

波原子纹理图像阈值算法

刘国军^{①②} 冯象初^① 张选德^①

^①(西安电子科技大学理学院 西安 710071)

^②(宁夏大学数学计算机学院 银川 750021)

摘要: 该文提出了一个新的依赖于 Besov 光滑参数和尺度的波原子软阈值纹理图像去噪模型。该模型充分考虑了新的多尺度几何分析工具——波原子的优良特性, 比如波原子正交基和框架的灵活选取, 对振荡纹理图像的稀疏表示, 波长和支撑尺寸满足抛物尺度关系等。数值实验表明, 新模型比硬阈值和软阈值具有更好的去噪性能, 而且随着 Besov 光滑参数的增加信噪比有明显提高。

关键词: 图像处理; 波原子; 纹理; Besov 空间; 光滑参数; 阈值; 尺度

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)08-1791-05

Threshold Algorithm of Texture Images with Wave Atoms

Liu Guo-jun^{①②} Feng Xiang-chu^① Zhang Xuan-de^①

^①(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

^②(School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: A novel denoising model for texture images is proposed, which is the soft threshold algorithm depending on both the smoothing parameter in Besov spaces and the scales of wave atoms. This model well considers the good properties of new multiscale geometric analysis tool—wave atoms, such as the flexible choice of the orthonormal basis and tight frames, sparse representation of the oscillatory texture images, as well as parabolic scaling between wavelength and the size of the essential support. Numerical experiments show that the proposed model not only has a better denoising performance comparing to the hard and soft threshold, but also significantly improves the SNR with the increase of the smoothing parameter in Besov spaces.

Key words: Image processing; Wave atoms; Textures; Besov spaces; Smoothing parameter; Threshold; Scale

1 引言

图像在采集、处理以及传输过程中, 不可避免地会受到各种噪音的干扰, 比如白噪音, 散粒噪音, 热噪音等。这些噪音的存在影响了图像的质量, 尤其是破坏了图像在结构、内容等方面像素之间的相关性, 从而影响图像的进一步分析, 如分割、识别和理解。因此, 图像降噪是一种常用的图像预处理方法, 其目的为改善图像质量, 突出图像本身的期望特征。

小波分析是二十世纪九十年代出现的一门新的数学方法。由于具有时-频局部化特点和多尺度特性, 在图像处理的多个领域, 如图像编码、图像分割、纹理识别、边缘检测、图像去噪和恢复等方面得到了广泛应用并已成为 JPEG2000 的核心技术。小波对含点状奇异的目标函数是最优的基, 但是对具有线状奇异的函数而言, 小波并不能达到最优的

稀疏逼近。

生理学家对人类视觉系统和自然图像统计模型的研究结果表明, 一种“最优”的图像表示法应该具有如下的特征^[1]: (a) 多分辨: 能够对图像从粗分辨率到细分辨率进行连续逼近, 即“带通”性; (b) 局域性: 在空域和频域, 这种表示方法的“基”应该是“局部”的; (c) 方向性: 其“基”应该具有“方向”性, 不仅仅局限于二维可分离小波的 3 个方向。

为了克服小波对高维数据表示的局限性, 多尺度几何分析应运而生。它致力于构建最优逼近意义下的高维函数表示方法^[2], 这方面的代表性工作包括: 脊波框架^[3]和正交脊波(Ridgelet)^[4], 单尺度脊波^[5], 第 1 代曲线波^[6]和第 2 代曲线波^[7], Bandlet^[8], Shearlet^[9]等。

在自然图像中, 灰度值的突变并不总是对应着物体的边缘, 许多时候是由于纹理的变化而产生的。所有基于边缘的自适应方法需要解决的一个共同的问题是如何确定图像中灰度值剧烈变化的区域对应的是物体的边缘还是纹理。实际上这是一个非常困

难的问题,因而对于纹理图像的研究也越来越受到人们的重视。比如文献[10],作者利用 Gabor 小波给出了一种无边缘活动围道纹理分割办法。正如文献[2]所叙述的,上述变换^[2-9]都是基于一类特殊的具有光滑边缘的几何图像模型来分析的,并取得了很好的非线性逼近效果。然而,对于更复杂的图像,例如纹理图像,它们并不是最优的。

最近, Demanet 和 Ying^[11]提出了一种新的多尺度图像分析工具,即波原子(wave atoms)。它是一种特殊的二维波包的变形,与曲线波相比,其基的支撑区间是各向同性的,即波长约等于支撑尺寸。而其每个波包的振动周期和支撑尺寸满足抛物尺度关系,即波长约等于支撑尺寸的平方,在这个意义下可以简单地将波原子理解为方向小波和 Gabor 原子的插值。相对于小波, Gabor 原子和曲线波而言,波原子对于振荡函数(可以认为是一个简单的纹理模型)具有最优的稀疏表示。具体地说,对于给定的精度,只需要 $O(N)$ 个波原子系数就可以表示,但却需要 $O(N^{3/2})$ 个曲线波系数, $O(N^2)$ 个小波系数和 Gabor 原子系数才能达到同样的精度。

文献[12]将波原子和 TV 正则化技术相结合得到了很好的纹理表面特征刻画。文献[13]将二代曲线波变换和波原子运用于各项异性对流扩散方程,对纹理图像得到了很好的去噪效果。除此之外,目前对于波原子应用方面的研究尚未见到其它文献。在上述文献中,作者都是采取了简单的 $k\sigma$ ($0 \leq k \leq 3$) 阈值算法。硬阈值方法虽然可以很好地保留图像纹理等局部特征,但图像会出现振铃等视觉失真,而简单的软阈值处理相对平滑,但可能会造成边缘模糊等失真现象。本文将波原子运用于变分问题,得到了一种依赖于 Besov 光滑参数和尺度的波原子阈值算法。实验结果表明,该方法对于振荡纹理图像(如指纹,自然纹理, Lena 图像)都具有较好的去噪效果。

2 波原子^[11]

假设 h 是一个实值的、无穷光滑的冲击函数,支撑区间为 $[-7\pi/6, 5\pi/6]$ 。当 $|\omega| \leq \pi/3$ 时,满足等式 $h(\pi/2 - \omega)^2 + h(\pi/2 + \omega)^2 = 1$ 和 $h(-\pi/2 - 2\omega) = h(\pi/2 + \omega)$ 。定义 $\nu = \tilde{h}$ 是函数 h 的逆 Fourier 变换,并且假定

$$\psi_m^0(x) = 2 \operatorname{Re}\{e^{i\pi(m+1/2)x} \nu((-1)^m(x-1/2))\} \quad (1)$$

则有

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_m^0}(\omega) &= e^{-i\omega/2} \{e^{i\alpha_m} h(\varepsilon_m(\omega - \pi(m+1/2))) \\ &\quad + e^{-i\alpha_m} h(\varepsilon_{m+1}(\omega + \pi(m+1/2)))\} \quad (2) \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_m = (-1)^m$, $\alpha_m = (\pi/2)(m+1/2)$, 并且满足

$\sum_m \left| \widehat{\psi_m^0}(\omega) \right|^2 = 1$ 。其平移 $\{\psi_m(x-n)\}$, $n \in Z$, $m = 0, 1, 2, \dots$ 就构成了 $L_2(R)$ 空间中的一组规范正交基,从而构成了频域坐标平面的一致覆盖。

引入尺度指标 j , 并重新将基函数写为 $\psi_{m,n}^j(x) = \psi_m^j(x - 2^{-j}n) = 2^{j/2} \psi_m^0(2^j x - n)$, 则所得的波包就构成了 $L_2(R)$ 空间中的规范正交基。需要强调的是,虽然文献[14]仍然将基函数 $\{\psi_{m,n}^j(x)\}$ 称作波包,但它与标准的小波包有着本质的差异,其在空域和频域具有一致有界局部化性质,这一点对于波原子的构造及其性质起着至关重要的作用。

二维波包可以通过张量积的形式来实现,即

$$\varphi_\mu^+(x_1, x_2) = \psi_{m_1}^k(x_1 - 2^{-j}n_1) \psi_{m_2}^k(x_2 - 2^{-j}n_2) \quad (3)$$

$$\varphi_\mu^-(x_1, x_2) = H\psi_{m_1}^k(x_1 - 2^{-j}n_1) H\psi_{m_2}^k(x_2 - 2^{-j}n_2) \quad (4)$$

其中 H 是 Hilbert 变换, $\mu = (j, m, n) = (j, m_1, m_2, n_1, n_2)$, 对应于相位空间的一个点 (x_μ, ω_μ) , $x_\mu = 2^{-j}n$ 和 $\omega_\mu = \pi 2^j m$, 并且满足 $C_1 2^j \leq \max_{i=1,2} |m_i| \leq C_2 2^j$, 这里 C_1 和 C_2 是两个正常数。由于 $\varphi_\mu^+(x_1, x_2)$ 和 $\varphi_\mu^-(x_1, x_2)$ 都是规范正交基(事实上,它们就是一对波原子规范正交基(WAOB)), 那么其组合 $\varphi_\mu^{(1)} = (\varphi_\mu^+ + \varphi_\mu^-)/2$ 和 $\varphi_\mu^{(2)} = (\varphi_\mu^+ - \varphi_\mu^-)/2$ 就构成了冗余为 2 的波原子紧框架(WATF)。

3 波原子变分阈值算法

对于带噪图像来说,其模型通常表示为

$$f_0 = g + n \quad (5)$$

其中 g 是原始干净图像; n 是图像中加入的噪声; f_0 为带噪的观测图像。

利用先验知识重构图像 f 是数学上的不适定问题,通常采用正则化技术。在图像恢复中,一类经典的基于偏微分方程(PDE)的正则化方法是由 Rudin, Osher 和 Fatemi^[15]提出的总变分极小化模型,即 ROF 模型。由于 ROF 模型把图像看成是有界变差空间(即 BV 空间)中分片连续的函数,所以该模型在去噪的同时,能很好地保持图像的边界。然而上述方法有以下不足:(a)求解 PDE 需要大的计算复杂度;(b)对于纹理图像,仍然不太适合。

Chambolle 和 Lucier^[16]为迭代的平移不变小波阈值提供了一个新的数学框架:当使用正交小波时,平移不变小波阈值等价于空间 $L_2(\Omega)$ 中沿着 $B_1^1(L_1(\Omega))$ 半范的梯度下降的一个连续压缩半群,从而可以将迭代的平移不变小波阈值看作一个非线性图像光滑尺度空间。此方法的本质是将图像放在 Besov 空间来刻画其正则性,利用小波系数和 Besov 半范的等价性,得到了简单的阈值算法。

对于波原子紧框架而言,它本质上是由两组波原子规范正交基得到的,是一种特殊的小波包。另一方面,波原子对振荡纹理而言,具有很好地稀疏表示。结合以上两点,本文给出以下基于波原子的变分模型

$$\min_{f^{(i)}} \left\{ \|f^{(i)} - f_0^{(i)}\|_{L_2(\Omega)} + 2\lambda |f^{(i)}|_{B_q^\alpha(L_p(\Omega))} \right\} \quad (6)$$

其中 $i = 1, 2$, 表示将噪声图像 f_0 对应于正交波包 $\varphi_\mu^{(1)}$ 和 $\varphi_\mu^{(2)}$ 分解成两部分 $f_0^{(1)}$ 和 $f_0^{(2)}$, 分别处理得到 $f^{(1)}$ 和 $f^{(2)}$ 。 $|f^{(i)}|_{B_q^\alpha(L_p(\Omega))}$ 表示 Besov 空间 $B_q^\alpha(L_p(\Omega))$ ($0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty$) 的半范^[17]。通常对于 Besov 空间而言,函数的 Besov 半范与其小波系数序列具有一定的等价性,对于 $p = q$ 有 $|f|_{B_p^\alpha(L_p(\Omega))} \approx \left(\sum_\mu 2^{|\mu|(\alpha-1)} |f_\mu|^p \right)^{1/p}$ 。

若近似地取 $|f|_{B_q^\alpha(L_p(\Omega))} \approx \sum_\mu 2^{|\mu|(\alpha-1)} |f_\mu|$, $|\mu|$ 表示波原子尺度, $f_\mu^{(i)}$ ($i = 1, 2$) 是 $f^{(1)}$ 和 $f^{(2)}$ 所对应的正交波原子系数。于是,式(6)又可近似表示为

$$\min_{f^{(i)}} \left\{ \|f_\mu^{(i)} - f_{0\mu}^{(i)}\|_{l_2} + 2\lambda \sum_\mu 2^{|\mu|(\alpha-1)} |f_\mu^{(i)}| \right\} \quad (7)$$

求解式(7)可得两组正交的波原子系数

$$\{f_{0\mu}^{(i)} : |\mu| = 0\} \cup \{S_{2^{|\mu|(\alpha-1)}\lambda}(f_{0\mu}^{(i)}) : |\mu| > 0\}, i = 1, 2 \quad (8)$$

其中 $S_\lambda(x)$ 为软阈值算子。将式(8)中的两组系数组合得到一组波原子框架系数,记为 $f_{0\mu}$ 。按照波原子框架重构算法可得图像 f , 这就构成了依赖于尺度的波原子软阈值算法。

4 数值实验

为了验证上述算法的有效性,本文分别对三幅

不同类型的图像(见图 1)进行了仿真实验。对于原始图像 g 和去噪图像 f , 大小为 $M \times N$, 选择标准的信噪比(SNR)来评价实验结果,其中 SNR(dB)定义为

$$\text{SNR} = 10 \lg \left[\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f(i, j))^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (f(i, j) - g(i, j))^2} \right] \quad (9)$$

表 1 给出的是波原子变换对应的硬阈值、软阈值,以及依赖于尺度的软阈值(光滑参数分别取 $\alpha = 1.2$ 和 $\alpha = 1.5$),对带有不同强度高斯白噪声图像处理后的 SNR 的对比结果,其中取 $\lambda = k\sigma$ ($0 \leq k \leq 3$)来控制参数。图 2 给出了上述 3 种方法对指纹图像在 $\sigma = 20$ 的去噪效果图。

由实验结果可看出,本文提出的依赖于尺度的阈值算法对含噪纹理图像处理后的 SNR 要比单纯的硬阈值或软阈值要高。具体地说,对于指纹图像和自然图像,当 $\alpha = 1.5$ 时,要高大约 0.7 dB 以上,对于 Lena 图像也要高大约 0.2 dB 以上。同时利用依赖于尺度的方法得到的去噪图像看上去比直接的硬阈值和软阈值方法处理后的结果更加清晰、自然,从而改善了图像的视觉效果。

此外,对于新的依赖于尺度的波原子阈值模型,图 3(a)针对指纹图像和自然纹理图像给出了光滑参数对信噪比的影响,其中 $\sigma = 20$,光滑参数 α 介于 0.5-1.5 之间,阈值参数 k 介于 0.1-3.0 之间,步长均为 0.1。由图可以看出,随着光滑参数 α 的增加,信噪比也在逐渐变大。

最后,图 3(b)对指纹图像分别给出波原子硬阈值、软阈值和依赖于光滑参数和尺度的软阈值算法

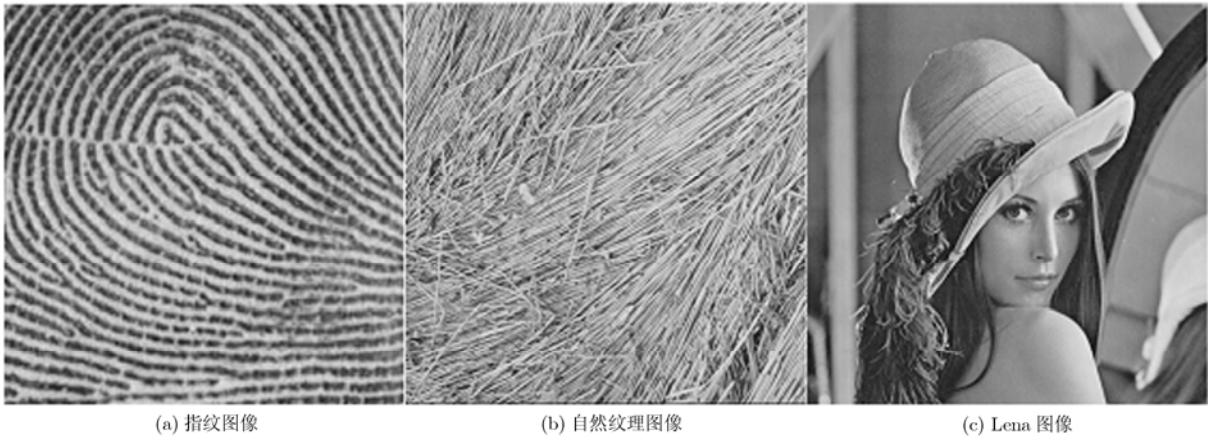


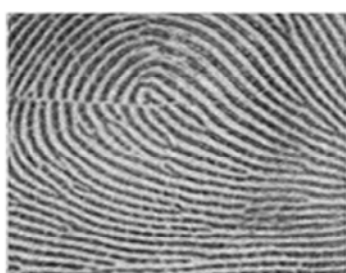
图1 三幅测试图像

表1 不同阈值方法信噪比(dB)比较

图像	Fingerprint			Nature texture			Lena			
	σ	10	20	30	10	20	30	10	20	30
噪声		12.96	6.93	3.41	11.79	5.77	2.25	13.60	7.58	4.06
硬阈值		15.31	11.19	9.05	12.98	8.80	6.63	19.08	15.37	13.43
软阈值		15.70	11.49	9.31	13.60	9.25	6.98	18.90	15.09	13.02
新方法 $\alpha = 1.2$		15.85	11.73	9.65	13.62	9.34	7.11	19.11	15.38	13.44
新方法 $\alpha = 1.5$		16.13	12.07	10.00	13.70	9.44	7.29	19.28	15.77	13.70



(a) 噪声图像



(c) 波原子软阈值



(b) 波原子硬阈值

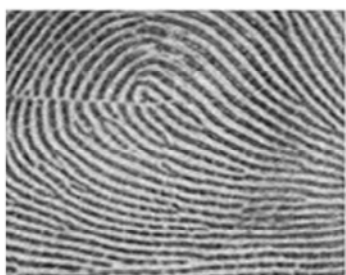
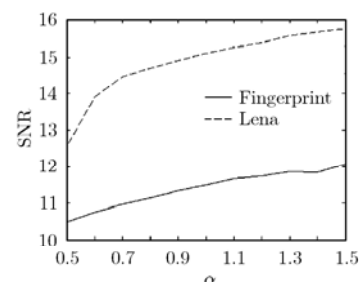
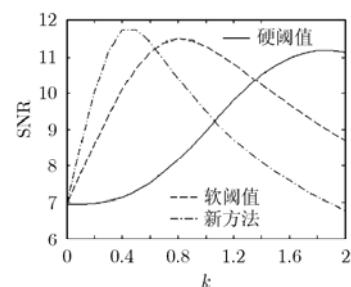
(d) 新方法 ($\alpha=1.5$)

图2 带噪的指纹图像和3种方法去噪图像



(a) 信噪比随光滑参数变化曲线图



(b) 信噪比随阈值参数k的变化曲线图

图3 信噪比随光滑参数和阈值参数k的变化曲线

所对应的信噪比和参数 k 的关系, 其中取 $\sigma = 20$, 光滑参数 $\alpha = 1.2$, 阈值参数 k 介于 0-2.0 之间, 步长均为 0.1。由图可以看出, 按照上述 k 的选取办法, 最优的信噪比分别对应着唯一的 k 。具体地说, 当取 $k = 1.8; 0.8; 0.5$ 时, 硬阈值、软阈值和依赖于光滑参数和尺度的软阈值算法得到的最佳信噪比分别为 11.19 dB, 11.49 dB 和 11.73 dB。由实验结果可知, 阈值 $\lambda < 2\sigma$, 这也进一步证实了 Demanet 和 Ying^[11] 的观点, 即指纹应该属于振荡纹理图像, 波原子对其具有稀疏的表示。

5 结束语

本文给出一个新的依赖于 Besov 光滑参数和尺度的波原子软阈值纹理图像去噪模型。与简单的硬阈值和软阈值相比, 新模型考虑了波原子的构造, 以及对振荡纹理图像的稀疏表示。数值实验表明, 新模型对指纹图像, 以及自然纹理图像, 含有纹理信息的 Lena 图像比简单的硬阈值和软阈值具有更

好的去噪性能, 而且随着 Besov 光滑参数的增加信噪比有明显提高。用波原子来度量纹理图像是恰当的, 并具有较高的 Besov 光滑参数。

参考文献

- [1] Donoho D L and Flesia A G. Can recent innovations in harmonic analysis 'explain' key findings in natural image statistics [J]. *Network: Computation in Neural Systems*, 2001, 12(3): 371-393.
- [2] 焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和展望[J]. *电子学报*, 2003, 31(12A): 1975-1981.
Jiao Li-cheng and Tan Shan. Development and prospect of image multiscale geometric analysis[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2003, 31(12A): 1975-1981.
- [3] Candes E J. Ridgelets: theory and applications[D]. [Ph.D. dissertation], Stanford University, 1998.
- [4] Candes E J. Monoscale ridgelets for the representation of images with edges[R]. [Technical Report], Stanford University, 1999.

- [5] Donoho D L. Orthonormal ridgelet and linear singularities[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2000, 31(5): 1062-1099.
- [6] Candes E J and Donoho D L. Curvelets: a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges[C]. *Curves and Surfaces Fitting*, Saint-Malo 1999. Nashville, TN, 2000: 105-120.
- [7] Candes E J and Donoho D L. New tight frames of crvelets and optimal representations of objects with C^2 singularities[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(2): 219-266.
- [8] Pennec E L and Mallat S. Sparse geometric image representation with bandelets[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14(4): 423-438.
- [9] Guo K and Labate D. Optimally sparse multidimensional representation using Shearlets[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2007, 39(1): 298-318.
- [10] 汪凯斌, 俞卞章, 赵健等. 基于 Gabor 小波的无边缘活动围道纹理分割方法[J]. *电子与信息学报*, 2007, 29(12): 2819-2821.
Wang Kai-bin, Yu Bian-zhang, and Zhao Jian, et al. Texture image segmentation based on Gabor wavelet using active contours without edges[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(12): 2819-2821.
- [11] Demanet L and Ying L X. Wave atoms and aparsity of oscillatory patterns[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2007, 23(3): 368-387.
- [12] Ma Jian-wei. Characterization of textural surfaces using wave atoms[J]. *Applied Physics Letter*, 2007, 90(5): 1-3.
- [13] Plonka G and Ma Jian-wei. Nonlinear regularized reaction-diffusion filters for denoising of images with textures[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(8): 1283-1294.
- [14] Villemoes L. Wavelet packets with uniform time-frequency location[J]. *Comptes-Rendus Mathematique*, 2002, 335(10): 793-796.
- [15] Rudin L I, Osher S J, and Fatemi E. Nonlinear Total variation based noise removal algorithms [J]. *Physica D*, 1992, 60(1-4): 259-268.
- [16] Chambolle A and Lucier B J. Interpreting translation-invariant wavelet shrinkage as a new image smoothing scale space[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(7): 993-1000.
- [17] DeVore R A. Nonlinear approximation[J]. *Acta Numerica*, 1998, 7(1): 51-150.
- 刘国军: 男, 1978 年生, 讲师, 博士生, 研究方向为偏微分方程、多尺度几何分析及其在图像处理中的应用.
- 冯象初: 男, 1962 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代数值分析方法、小波理论及其应用和图像处理的偏微分方程方法.
- 张选德: 男, 1979 年生, 讲师, 博士生, 研究方向为稀疏感知理论及其在图像处理中的应用.