

基于二阶锥约束的方向不变恒定束宽波束形成

幸高翔 蔡志明

(海军工程大学电子工程系 武汉 430033)

摘要: 该文提出了基于 2 阶锥约束(SOCP)的方向不变恒定束宽波束形成算法。本算法的优化准则为在保证各个指向上设计波束的主瓣与相应的参考波束的主瓣之间的均方误差最小的条件下,使设计波束旁瓣级尽量低。该约束优化可转化为标准 2 阶锥形式,采用优化工具箱 SeDuMi 实现。仿真计算表明,新算法能够在主波束指向 $\pm 60^\circ$ 范围内得到良好的方向不变恒定束宽波束图。

关键词: 波束形成; 方向不变恒定束宽; 主瓣控制; 二阶锥规划

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)09-2109-04

Steering-Invariant Constant Beamwidth Beamforming with SOCP Constraints

Xing Gao-xiang Cai Zhi-ming

(Dept. of Electronics Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: This paper introduces a steering-invariant constant beamwidth beamforming algorithm with Second-Order Cone Programming (SOCP) constraints. The optimizing criterion of the proposed algorithm is suppressing the designed sidelobe level utmost while keeping the mean-squared error between the designed mainlobe and the corresponding reference mainlobe on all look directions minimizing. The constrained optimizing formula can be reformed to a standard SOCP fashion and be solved with SeDuMi, an optimization toolbox. It is shown with simulation that the proposed algorithm can obtain the steering-invariant constant beamwidth beampattern effectively under the designed main-lobe direction of $\pm 60^\circ$.

Key words: Beamforming; Steering-invariant constant beamwidth beamforming; Main-lobe shape controlling; Second-Order Cone Programming (SOCP)

1 引言

阵列天线是通信、雷达和声纳系统的重要组成部分,而非圆形阵列在阵列天线中占有很大比例,如线阵、平面阵、共形阵等。在这些阵列中,当波束主瓣指向不同方位时,主瓣宽度是变化的,例如,当主瓣逐渐偏离基阵法线方向时,主瓣是逐渐变宽的^[1]。这势必导致阵列的分辨性能下降。为保证阵的指向性能不变,要求主波束在不同的指向上始终保持波束宽度不变,即实现方向不变恒定束宽波束。方向不变恒定束宽波束形成的应用领域包括声纳中的拖曳线列阵的高分辨波束形成、合成孔径声纳成像等。

从概念上分,恒定束宽波束形成有两大方面的研究内容。一为宽带频率不变恒定束宽波束形成;二为窄带方向不变恒定束宽波束形成。恒定束宽波束形成的研究,主要集中在频率不变恒定束宽波束形成^[2-5]方面,至于方向不变恒定束宽波束形成^[6,7]

的研究则很少。文献[6,7]将研究局限于均匀线阵,无法适用于任意阵型阵列。文献[8-10]采用在波束的主、旁瓣区域内设置若干虚拟干扰源的方式,迭代调整干扰源强度以达到控制波束主、旁瓣的目的。尽管这种方法效果不错,但是,该方法的计算量是与干扰源数目成比例的,而干扰源数目偏少是会影响算法效果的。

本文在文献[10]的主瓣控制思想的基础上,提出一种方向不变恒定束宽波束形成算法。采用非线性约束优化,即在保证各个指向上设计波束的主瓣与相应的参考波束的主瓣之间的均方误差最小的条件下,使设计波束旁瓣级最低。该约束优化能够变形为凸优化的形式,以便采用 2 阶锥约束优化理论,借助高效的 SeDuMi^[11]工具箱进行算法实现。

本文的第 2 节简单介绍了阵列处理的基本表示,提出本文要处理的问题;第 3 节为方向不变恒定束宽算法的详尽步骤;第 4 节是该算法的计算机仿真;最后一节是本文的结论部分。

2 问题表述

考虑一 p 元阵列,阵元 i 与阵元 $i+1$ 之间间距

为 d_i 。设远场单频平面波信号以角度 θ 入射在基阵上, 则基阵的输出信号为^[9]

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x} \quad (1)$$

式中, 权矢量 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_p]^T$, \mathbf{T} 为转置。 \mathbf{H} 为共轭转置。设信号幅度为 A , 平面波信号频率为 ω_0 , 则观察向量 $\mathbf{x} = [\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_p(t)]^T = A e^{j\omega_0 t} \mathbf{a}$, \mathbf{a} 是指向向量, 其表达式为

$$\mathbf{a} = [f_1(\theta), f_2(\theta)e^{-j\phi_2(\theta)}, \dots, f_p(\theta)e^{-j\phi_p(\theta)}]^T \quad (2)$$

其中 $\phi_j(\theta) = 2\pi \left[\sum_{k=1}^{j-1} d_k \right] \sin \theta / \lambda$, ($j \geq 2$), $f_j(\theta)$ 表示基元的方向性。定义波束为

$$p(\theta) = |\mathbf{w}^H \mathbf{a}| \quad (3)$$

定义主波束左边第 1 个零点和右边第 1 个零点分别为 θ_L 和 θ_R 。定义区域 $[\theta_L, \theta_R]$ 为主瓣区域, $[\theta_L, \theta_R]$ 之外的区域为旁瓣区域。

现在的问题是: 对于一个给定的阵列, 如何采用一定的算法, 获得方向不变恒定束宽波束图? 这是后面要详细讨论的内容。

3 方向不变恒定束宽波束形成

文献[6,7]研究了方向不变恒定束宽波束, 它们通过解析的方式得出了不同主瓣指向时的基阵加权向量, 但是, 它们的研究基础是均匀线阵。本文采用约束优化的方式, 不对阵型做任何的限制, 突破算法只能应用于均匀线阵的局限。

本文算法的核心思想是: 在保证各个指向上设计波束的主瓣与相应的参考波束的主瓣之间的均方误差最小的条件下, 使设计波束旁瓣级最低。

3.1 方向不变恒定束宽的约束优化表示

由于旁瓣级是要最小化的目标, 而真正的约束在于某特定指向上设计波束的主瓣与相应的参考波束的主瓣差异, 所以本文主要考虑主瓣约束。假设以指向 θ_r 的波束图主瓣为参考主瓣, 旁瓣高度指定为 H_{SL} (dB), 这样就得到了一幅参考波束图。为了使不同指向的设计波束能逼近参考波束, 则应该根据不同的主瓣指向构造对应的参考波束。

设指向 θ_r 的波束图为 $p_r(\theta)$, 可以计算出 $[\theta_L, \theta_R]$, 进而可以切割得到 $p_r(\theta)$ 的主瓣 $p_{rml}(\theta)$ 。对应于不同指向的参考波束主瓣均以 $p_{rml}(\theta)$ 平移得到, 平移关系为 $\theta_d - \theta_r$ 。 θ_d 为所设计的主瓣指向。如果 $\theta_d = \theta_r$, 则参考主瓣不需平移; 如果 $\theta_d < \theta_r$, 则参考主瓣向左平移 $|\theta_d - \theta_r|$ 度; 反之, 则向右平移 $|\theta_d - \theta_r|$ 度。假设 $H_{SL} = -30$ dB, 参考波束如图 1 所示。图中, $\theta_r = 25^\circ$, 不同的参考主瓣仅仅是 $p_{rml}(\theta)$ 平移的结果。这里假设了旁瓣级不变。通过比较可以看到不同指向处的主瓣与 $\theta_r = 25^\circ$ 处的主瓣是一

致的。文献[10]采用余弦函数的形式指定主瓣的形状, 这可能会与实际的阵列波束图不一致。采用 $p_{rml}(\theta)$ 作为参考主瓣, 由于它是实际波束形成得到的主瓣, 能够与实际阵列和实际参考波束指向相匹配, 可以避免失配情况发生。

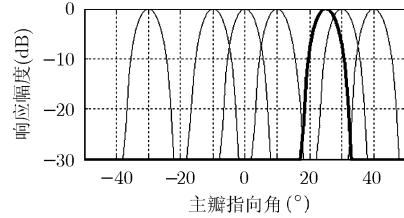


图1 不同主瓣指向的参考波束 ($\theta_r = 25^\circ$, $H_{SL} = -30$ dB)

不失一般性, 假设某基阵对空间的观测角仅在一个平面内, 本算法的结果可以方便地推广到 3 维空间。以基阵的法线为 0° 方向, 设基阵的观测角范围是 $[\theta_L, \theta_R]$, 将该观测角范围离散化, 每个观测方向对应一个主瓣, 得到 N 个主瓣指向角 $\theta_{s1}, \theta_{s2}, \dots, \theta_{sN}$ 。

对某一个主瓣指向角 θ_{si} , 进行如下约束优化

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} & \left| \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{iSL}) \right|, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \text{s.t.} & \left| \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{si}) \right| = 1 \\ & \sum_{j=1}^M \left| P_d(\theta_{ij}) - P_r(\theta'_{ij}) \right|^2 < \varepsilon, \quad \theta_{ij} \in [\theta_L, \theta_R]_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 θ_{iSL} 是主瓣指向 θ_{si} 时波束旁瓣区域的离散化角度, 将旁瓣区域离散化为 K 个角度; $P_d(\theta_{ij})$ 是设计波束主瓣的第 j 个值, $P_r(\theta'_{ij})$ 是平移后的主极大在 θ_{si} 处的参考主瓣的第 j 个值, $[\theta_L, \theta_R]_i$ 是主瓣指向角在 θ_{si} 时的主瓣区域。

如果 θ_{si} 取遍整个观察区域, 就可以在不同的主瓣指向处获得具有同样主瓣宽度的波束图, 同时波束旁瓣级自适应调整, 即可以实现方向不变恒定束宽波束图。

3.2 方向不变恒定束宽的 2 阶锥表示

2 阶锥规划是一种好的内点算法, 而其实现工具箱 SeDuMi^[11,12]可用于高效处理对称锥优化问题。在 SeDuMi 工具箱中, 标准的凸优化问题定义为

$$\max \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad \text{s.t. } \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \kappa \quad (5)$$

式中 \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 是任意向量, \mathbf{A} 是任意的系数矩阵, \mathbf{y} 是包含有未知参数的向量, 而 κ 是一个对称锥的集合。 \mathbf{A} , \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 的维数必须匹配, 各向量均可以为复数。不等式可以转化为对称 2 阶锥, q 维 2 阶锥定义为

$$Q_c^q = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \mid x_1 \in R, \mathbf{x}_2 \in C^{q-1}, x_1 \geq \|\mathbf{x}_2\| \right\} \quad (6)$$

等式约束则可以表示为零锥, 即

$$\{0\} = \{x \in C \mid x = 0\} \quad (7)$$

式(7)中, C 为复数集。如果式(5)能够表示为

$$\left. \begin{aligned} & \max \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & \text{s.t. } \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \{0\}^{q_1} \times R_+^{q_2} \times Q_c^{q_3} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

的形式, 则可以很容易地采用工具箱 SeDuMi 进行求解。式(8)中的约束表示含有 q_1 个等式约束, q_2 个线性约束和 q_3 个 2 阶锥。

为了式(4)更便于使用 SeDuMi 计算, 先将式(4)表示如下:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} \delta \\ & \text{s.t. } |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{si})| = 1 \\ & \sum_{j=1}^M \varepsilon_j < \varepsilon \\ & |P_d(\theta_{ij}) - P_r(\theta'_{ij})|^2 \leq \varepsilon_j, \quad \theta_{ij} \in [\theta_L, \theta_R]_i \\ & |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_{iSL})| \leq \delta, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中 δ 是一个新引入的非负标量, ε_j 是一组新引入的非负向量, $j = 1, 2, \dots, M$ 。

定义 $\mathbf{y} = [\delta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M, w_1, \dots, w_p]^T$, $\mathbf{b} = [-1, \mathbf{0}_{1 \times M}, \mathbf{0}_{1 \times p}]^T$, 其中 $\mathbf{0}_{1 \times M}$ 表示 $1 \times M$ 维的零向量。式(9)的等式约束可以利用零锥的定义表示为

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \mathbf{a}^H(\theta_{si})\mathbf{w} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{M \times 1}^T & \mathbf{0}_{p \times 1}^T \\ \mathbf{0}_{M \times 1}^T & -\mathbf{a}^H(\theta_{si}) \end{array} \right) \mathbf{y} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{A}_1^T \mathbf{y} \in \{0\}^2 \quad (10)$$

式(9)的第 1 个不等式约束可以用 2 阶锥表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon - \sum_{j=1}^M \varepsilon_j &= \varepsilon - \left(\begin{array}{cc} \mathbf{1}_{M \times 1}^T & \mathbf{0}_{p \times 1}^T \end{array} \right) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{c}_{1+1} - \mathbf{A}_{1+1}^T \mathbf{y} \in R_+^1 \end{aligned} \quad (11)$$

式(9)的第 2 个不等式约束可以用 2 阶锥表示为^[5,12]

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \varepsilon_j + 1 \\ 2P_r(\theta'_{ij}) - 2\mathbf{a}^H(\theta_{ij})\mathbf{w} \\ \varepsilon_j - 1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2P_r(\theta'_{ij}) \\ -1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & -\mathbf{e}^T(j) & \mathbf{0}_{p \times 1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{M \times 1}^T & 2\mathbf{a}^H(\theta_{iSL}) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{e}^T(j) & \mathbf{0}_{p \times 1}^T \end{array} \right) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{c}_{2+m} - \mathbf{A}_{2+m}^T \mathbf{y} \in Q_m^3, \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{e}(j) = [e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_M]^T$, 且 $e_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ 。

式(9)的第 3 个不等式约束可以用 2 阶锥表示为

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \delta \\ \mathbf{a}^H(\theta_{iSL})\mathbf{w} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} \delta \\ 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{M \times 1}^T & \mathbf{0}_{p \times 1}^T \\ \mathbf{0}_{M \times 1}^T & -\mathbf{a}^H(\theta_{iSL}) \end{array} \right) \mathbf{y} \\ &= \mathbf{c}_{2+k+M} - \mathbf{A}_{1+k+M}^T \mathbf{y} \in Q_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (13)$$

令 $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T, \dots, \mathbf{c}_{2+K+M}^T]^T$, $\mathbf{A}^T = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{2+K+M}]^T$, 其中 \mathbf{c}_i 和 \mathbf{A}_i 由式(10)-式(13)给出。SeDuMi 工具箱能够处理复数变量, 定义权向量 \mathbf{w} 为复数向量, 则约束优化问题式(9)可以表示为标准的 2 阶锥优化问题:

$$\left. \begin{aligned} & \max \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ & \text{s.t. } \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \{0\} \times R_+^1 \times Q_1^2 \times \dots \times Q_K^2 \times Q_1^3 \times \dots \times Q_M^3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

在利用 SeDuMi 求得了 \mathbf{y} 之后, 其最后 p 个分量就是所求的权向量 \mathbf{w} 。

2 阶锥规划属于凸优化范畴, 而凸优化算法具有一个明显的特点: 任何局部最优点即是全局最优点。权向量 \mathbf{w} 是 SOCP 算法收敛后得到的, 其必定收敛于全局最优点, 即该权向量 \mathbf{w} 是在本约束条件下的最优权值。

4 仿真实例

在前面的公式推导中, 对阵型没有做任何的要求, 即本算法可以适用于任意阵型的阵列。为不失一般性, 同时为了说明的简便, 在此采用 1 维线阵来验证算法的有效性。

采用 16 元均匀线阵, 阵元各向同性, 阵元间距为工作波长的半波长。以主波束指向 20° 处的波束主瓣为参考主瓣, 运用上述算法进行方向不变恒定束宽波束形成, 得结果如图 2 所示, 图 3 为参考主瓣在不同位置时 3 dB 波束宽度随方位变化曲线。为了进行对比, 常规波束形成的 3 dB 波束宽度随方位变化曲线也示于图 3。

分析图 2 可知, 在主波束指向 $\pm 60^\circ$ 范围内时, 主波束宽度是基本恒定的, 而且在 $\pm 50^\circ$ 左右的范围

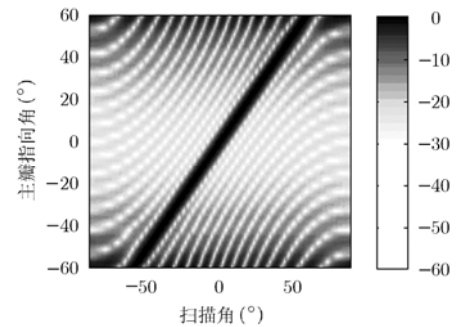


图2 方向不变恒定束宽波束

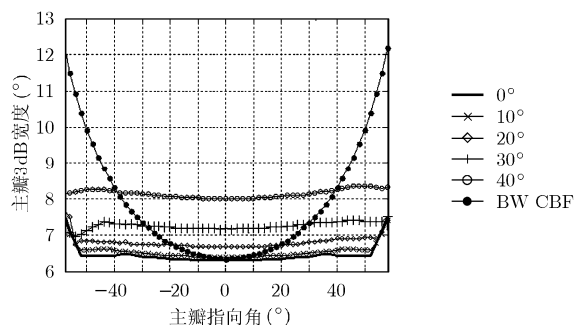


图3 不同参考主瓣方向时3 dB 宽度变化曲线

内,还能形成比较低的均匀旁瓣。当主瓣指向角超出 $\pm 50^\circ$ 的范围,旁瓣明显升高。这是因为常规波束当主瓣指向超出 $\pm 50^\circ$ 的范围时,主瓣束宽变宽较快,当要将其限定在一定的宽度内时,旁瓣会明显升高;而且参考主瓣 $p_{\text{rml}}(\theta)$ 宽度越窄,旁瓣越高。

图3表明,常规波束形成的3 dB波束宽度变化较大。为了更好地进行比较,新算法采用了不同位置的参考主瓣,如分别选取为 0° , 10° , 20° , 30° 和 40° 。结果表明,当参考位置越偏离基阵法线方向时,在法线方向的波束宽度损失越大;但是,如果参考位置取为0时,当主瓣指向大于 50° 后旁瓣级明显升高。权衡这两方面的因素,选取参考主瓣指向为 20° 。

为了量化3 dB波束宽度的变化情况,定义

$$\text{波束宽度相对变化率} = \frac{\text{波束宽度变化}}{\text{最小波束宽度}} \quad (15)$$

为了同文献[13]对比,将参考主瓣指向调整到 25° ,此时常规波束形成的波束宽度相对变化率还是104.73%,波束宽度变化绝对值为 6.64° 。而此时本文算法的波束宽度相对变化率仅为14.24%,小于文献[13]的16.32%;波束宽度变化绝对值为 0.95° ,也小于文献[13]的 1° 。

图2,图3的分析表明,本算法能够形成很好的方向不变恒定束宽波束图。

5 结论

本文采用约束优化的方式实现了方向不变恒定束宽波束形成,优化准则是:在保证各个指向上设计波束的主瓣与相应的参考波束的主瓣之间的均方误差最小的条件下,使设计波束旁瓣级最低。新算法将该约束优化转化为2阶锥优化的形式,采用高效的SeDuMi工具箱实现。仿真实验表明,新算法能够在主波束指向 $\pm 60^\circ$ 范围内获得良好的方向不变恒定束宽波束图。

尽管本文采用的是1维线阵进行算法验证,但由于主瓣约束算法不存在阵型限制,因此,本文的

方向不变恒定束宽波束形成算法也适用于任意阵型阵列。

参考文献

- [1] Van Trees H L. Optimum Array Processing[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2002, Chapter 2.
- [2] Ward D B, Kennedy R A, and Williamson R C. Theory and design of broadband sensor arrays with frequency invariant far-field beam patterns [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1995, 97 (2): 1023-1034.
- [3] 张保嵩, 马远良. 宽带恒定束宽波束形成器的设计与实现[J]. *应用声学*, 1999, 18(5): 29-33.
Zhang Bao-song and Ma Yuan-liang. Beamformer for broadband constant beamwidth through FIR and DSP implementation [J]. *Applied Acoustics*, 1999, 18(5): 29-33.
- [4] Liu Wei and Weiss S. A new class of broadband arrays with frequency invariant beam patterns [C]. ICASSP-2004, Montreal, Canada, 2004: 185-188.
- [5] Yan She-feng. Optimal design of FIR beamformer with frequency invariant patterns[J]. *Applied Acoustics*, 2006, 67(6): 511-528.
- [6] Giuseppe A and Ryuji K. Chebyshev-like sidelobe beam patterns with adjustable beamwidth and steering-invariance[C]. Proceedings for European Wireless 2002 (EW'02), Florence (Italy), 2002: 732-738.
- [7] Khanna R. Characterization and development of algorithms for arrays processing architectures of adaptive antennas in wireless communication[D]. [Ph.D. dissertation], Deemed University, India, 2006.
- [8] 马远良. 任意结构形状传感器阵方向图的最佳化[J]. *中国造船*, 1984, 25(4): 78-85.
Ma Yuan-liang. Pattern optimization for sensor arrays of arbitrary configuration[J]. *Ship Building of China*, 1984, 25(4): 78-85.
- [9] Olen C A and Compton R T. A numerical pattern synthesis algorithm for arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1990, 38(10): 1666-1676.
- [10] Anh P and Hoang D T. A numerical pattern synthesis algorithm for arbitrary arrays[C]. Proceedings of 6th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory, Beijing, 2003, 10: 210-213.
- [11] Sturm J F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones[J]. *Optimization Methods and Software*, 1999, 11(12): 625-653.
- [12] Jing L, Gershman A B, and Zhi-quan L, et al. Adaptive beamforming with sidelobe control: A second-order cone programming approach[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2003, 10(11): 331-334.
- [13] 幸高翔, 蔡志明. 方向不变恒定束宽波束图数值综合[J]. *电子与信息学报*, 2009, 31(3): 574-577.
Xing Gao-xiang and Cai Zhi-ming. Numerical synthesis for constant beamwidth beam pattern with steering-invariance [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(3): 574-577.

幸高翔: 男, 1978年生, 讲师, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、水声信号处理、数据融合等。

蔡志明: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为信号处理、水声物理等。