, 都表现为 sinc 函数。现取 $T = \sqrt{2\pi}$ s, 采样 1000 点的矩形函数, 其双正交 Fourier 变换如图 1 所示。

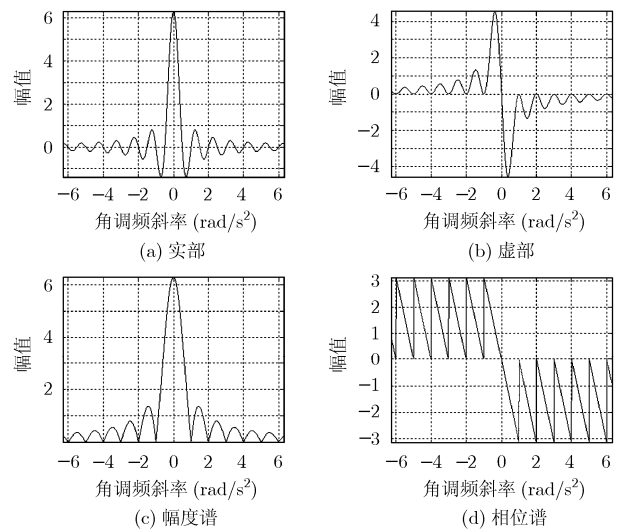


图 1 矩形脉冲函数的斜率谱

令 $T \rightarrow +\infty$, 就可以得到直流信号的斜率谱幅度为

$$\text{BFT}[1] = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{BFT}[E(t)] = 2\pi\delta(\omega_2) \quad (16)$$

此时 δ 为连续冲激函数, 可由下式定义:

$$\delta(\omega_2) = \lim_{T^2 \rightarrow \infty} \left[\frac{T^2}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_2 T^2}{2}\right) \right] \quad (17)$$

3.4 单 LFM 信号的双正交 Fourier 变换

设信号的调频斜率为 K , 振幅为 A , 信号表示为

$$f(t) = A \exp(iKt^2) \quad (18)$$

则信号的双正交 Fourier 变换幅度谱为

$$F(\omega_2) = \text{BFT}[A \exp(iKt^2)] = 2\pi A \delta(\omega_2 - K) \quad (19)$$

3.5 多 LFM 信号的双正交 Fourier 变换

有 M 个不同调频斜率 LFM 的组合信号, 表示为

$$f(t) = \sum_{m=1}^M A_m \exp(iK_m t^2) \quad (20)$$

则信号的双正交 Fourier 变换幅度谱为

$$\begin{aligned} F(\omega_2) &= \text{BFT} \left[\sum_{m=1}^M A_m \exp(iK_m t^2) \right] \\ &= 2\pi \sum_{m=1}^M A_m \delta(\omega_2 - K_m) \end{aligned} \quad (21)$$

3.6 斜(率)移特性

设信号 $f(t)$ 的双正交 Fourier 变换为 $F(\omega_2)$, 则 $f(t) \exp(iKt^2)$ 的双正交 Fourier 变换为

$$\text{BFT}[f(t) \exp(iKt^2)] = F(\omega_2 - K) \quad (22)$$

4 离散双正交 Fourier 变换

实际中得到的都是信号的离散值, 参照离散 Fourier 变换, 采用圆周卷积运算, 进行离散双正交 Fourier 变换。设信号的采样频率为 f_s , 变量离散化为 $t = l\Delta t$ 和 $\omega_2 = k\Delta\omega_2$, 信号长度 $T = N\Delta t$, 斜率谱长度 $\Omega_2 = N\Delta\omega_2$, 其中有恒等关系:

$$\Delta t = \frac{1}{f_s}, \quad \Delta\omega_2 = \frac{2\pi}{T^2}, \quad \Omega_2 = \frac{2\pi}{T} f_s \quad (23)$$

离散信号表示为 $f(l)$, 离散斜率谱表示为 $F(k)$, 则变换核离散为

$$\begin{aligned} \omega_2 t^2 &= k\Delta\omega_2 (l\Delta t)^2 = k \frac{2\pi}{T^2} (l\Delta t)^2 \\ &= kl^2 \frac{2\pi}{(T/(\Delta t))^2} = kl^2 \frac{2\pi}{N^2} \end{aligned} \quad (24)$$

所以离散双正交 Fourier 变换记做:

$$\left. \begin{aligned} F(k) &= \frac{2}{f_s} \sum_{l=0}^N f(l) l \exp\left[-i \frac{2\pi}{N^2} kl^2\right] \\ f(l) &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^N F(k) \exp\left[i \frac{2\pi}{N^2} kl^2\right] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

由式(23)可见调频斜率谱的分辨率 $\Delta\omega_2$ 只与信号长度有关, 最大斜率 Ω_2 既与信号长度有关, 也与采用频率有关。

5 仿真及应用

首先形象地解释一下双正交 Fourier 变换。由双正交 Fourier 反变换可以看出, 斜率谱是一组不同调频斜率 LFM 信号的密度分布, 也就是说双正交 Fourier 变换使用三角形对时频平面进行了无重复全覆盖划分, 如图 2(b)所示(实际并不是等角度划

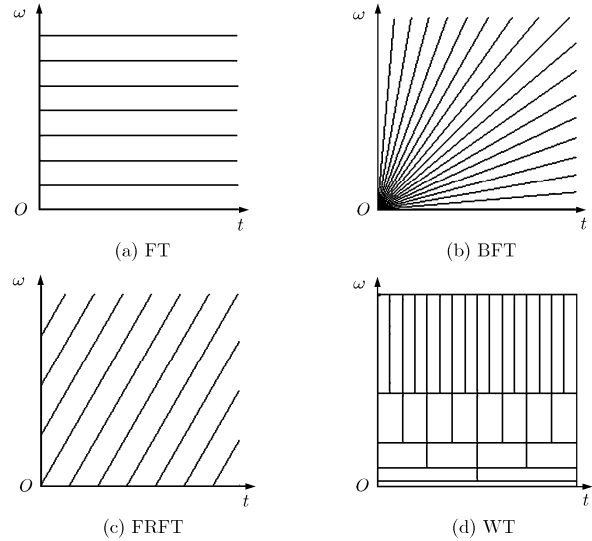


图 2 不同时频算法对时频平面的划分示意图

分)。为了对比, 同样把普通 Fourier 变换、分数阶 Fourier 变换和小波变换对时频平面的划分行列出来。

从图 2 可以看出双正交 Fourier 变换特别适合分析不同调频斜率 LFM 组成的信号。图 3 为 4 个 LFM 信号的离散双正交 Fourier 变换的斜率谱, 仿真条件为 $T = \sqrt{2\pi}$ s, 采样 1000 点, 则斜率谱的分辨率 $\Delta\omega_2 = 1$ rad/s²。信号形式如式(20)所示, 其中各个分量调频斜率 $K_i = \{100, 400, 600, 900\}$ rad/s², 各个分量幅度 $A_m = \{1, 0.5, 0.3, 0.8\}$ 。

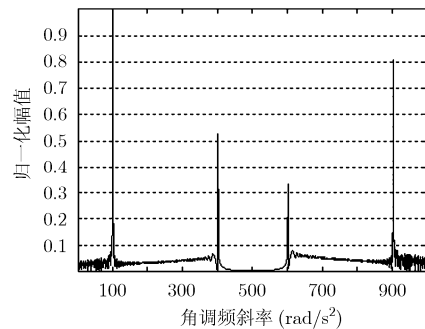


图 3 4 个 LFM 信号和的离散双正交 Fourier 变换斜率谱

下面再给出双正交 Fourier 变换的另一个应用。如图 4 所示为光学传输模型, E_o 为光源复振幅分布, 在距离光源 R 处有一接收平面, 其复振幅分布为 E_r 。当两平面平行时, $E_o(x)$ 和 $E_r(x)$ 的关系在很多文献都有讨论, 本文主要讨论辐射源与接收平面相垂直的情况, 此时接收信号表示为

$$E_r(x) = \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \int E_o(y) \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda} \frac{(y+R)^2}{x}\right] dy \quad (26)$$

令 $x = \pi/\lambda x$ 作变量代换, 当 $R \rightarrow 0$ 时, 上式变为

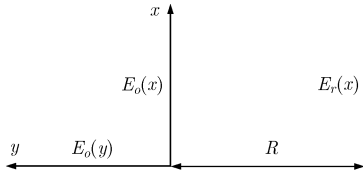


图4 光波的传输示意图

$$E_r(\pi/\lambda x) = \exp\left[i\frac{2\pi^2}{\lambda^2}x\right] \int E_o(y) \exp(ixy^2) dy \quad (27)$$

令 $C(x) = \exp\left[i\frac{2\pi^2}{\lambda^2}x\right]$, 则上式可表示为

$$E_r(\pi/\lambda x) = C(x) \text{IBFT}[E_o(y)] \quad (28)$$

同理, 其反变换为

$$E_o(y) = \text{BFT}[C(x)E_r(\pi/\lambda x)] \quad (29)$$

上式可用来计算有阻挡情况下近程源的分布。

6 结论

本文提出了一种新的基于双正交 Fourier 变换的 LFM 信号调频斜率分析方法, 文中只是对算法的主要部分做了介绍, 此外有关算法的一些其他特性, 如双正交基函数的完备性, 时/频移特性和离散快速算法等, 还要做进一步研究。

参考文献

- [1] 李利, 司锡才, 柴娟芳, 张雯雯. 一种改进的小波域 LFM 雷达信号参数估计算法. 海军工程大学学报, 2008, 20(1): 84-88. Li Li, Si Xi-cai, Chai Juan-fang, and Zhang Wen-wen. Improved algorithm for estimating parameters of LFM radar signals based on wavelet. *Journal of Naval University of Engineering*, 2008, 20(1): 84-88.
- [2] 郑生华, 徐大专. 基于小波脊线-Hough 变换的 LFM 信号检测. 量子电子学报, 2008, 25(2): 145-160. Zhang Sheng-hua and Xu Da-zhuan. Detection of LFM signals based on wavelet ridge extracting and Hough transform. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2008, 25(2): 145-160.
- [3] 彭巧乐, 司锡才, 杜亚琦. 基于瞬时互相关和 STFT 的 LFM 信号测向算法. 哈尔滨工程大学学报, 2008, 29(2): 179-182. Peng Qiao-le, Si Xi-cai, and Du Ya-qi. A direction-finding method for LFM signals based on instantaneous cross correlation and STFT. *Journal of Harbin Engineering University*, 2008, 29(2): 179-182.
- [4] Qi Lin, Tao Ran, Zhou Si-yong, and Wang Yue. Detection and parameter estimation of multicomponent LFM signal based on the fractional Fourier transform. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2004, 47(2): 184-198.
- [5] Qi Lin, Tao Ran, and Wang Yue. Adaptive time-varying filter for linear FM signal in fractional Fourier domain. *IEEE Proceedings of the 6th International Conference on Signal Processing*, Beijing, China, August 26-30, 2002, 2: 1425-1428.
- [6] 祝俊, 陈兵, 唐斌. 快速多分量 LFM 信号的检测与参数估计方法. 电子测量与仪器学报, 2008, 22(11): 25-29. Zhu Jun, Chen Bing, and Tang Bin. Fast detection and

parameter estimation method for Multi-component LFM signal. *Journal of Electronic Measurement and Instrument*, 2008, 22(11): 25-29.

- [7] 张淑宁, 赵惠昌, 涂友超. 基于 FRFT 的伪码引信自适应 LFM 干扰对消方法. 电子与信息学报, 2008, 30(5): 1084-1087. Zhang Shu-ning, Zhao Hui-chang, and Tu You-chao. The method of adaptive time-varying interference cancellation based on FRFT for pseudo-random coded fuze. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(5): 1084-1087.
 - [8] Wood J C and Barry D T. Linear signal synthesis using the Radon-Wigner transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(8): 2105-2111.
 - [9] Yury Grishin and Wojciech Niczyporuk. LFM radar signal detection in the joint time-frequency domain. *SPIE Proceedings of Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry and High-energy Physics Experiments*, Wilga, Poland, May 21-27, 2007, 6937, 69373M: 1-7.
 - [10] 吴涛, 袁嗣杰, 陈进军, 李伟. 一种新的 LFM 信号检测算法仿真分析. 系统仿真学报, 2008, 20(9): 2395-2397, 2428. Wu Tao, Yuan Si-jie, Chen Jin-jun, and Li Wei. Simulation analysis of new algorithm for LFM signal detection. *Journal of System Simulation*, 2008, 20(9): 2395-2397, 2428.
 - [11] Li Ying-xiang, Yi Min, and Xiao Xian-ci. Recursive filtering Radon-Ambiguity transform algorithm for multi-LFM signals detection. *IEEE Proceedings of International Conference on Communications, Circuits and Systems and West Sino Expositions*. Beijing, China, June 29-July 1, 2002, 2: 1050-1053.
 - [12] 贾舒宜, 王国宏, 杜文超. 在单脉冲内基于 Radon-Ambiguity 变换的加速度估计方法研究. 宇航学报, 2008, 29(3): 989-994. Jia Shu-yi, Wang Guo-hong, and Du Wen-chao. Acceleration estimation based on Radon-Ambiguity transformation in one pulse. *Journal of Astronautics*, 2008, 29(3): 989-994.
 - [13] Barbarossa S. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Wigner-Hough transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(6): 1511-1515.
 - [14] He You, Su Feng, and Qu Chang-wen. A novel multiple LFM signals detection method. *IEEE Proceedings of the 4th International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology*, Beijing, China, August 18-21, 2004: 818-821.
 - [15] Chen En-qing and Tao Ran. A novel method to detect and separate LFM signal based on artificial neural network. *IEEE Proceeding of International Conference on Neural Networks and Brain*. Beijing, China, October 13-15, 2005, 1: 32-35.
 - [16] Wang Ling-huan, Ma Hong-guang, Zhang Jia-wen, and Ai Ming-shun. A method to detect multi-components linear FM signal. *IEEE Proceeding of the 8th International Conference on Signal Processing*. Guilin, China, November 16-20, 2006, 4: 1-5.
- 王本庆: 男, 1981 年生, 博士生, 研究方向为毫米波成像及其信号处理技术。
李兴国: 男, 1940 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为毫米波探测技术。