第 31 卷第 7 期　　电子与信息学报　　Vol.31No.7
2009 年 7 月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Jul. 2009

基于 Multibandelets 的自适应图像压缩

杨晓慧[①②]　　焦李成[③]　　李登峰[①②]
[①](河南大学应用数学研究所　开封　475004)
[②](河南大学数学与信息科学学院　开封　475004)
[③](西安电子科技大学智能信息处理研究所和智能感知与图像理解教育部重点实验室　西安　710071)

摘　要：为了在图像压缩时更好地保护具有方向性的几何结构信息，该文构建了一种新的基函数，称为 Multibandelets，并结合 Shannon 编码用于自然图像的压缩。实验结果表明：与多小波、具有同样消失矩的小波和 Bandelets 相比较，基于 Multibandelets 的图像压缩在视觉效果和客观衡量指标两方面都有改善，尤其对具有方向性的细节和纹理信息具有更好的表示。

关键词：图像压缩；Multibandelet；几何方向分析
中图分类号：TN919.81　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2009)07-1615-05

Adaptive Image Compression Based on Multibandelets

Yang Xiao-hui[①②]　　Jiao Li-cheng[③]　　Li Deng-feng[①②]
[①](*Institute of Applied Mathematics*, *Henan University*, *Kaifeng* 475004, *China*)
[②](*School of Mathematics and Information Sciences*, *Henan University*, *Kaifeng* 475004, *China*)
[③](*Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education of China*, *Institute of Intelligent Information Processing*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: For protecting directional geometric structure information, a novel basis function called multibandelets is presented in this paper. And then an image compression algorithm is proposed based on the multibandelet transform and Shannon encode. Experiments show that the multibandelets-based compression provides improvements both in visual effects and quantitative analysis, especially for the detail information containing directional geometric structures. The compared methods are multiwavelets, and those of the wavelets and bandelets with the same vanishing moments, respectively.

Key words: Image compression; Multibandelet; Geometric directional analysis

1　引言

图像压缩是指以较少的比特有损或无损地表示原来的像素矩阵的技术，也称图像编码，是信号处理、计算机视觉等众多研究领域的核心问题之一。小波图像压缩是近年来用的比较广泛的压缩方法[1−4]，然而，传统的基于小波分解的图像压缩方法认为低频分量中集中着大部分能量，而将高频部分作为不重要信息对待，弱化了其中的细节和纹理信息的重要性。小波、多小波等由于自身的局限性使得它们对图像中具有高度奇异性的边缘和围线等信息处理的不够理想，对图像中的各向异性几何冗余也无能为力。另外，目前大多数压缩方法通常在量化和编码策略上作改进[5−8]，没有考虑到图像内在结构的几何正则性。Bandelets[9−13]是一种完全建立在小波的基础之上，集中于感兴趣区域(边缘、边界等几何结构信息)的图像的多尺度几何分析工具，旨在充分利用图像自身的几何正则性并去除标准小波变换所不可避免的各向异性几何冗余，自适应构造最优的基函数并对所要表示的函数给出更稀疏的表示，这更适于图像压缩[14−16]。然而，由于 Bandelet 完全建立在小波的基础之上，其性能受到所采用小波性能的限制。本文对 Bandelet 进行改进，构建了一种新的标准正交基函数，称为 Multibandelet，并用于自然图像压缩。Multibandelet 基函数能充分利用图像内在结构的几何正则性，并且具有更好的能量集中性，以及正交性和对称性等优点，因此更适合于图像压缩，尤其是方向性细节和纹理比较丰富的图像。

2008-07-23 收到，2009-03-09 改回
国家自然科学基金(60702062)，河南省创新型科技人才队伍建设工程(084100510012)和河南省教育厅自然科学基金(2008B510001)资助课题

2 Bandelet 图像压缩

2.1 Bandelets

Bandelet 是 Pennec 和 Mallat 于 2000 年提出的一种典型多尺度几何分析图像表示方法。对于一致正则的函数 $f(x_1,x_2)\in C^{\alpha}$，Bandelets 可以和小波变换一样达到最优的衰减率，即 $cM^{-\alpha}$，而且能充分利用图像的几何正则性，用更少的基函数做更稀疏的逼近。对边界有分段不连续性的 2 维光滑函数(所有有界变差函数)，小波只能达到 $O(M^{-1})$，而 Bandelets 不会因不连续性的存在而降低衰减阶，仍能达到最优。Bandelets 的核心思想是把图像中的几何特征定义为矢量场，而不是简单地看成普通边缘的集合，基于应用目的定义目标函数，以优化目标函数来自适应选择所需的基函数组成。与小波相比较，Bandelets 具有如下对图像处理非常关键的性质：多方向性和各向异性，可以弥补小波函数仅能对点奇异信息给出最优表示，而对图像中具有高度奇异特性的边缘和围线信息无能为力，从而对这种高维奇异性信息给出最优表示；自适应性，可以根据图像自身的特性，基于目标函数最优自适应选取所需的基函数，并给出渐进最优的表示。正因为如此，Bandelets 可以获得图像的渐进最优表示，尤其对含几何结构的图像效果更好。

第一代 Bandelets 旨在借助弯曲算子把自然图像中各个方向的奇异性先扭转至水平或垂直方向，然后借助常用的二维标准可分离小波变换来最优地处理。所构造出的 Bandelet 基函数是由一个表示图像中灰度变化的几何流向量组构成的，并且在几何流的方向上作拉伸。第一代 Bandelet 具体应用存在计算复杂度的难题，而且对于复杂的图像其逼近效果至多和小波相当。2004 年，Peyre 和 Mallat 又提出了一种新的图像几何特征的编码方案，称为第二代 Bandelets。除了继承第一代 Bandelets 的优越性外，第二代 Bandelets 更是一种完全离散化的构造，不需要对原始图像做任何的重采样或者弯曲(Wraping)操作，避免了繁杂的自适应剖分和几何流的计算，也不需要对水平或垂直区域作复杂的判断和标示，可以在整个图像上构造标准正交基，并可以构造更快速、更鲁棒的运算法则。第二代 Bandelet 变换的主要思想类似于 Contourlet 变换，对图像分阶段通过二维小波变换和几何方向正交投影方向上的一维小波变换进行多尺度分析和方向分析。

2.2 几何方向分析

从图像的几何结构出发，充分利用图像自身的几何正则性，找到和真实几何方向最匹配的方向，从而获得图像的有效表示，这个过程我们就称为“几何方向分析”，这是一种针对边缘、边界和纹理信息的图像分析方法。几何方向分析的思想概述如下：依据数据分布的动态范围，采用“四叉树”方法对原图像进行分割[17]。首先把图像分割成大小为 4×4 的子块，然后从图像的左上角开始，对相邻的同级 4 个子块与上一级较大的由这 4 个子块组成的较大的子块作比较，根据相似性准则做融合处理，这里的相似性准则指的是目标函数最小化，即，若 4 个相邻的尺寸为 2^2 的子块所对应的目标函数值之和大于这 4 块合在一起所构成的大小为 2^3 的子块所对应的目标函数值，则用后者对应的匹配方向作为这 4 块中所有像素对应的匹配方向，反之，则保留前者 4 个较小子块中各自的匹配方向。依照这样的相似性准则，从图像的左上方向右下方逐次推进处理，一直到整个图像进行完为止；对所有 2^2 大小的子块找到相应的最优方向后，再重复此过程计算大小为 2^3 、2^4 和 2^5 的子块中的最优匹配方向，即，依照同样的相似性准则依次考察 8×8 、16×16 和 32×32 的子块。

以图像压缩为例，相似性准则定义为如下的 Lagrange 方程，其中第一部分为重构误差，第二部分为计算复杂度，T 为阈值，3/28 为惩罚因子：

$$L(f,R,B)=\|f-f_R\|_2^2+\frac{3}{28}T^2\sum\nolimits_j(R_{\mathrm{jS}}+R_{\mathrm{jG}}+R_{\mathrm{jB}}) \tag{1}$$

这里 $\|f-f_R\|_2^2$ 是重构误差，表明了重构精度；$R=\sum\nolimits_j(R_{\mathrm{jS}}+R_{\mathrm{jG}}+R_{\mathrm{jB}})$ 是计算所需的总的编码数，代表计算复杂度，这两项通过 Lagrange 罚函数法共同构成目标函数，T 是量化过程中选取的阈值，作为罚因子一部分。具体的，R_{jS} 是二进剖分所需的编码数，R_{jG} 是每个子块中量化多项式几何流的所需编码数，R_{jB} 是编码量化系数所需编码数。

通过这样的剖分、合并过程，完成图像的二进剖分，把图像中的边缘、边界或纹理信息归属于不同大小的剖分子块中。在每一个这样的子块中，通过一系列的方向采样，按照设定的衡量准则，基于目标函数最小的准则，找到与边缘、边界或纹理最匹配的方向。几何方向分析主要受两个因素的影响，一是剖分子块的大小，二是匹配方向(即，正交投影方向)的寻找。剖分子块过大或者过小都会造成非零系数的增加，只有大小最合适的剖分子块才能获得最稀疏的图像表示。在同一个剖分子块中，正确的匹配方向可以产生较少的非零系数，偏离真实几何方向的方向则会产生较多的非零系数。

3　Multibandelets 及其在图像压缩中的应用

3.1 Multibandelets

多小波[18−20]的基本思想是将单小波中由单个尺度函数生成的多分辨分析空间扩展为由多个尺度函数生成，以此来获得更大的自由度。多小波理论类似于单小波，也是基于多分辨分析的。由于能同时具有正交性和对称性，多小波在用于图像压缩时要好于小波。然而，高频子带中非零的多小波系数间仍存在较强的相关性，而且多小波不能利用图像内在结构的几何正则性，从而获得更为稀疏且更优的匹配表示。为了达到更有效的压缩效果，结合多小波和几何方向分析，构建一种新的基函数，称为 Multibandelets。该基函数充分结合多小波和几何方向分析的优点，在保持多小波可以同时满足对称性、正交性、逼近阶和消失矩，同时又充分考虑到图像内在结构的几何正则性，旨在自适应获取边缘和边界信息的渐进最优匹配，并去除各向异性几何冗余，获得更好的能量集中性，从而获取更好的压缩效果。

Multibandelet 基函数的实现可以阐述为如下简洁的步骤：(1)对输入图像进行预滤波；(2)对预滤波后的图像按照设定的分解层数进行多小波分解；(3)对多小波域的各高频方向子带进行多尺度分析。通过上面的 3 个步骤，就完成了 Multibandelets 的实现，所得到的即为 Multibandelets 系数。

Malat[9]和 DeVore[21]研究表明：对于 C^2/C^2 的函数 $f(x_1,x_2)$，最优的衰减阶为 $O(N^2)$。对于 C^2 几何正则函数来说，最优的小波变换编码可以达到如下的衰减阶：

$$\|f-f_R\|^2\le CR^{-3/2}\log^{3/2}(R) \tag{2}$$

这里 C 是只依赖于信号 f 的常数。最优的 bandelets 基函数可以获得近乎最优的重构逼近效果。

$$\|f-f_R\|^2\le R^{-2}\log^2(R) \tag{3}$$

由上面的构造思想以及理论分析可以知道，Multibandelets 基函数可以保持 Bandelets 基函数所具有的渐进最优的逼近阶。Multibandelets 基函数的实现可用图 1 直观给出。

3.2 基于 Multibandelets 的图像压缩算法

根据上面的理论分析，本节给出基于 Multibandelet 的自适应图像压缩算法如下：

步骤 1　对原始输入图像信号作预滤波；

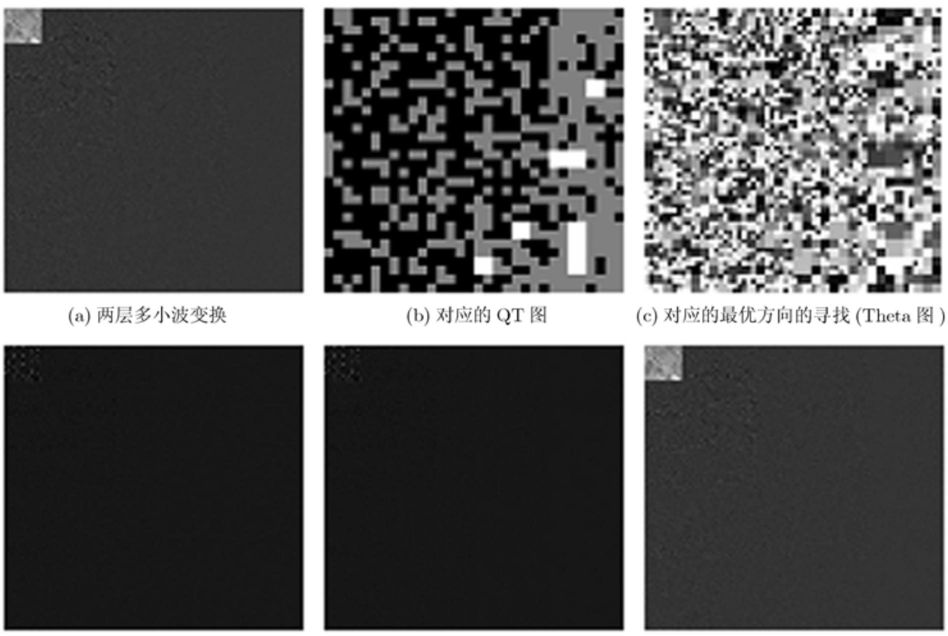
步骤 2　对预滤波后的图像做 Multibandelet 变换，得到多尺度系数图；

步骤 3　对每个尺度的各个方向子块的系数采用阈值估计子均匀量化，并采用 Shannon 理想熵编码对量化码字进行编码；

$$Q\_T(x)=\begin{cases}0,\\ \mathrm{sgn}(x)\cdot(\lfloor x/T\rfloor+0.5)\cdot T\end{cases}$$

步骤 4　Multibandelet 逆变换重构信号；

步骤 5　对重构信号作后滤波处理，得到最终的压缩图像。



(a) 两层多小波变换　(b) 对应的 QT 图　(c) 对应的最优方向的寻找 (Theta 图)

(d) 几何方向分析图　(e) 量化后图像　(f) 几何方向分析反变换图

图 1 Multibandelets 基函数的实现(2 层分解)

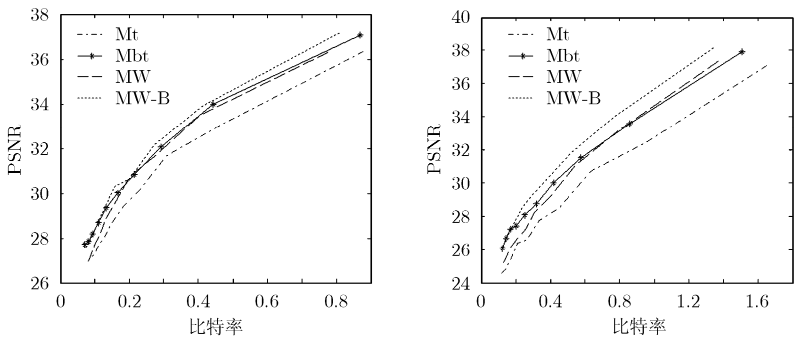
4 实验结果与分析

基于上面的分析，采用具有正交性和紧支撑性的 SA4 多小波和对应的 Multibandelets 进行压缩测试，采用正交预滤波[22]，分解层数取为 3。不失一般性，这里选择具有同样消失矩阶数的 Daubechies-4 小波，以及对应的 Bandelets。边缘采用对称展开的方式，这是为了保持图像的严格采样和边缘的连续性，而且可以只通过对称-反对称滤波器组实现。首先对标准测试图像中大小均为 512×512 的 bmp 格式的 Lena、和 Barbara 图像进行压缩测试，为了突出比较其中对于边缘和纹理信息的处理效果，截取 Lena 图像中帽子的子图，Barbara 图像中围巾和裤子的一个子图，视觉效果见图 2，客观指标对比曲线图见图 3，其中的 Mt、Mbt、MW 和 MW-B 分别代表基于小波、Bandelets、多小波和 Multibandelets 的压缩结果。

从实验结果可以看出：不论是视觉效果还是客观衡量指标，基于 Multibandelets 的压缩结果均优于基于小波、多小波和 Bandelets 的压缩结果，特别是对具有方向性的纹理和小细节，具有明显优势，对于纹理信息(Barbara 的围巾和裤子)，Multibandelets 压缩效果具有较大的潜力。客观指标与视觉效果保持一致，基于 Bandelets 和 Multibandelets 的压缩效果要稍好于对应的小波、多小波的压缩结果。在大压缩比时，虽然 PSNR 值没有明显的优势，但是从视觉效果上看，方向性细节和纹理信息明显优于其它 3 种变换方法，清晰性和连续性都比较好。我们感兴趣的是，虽然 PSNR 值优势不是很大，但从视觉效果来看，基于 Multibandelets 的压缩结果在细节和纹理等信息的保持上，都具有比较明显的优势，清晰性和连续性更好。这主要来源于 Multibandelets 基函数自身的特性，由于它很好地继承了 Bandelets 中几何方向分析的优势，对于具有方向性的信息能给出较好的表示；另一方面，它继承了多小波的优点，具有更好的能量集中性。

(a) 小波压缩结果 (b) Bandelet 压缩结果 (c) 多小波压缩结果 (d) Multibandelet 压缩结果

图 2 压缩结果比较 (0.25bpp)。第一行和第二行分别为 Lena 图像和 Barbara 图像的压缩结果



(a) Lena 图像 (b) Barbara 图像

图 3 图像压缩结果比较

5 结论

本文构建了一种 Multibandelet 基函数，并用于自然图像压缩。在相同的压缩比下，Multibandelets 整体上要好于对应的小波、多小波和 Bandelet 的压缩结果。小压缩比时具有较明显的优势；在较大压缩比时，虽然 PSNR 值不突出，但是从视觉效果上看，Multibandelet 对方向性的细节和细小目标和纹理的保持更好。根据 Multibandelet 系数的统计特性构建适合的编码策略进一步提高压缩效率是我们下一步要考虑的问题。

参 考 文 献

[1] Lewis A S and Knowles G. Image compression using the 2-D wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1992, 1(4): 244–250.

[2] Munteanu A, Cornelis J, and Van Der Auwera G, *et al.*. Wavelet compression-the quadtree coding approach. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 1999, 3(3): 176–185.

[3] Zeng Z H and Cumming I G. SAR image data compression using a tree-structured wavelet transform. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2001, 39(3): 546–552.

[4] Hou X S, Liu G Z, and Zou Y Y. SAR image data compression using wavelet packet transform and university-trellis coded quantization. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2004, 42(11): 2632–2641.

[5] Shapiro J M. Embedded image coding using zerotree of wavelet coefficients. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3445–3462.

[6] Pearlman A and Said W A. A new fast and efficient image coder based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Transactions on Circuits and System for Video Technology*, 1996, 6(3): 243–250.

[7] Lakhani G. Modified JPEG Huffman coding. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, 12(2): 159–169.

[8] 潘志刚, 王岩飞. 基于 DCT 的分块自适应量化算法及其用于 SAR 原始数据压缩. 电子与信息学报, 2007, 29(8): 1784–1788.
Pan Zhi-gang and Wang Yan-fei. A compression algorithm for SAR raw data based on the combination of discrete cosine transform and block-adaptive quantization. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2007, 29(8): 1784–1788.

[9] Penne E Le and Mallat S. Image compression with geometrical wavelets. Proceedings of IEEE Conference on Image Processing (ICIP'00). *Vancouver*, *Canada*, 2000, 1(1): 661–664.

[10] Pennec E Le and Mallat S. Sparse geometric image representations with bandelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14(4): 423–438.

[11] Pennec E Le and Mallat S. Bandelet image approximation and compression. *SIAM*: *Multiscale Modeling and Simulation*, 2005, 4(3): 992–1039.

[12] Peyré G and Mallat S. Discrete bandelets with geometric orthogonal filters. IEEE International Conference on Image Processing, Vancouver, 2005: 65–68.

[13] Peyré G and Mallat S. Surface compression with geometric bandelets. *ACM Transactions on Graphics*, 2005, 24(3): 601–608.

[14] Yang S, Liu F, and Wang M, *et al.*. Multiscale Bandelet image compression. International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems, Xiamen, 2007: 412–415.

[15] 孙文方, 宋蓓蓓, 赵亦工. 联合 Contourlet 和 Bandelet 的变换在图像压缩中的应用. 西安电子科技大学学报, 2007, 34(4): 611–615.
Sun Wen-fang, Song Bei-bei, and Zhao Yi-gong. Application of joint Contourlet and Bandelet transforms in image compression. *Journal of Xidian University*, 2007, 34(4): 611–615.

[16] 张军, 廉蔺, 黄英君等. 联合二代 Bandelet 和 Wavelet 对图像进行分层压缩. 国防科技大学学报, 2007, 29(5): 54–59.
Zhang Jun, Lian Lin, and Huang Ying-jun, *et al.*. Two-leyered image compression combing wavelet and the second generation bandelet. *Journal of National University of Defense Technology*, 2007, 29(5): 54–59.

[17] Donoho D L. Wedgelets: nearly-minimax estimation of edges. *Annals of Statistics*, 1999, 27(3): 859–897.

[18] Goodman T N T and Lee S L. Wavelets of multiplicity. *Transactions on American Mathematics Society*, 1994, 342(1): 307–324.

[19] Geronimo J S, Hardin D P, and Massopust P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions. *Journal of Approximation Theory*, 1994, 78(3): 373–401.

[20] Chui C K and Li C. Nonorthogonal wavelet packets SIAM. *Journal on Mathematical Analysis*, 1993, 24(3): 712–738.

[21] Devore R, Jawerth B, and Lueier B J. Image compression through wavelet transform coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, 38(2): 719–746.

[22] 王玲, 宋国乡. 多小波的预处理及其在图像压缩中的应用. 电子学报, 2001, 29(10): 1418–1420.
Wang Ling and Song Guo-xiang. The pre-processing of multiwavelet and its application in image compression. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(10): 1418–1420.

杨晓慧： 女，1978 年生，副教授，硕士生导师，研究方向为多尺度几何分析优化设计及其在图像处理中的应用等.

焦李成： 男，1959 年生，教授，博士生导师，研究方向为智能信息处理、人工智能算法和机器学习等.

李登峰： 男，1964 年生，教授，硕士生导师，研究方向为 Fourier 分析、小波分析理论及其应用等.