

## 基于高斯比例混合模型的图像非下采样 Contourlet 域去噪

周汉飞<sup>①③</sup> 王孝通<sup>①③</sup> 徐晓刚<sup>②③</sup>

<sup>①</sup>(海军大连舰艇学院航海系 大连 116018)

<sup>②</sup>(海军大连舰艇学院装备系统与自动化系 大连 116018)

<sup>③</sup>(海军大连舰艇学院光电技术研究所 大连 116018)

**摘要:** 为改善图像的去噪效果, 该文提出了一种基于高斯比例混合模型的图像非下采样 Contourlet 域去噪算法。该算法首先建立非下采样 Contourlet 系数邻域的高斯比例混合模型, 然后在模型基础上应用贝叶斯最小二乘法对系数进行估计, 最后反变换得到恢复图像。算法结合了非下采样 Contourlet 变换对图像边缘的高效表示能力、非下采样变换的移不变性质以及 GSM 模型对非下采样 Contourlet 系数邻域相关性的概括能力。实验结果表明, 该算法在视觉效果和峰值信噪比的改善上都取得了非常好的效果。

**关键词:** 图像去噪; 非下采样 Contourlet 变换; 高斯比例混合

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)08-1796-05

## Image Denoising Using Gaussian Scale Mixture Model in the Nonsampled Contourlet Domain

Zhou Han-fei<sup>①③</sup> Wang Xiao-tong<sup>①③</sup> Xu Xiao-gang<sup>②③</sup>

<sup>①</sup>(Department of Navigation, Dalian Naval Academy, Dalian 116018, China)

<sup>②</sup>(Department of Automatization, Dalian Naval Academy, Dalian 116018, China)

<sup>③</sup>(Institute of Photoelectric Technology, Dalian Naval Academy, Dalian 116018, China)

**Abstract:** A new method which using Gaussian scale mixtures model in the nonsampled Contourlet domain is proposed for image denoising. First, a Gaussian scale mixture model is introduced in order to capturing the correlation of nonsampled Contourlet locally coefficients. Then the coefficients are estimated by Bayes least squares estimator based on the model. Finally, the inverse nonsampled Contourlet transform is applied to the modified coefficients. This arithmetic combines the character of nonsampled Contourlet for image edge representation, shift-invariance and the effective of Gaussian scale mixture model for capturing correlation of locally coefficients. The numerical experimental results show the validity of the proposed method.

**Key words:** Image denoising; Nonsampled Contourlet transform; Gaussian scale mixture

### 1 引言

图像在获取或者传输过程中, 不可避免地要引入噪声。为了改善图像的视觉效果, 或者如边缘检测和识别等任务的需要, 必须对图像进行去噪。

过去 20 年来, 利用小波变换已经成为一种标准的图像去噪算法: 先对图像进行小波分解, 根据需要处理分解后的系数, 然后重构得到处理后的图像。经典的算法有 SUREShrink<sup>[1]</sup>、BayesShrink<sup>[2]</sup>、BLS\_GSM<sup>[3,4]</sup>, 以及在小波域应用维纳滤波的去噪算法<sup>[5]</sup>等。

小波变换具有各向同性(isotropy)特点, 它表示

自然图像的各向异性(anisotropy)特征(比如边缘等)效率不高, 这就使基于小波变换的图像去噪普遍存在边缘模糊的现象。目前, 具有各向异性特征的数据表示方法有 Ridgelet 变换<sup>[6,7]</sup>, Curvelet 变换<sup>[8]</sup>, Contourlet 变换<sup>[9,10]</sup>等, 它们对图像边缘信息的高效表示能力有利于改善图像去噪效果。文献[11]结合小波变换和 Curvelet 变换对图像不同几何结构的表示优势, 采用迭代的方法对图像实行去噪, 取得了较好的去噪效果, 但是实现起来非常复杂; 文献[12]建立了 Curvelet 域的隐马尔科夫树(HMT)模型并应用于 SAR 图像去噪, 效果较好, 但是训练复杂度高。Cunha 等在 Contourlet 变换的基础上, 提出了非下采样 Contourlet 变换(Nonsampled Contourlet transform, NSCT)<sup>[13]</sup>, 这种移不变的多尺度多方向的图像表示方法, 适用于图像去噪。

2008-05-14 收到, 2009-03-26 改回

辽宁省自然科学基金(20062191)和浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室开放基金资助课题

本文先建立非下采样 Contourlet 系数的邻域高斯比例混合模型,然后在模型基础上应用贝叶斯最小二乘方法对系数进行估计,最后反变换得到恢复图像。该算法结合了非下采样 Contourlet 变换对图像边缘的高效表示能力、非下采样变换的移不变性质以及 GSM 模型对非下采样 Contourlet 系数邻域相关性的概括能力。实验结果表明,本文算法在视觉效果和峰值信噪比的改善上都取得了非常好的效果。

## 2 非下采样 Contourlet 变换和高斯比例混合分布

### 2.1 非下采样 Contourlet 变换

Contourlet 变换是一种多尺度的图像表示方法,与小波变换相比,主要具有以下两个方面的特点:

(1)方向性 Contourlet 变换在各个尺度的方向选择上具有更大的灵活性;

(2)各向异性 Contourlet 基的支撑区具有长条形的结构,具有各向异性的尺度关系。

Contourlet 变换适用于各向异性的边缘曲线分析,但是 Contourlet 变换是移变的,用于图像去噪会产生伪吉布斯(pseudo-Gibbs)现象。非下采样 Contourlet 变换是在 Contourlet 变换的基础上发展起来的,具有移不变(shift-invariant)的特点,更适用于图像去噪。

### 2.2 高斯比例混合分布

服从高斯比例混合分布的随机向量  $\xi$  能够表示为

$$\xi = \sqrt{z}\mathbf{u} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{u}$  是零均值的高斯随机向量,  $z \geq 0$  是隐含的正标量随机因子,  $\mathbf{u}$  和  $z$  相互独立,“=”表示服从相同的分布。

$\xi$  分布相对  $z$  的条件分布是零均值的正态分布。 $\xi$  的概率密度函数  $p_\xi(\xi)$  由  $\mathbf{u}$  的协方差矩阵  $\mathbf{C}_u$  和  $z$  的概率密度函数  $p_z(z)$  共同决定,存在以下关系:

$$\begin{aligned} p_\xi(\xi) &= \int p(\xi | z)p_z(z)dz \\ &= \int \frac{\exp(-\xi^T(z\mathbf{C}_u)^{-1}\xi/2)}{(2\pi)^{N/2} |z\mathbf{C}_u|^{1/2}} p_z(z)dz \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $N$  是  $\mathbf{u}$  和  $\xi$  的维数。

## 3 基于高斯比例混合模型的图像非下采样 Contourlet 域去噪

先对含噪图像进行非下采样 Contourlet 变换,然后在非下采样 Contourlet 系数邻域高斯比例混合

模型的基础上采用贝叶斯最小二乘(Bayes least squares)法对低通子带之外的系数进行估计,最后反变换重构图像。

### 3.1 图像非下采样 Contourlet 系数邻域的高斯比例混合模型

自然图像非下采样 Contourlet 系数具有“稀疏”和“集聚”分布特性,采用高斯比例混合分布来描述非下采样 Contourlet 系数邻域的统计特性。

设  $x_c^{s,o}(n,m)$  是在尺度  $s$ , 方向  $o$ , 中心位置  $(n,m)$  上的非下采样 Contourlet 分解系数,  $\mathbf{x}^{s,o}(n,m)$  是  $x_c^{s,o}(n,m)$  和它的邻域构成的向量,简写为  $x_c$  和  $\mathbf{x}$ 。根据式(1),  $\mathbf{x}$  表示为

$$\mathbf{x} = \sqrt{z}\mathbf{u} \quad (3)$$

其中  $z$  是邻域系数值的函数,用以描述系数幅度间的相关性。

### 3.2 含噪图像非下采样 Contourlet 系数模型

设图像被方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声所污染。 $\mathbf{y}$  代表含噪图像的非下采样 Contourlet 系数邻域向量,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{w}$  分别是原图像和噪声的系数邻域向量,维数为  $N$ 。有

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (4)$$

将式(3)代入式(4),得到

$$\mathbf{y} = \sqrt{z}\mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (5)$$

其中,  $z, \mathbf{u}, \mathbf{w}$  是相互独立的随机向量(变量)。

$\mathbf{u}, \mathbf{w}$  是零均值的高斯随机向量,自协方差矩阵分别为  $\mathbf{C}_u$  和  $\mathbf{C}_w$ 。 $\mathbf{y}$  相对于  $z$  的条件分布是零均值高斯分布,自协方差矩阵  $\mathbf{C}_{y|z} = z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w$ , 则  $\mathbf{y}$  的条件分布密度函数为

$$p(\mathbf{y} | z) = \frac{\exp(-\mathbf{y}^T(z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w)^{-1}\mathbf{y}/2)}{\sqrt{(2\pi)^N |z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w|}} \quad (6)$$

通过对单位脉冲函数  $\sigma\sqrt{N_x N_y}\delta(n,m)$  进行非下采样 Contourlet 变换,然后利用变换系数可求得  $\mathbf{w}$  的自协方差矩阵  $\mathbf{C}_w$ 。 $\mathbf{C}_y$  可以由  $\mathbf{C}_{y|z}$  对  $z$  取数学期望得到  $\mathbf{C}_y = E\{z\}\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w$ , 不失一般性,设  $E\{z\} = 1$ , 得到

$$\mathbf{C}_u = \mathbf{C}_y - \mathbf{C}_w \quad (7)$$

为了保证自协方差矩阵的非负定性,将  $\mathbf{C}_u$  的负特征值置为零。

### 3.3 $x_c$ 估计

利用  $x_c$  的邻域向量  $\mathbf{y}$  获取估计值  $\hat{x}_c$ 。

以二次型损失函数为估计误差的测度,应用贝叶斯估计理论,可以得到

$$\hat{x}_c = \int_0^\infty p(z | \mathbf{y})E\{x_c | \mathbf{y}, z\}dz \quad (8)$$

$E\{x_c | \mathbf{y}, z\}$  是  $x_c$  在条件  $z$  下的贝叶斯最小二乘估

计,  $p(z | \mathbf{y})$  是  $z$  的后验概率密度函数。

因为  $\mathbf{x} | z$  服从高斯分布,  $\mathbf{C}_{y|z} = z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w$ , 因此有

$$E\{\mathbf{x} | \mathbf{y}, z\} = z\mathbf{C}_u(z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w)^{-1}\mathbf{y} \quad (9)$$

$\mathbf{C}_w$  可以表示为  $\mathbf{C}_w = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$ , 设  $\{\mathbf{Q}, \mathbf{\Lambda}\}$  是矩阵  $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}_u\mathbf{S}^{-T}$  的特征向量和特征矩阵, 满足  $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}_u\mathbf{S}^{-T} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ , 则有

$$\begin{aligned} z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w &= z\mathbf{C}_u + \mathbf{S}\mathbf{S}^T = \mathbf{S}(z\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}_u\mathbf{S}^{-T} + \mathbf{I})\mathbf{S}^T \\ &= \mathbf{S}\mathbf{Q}(z\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^T \end{aligned} \quad (10)$$

代入式(9)并简化, 得到

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x} | \mathbf{y}, z) &= z\mathbf{C}_u\mathbf{S}^{-T}\mathbf{Q}(z\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y} \\ &= z\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}_u\mathbf{S}^{-T}\mathbf{Q}(z\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y} \\ &= z\mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}(z\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y} \\ &= z\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}(z\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}$ 。

将估计限定在系数  $x_c$ , 得到

$$E\{x_c | \mathbf{y}, z\} = \sum_{n=1}^N \frac{zm_{cn}\lambda_n v_n}{z\lambda_n + 1} \quad (12)$$

其中  $m_{ij}$  表示矩阵  $\mathbf{M}$  的第  $(i, j)$  个元素,  $\lambda_n$  是矩阵  $\mathbf{\Lambda}$  的对角元素,  $v_n$  是向量  $\mathbf{v}$  中的元素。  $c$  表示在排列邻域向量时系数  $x_c$  所处的位置。

同理, 简化式(6)可得

$$p(\mathbf{y} | z) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N \frac{v_n^2}{z\lambda_n + 1}\right]}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{C}_w| \prod_{n=1}^N (z\lambda_n + 1)}} \quad (13)$$

采用贝叶斯准则,  $z$  的后验概率密度函数  $p(z | \mathbf{y})$  可以写成:

$$p(z | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | z)p_z(z)}{\int_0^\infty p(\mathbf{y} | \alpha)p_z(\alpha)d\alpha} \quad (14)$$

$z$  的分布采用 Jeffrey 先验密度函数<sup>[14]</sup>

$$p_z(z) \propto (1/z) \quad (15)$$

为了保证作为密度函数的合理性, 当  $z \notin [z_{\min},$

$z_{\max}]$  时, 假定  $p_z(z) = 0$ , 其中  $z_{\min}$  和  $z_{\max}$  分别是一个很小和很大的正数。

### 3.4 算法步骤

总结以上分析, 本文算法步骤如下:

(1)对图像进行非下采样 Contourlet 变换, 得到各个子带的系数;

(2)对低通子带之外的每个系数:

(a)求出噪声系数邻域向量  $\mathbf{w}$  的自相关矩阵  $\mathbf{C}_w$ ;

(b)求出含噪图像系数邻域向量  $\mathbf{y}$  的自相关矩阵  $\mathbf{C}_y$ ;

(c)根据式(7)求出  $\mathbf{C}_u$ ;

(d)根据式(9), 式(10), 式(11)计算  $\mathbf{\Lambda}$  和  $\mathbf{M}$ ;

(e)对系数邻域:

(i)结合式(15), 对式(8)积分范围内的每个  $z$ :

①用式(12)计算  $E\{x_c | \mathbf{y}, z\}$ ; ②用式(13), 式(14)计算  $p(z | \mathbf{y})$ ;

(ii)用式(8)计算  $E\{x_c | \mathbf{y}\}$ ;

(3)利用非下采样 Contourlet 反变换得到去噪图像。

## 4 实验

测试图像采用 Barbara 图像, Lena 图像, FingerPrint 图像, Boats 图像, Pepper 图像和 House 图像。参与比较的典型算法包括基于小波变换的 HMT 算法<sup>[15]</sup>, 基于 Contourlet 变换的 Contour HMT<sup>[16]</sup>算法, 基于 GGD 模型的 BayesShrink 算法<sup>[2]</sup>和 BLS\_GSM 算法<sup>[4]</sup>。客观评价准则采用峰值信噪比(PSNR)作为衡量依据, 主观上以经验视觉评判为准。

表 1 表示的是标准差为 20 的含噪图像(PSNR 为 22.12)用不同算法去噪后的 PSNR 比较。除指纹图像外, 本文算法在峰值信噪比的改善上要优于其它的算法。

表 1 不同算法去噪后的 PSNR(dB)

	BayesShrink	ContourHMT	HMT	BLS_GSM	本文算法
Lena	30.36	29.40	30.29	32.66	<b>32.72</b>
Barbara	27.39	27.16	27.46	30.27	<b>30.61</b>
Boats	28.46	27.94	28.85	30.31	<b>30.35</b>
House	29.79	29.31	30.03	32.30	<b>32.54</b>
Fingerprint	27.63	26.74	26.89	<b>28.59</b>	28.40
Pepper	27.69	26.80	28.61	30.27	<b>30.34</b>

图 1 是本文算法对高噪声度图像的去噪效果。可以看出, 本文算法对于噪声度比较高的图像有着非常好的去噪效果。无论是图像的清晰程度还是对边缘的保持上都表明了本文算法的有效性。

图 2 是各种算法的去噪效果比较。加性噪声标准差为 20。观察披肩上纹路的清晰度, 可以发现本文算法在去噪和边缘保护方面的优越性。

图 3 是在同一噪声水平下( $\sigma = 20$ )去噪后的残差图。很显然, HMT 算法去噪后的残差图包含着大

量的信息, 使用 BLS\_GSM 算法去噪后的残差图像仍然存在着视觉可分辨的信息, 而本文算法产生的残差图在视觉上观察不到明显的信息存在。

## 5 结论

本文提出的基于高斯比例混合的图像非下采样 Contourlet 域去噪方法, 无论是主观视觉还是客观信噪比的改善上, 都取得了比较好的效果。通过详细比较本文算法和目前最好的 BLS\_GSM 算法, 可

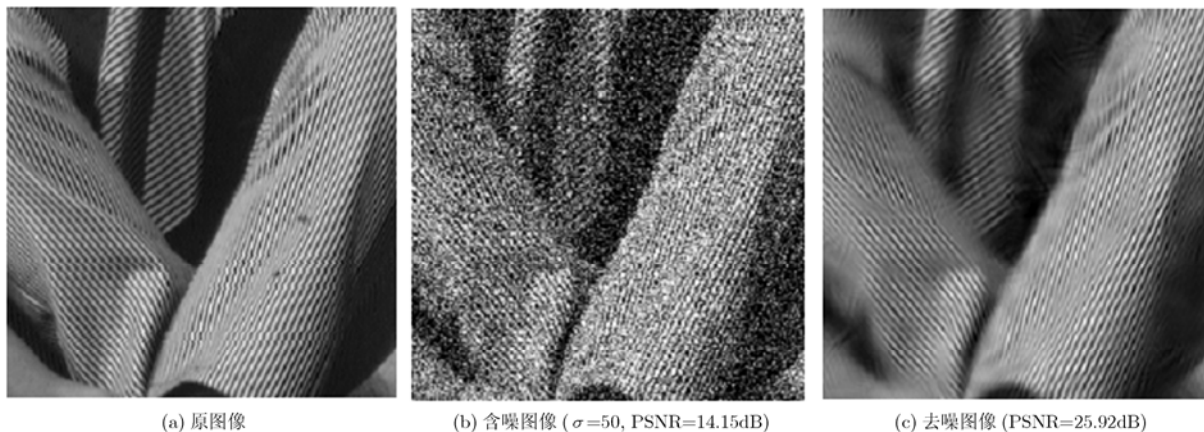


图 1 本文算法对高噪声图像去噪效果



图 2 各种算法去噪效果比较

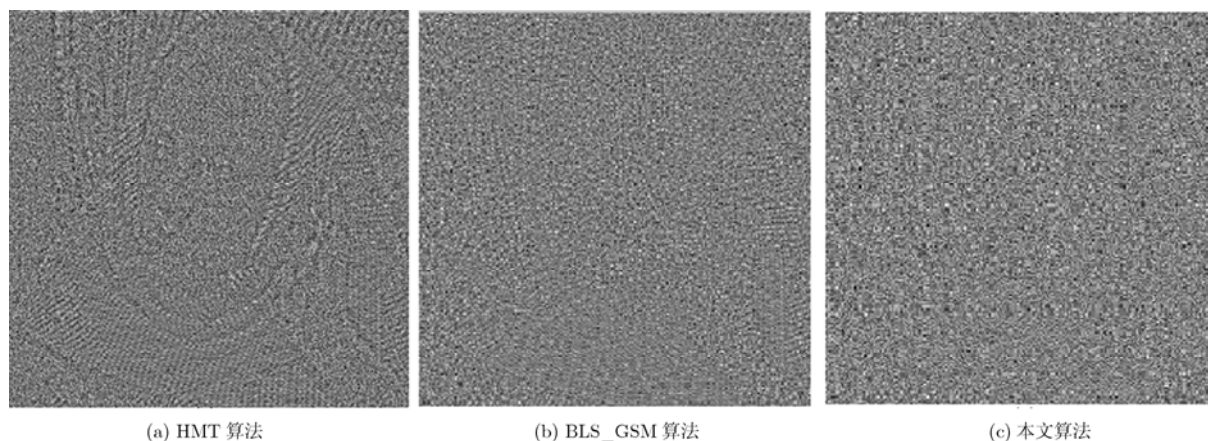


图3 残差图

以看出本文算法在图像去噪领域的优越性。另外，本文算法在去噪过程中对图像边缘进行了非常好的保护，改善了视觉效果，也为进一步的处理提供了方便。

### 参考文献

- [1] Dohono D L and Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425-455.
- [2] Chang S G, Yu Bin, and Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(9): 1532-1546.
- [3] Strela V, Portilla J, and Simoncelli E P. Image denoising using a local Gaussian scale mixture model in the wavelet domain[C]. *Processings of SPIE Conference on Wavelet Applications in Signal and Image Processing*, San Diego, CA, 2000, 4119: 363-371.
- [4] Portilla J, Strela V, and Wainwright M, *et al.* Image denoising using Gaussian Scale Mixtures in the Wavelet Domain[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, 12(11): 1338-1351.
- [5] 田沛, 李庆周, 马平等. 一种基于小波变换的图像去噪新方法[J]. *中国图象图形学报*, 2008, 13(3): 394-399.  
Tian Pei, Li Qing-zhou, and Ma Ping, *et al.* A new method based on wavelet transform for image denoising[J]. *Journal of Images and Graphics*, 2008, 13(3): 394-399.
- [6] Candes E J. Ridgelets: theory and application[D]. [Ph.D.dissertation]. Department of Statistics, Standard University, 1998.
- [7] Candes E J and Donoho D L. New tight frames of Curvelets and optimal representation of objects with smooth singularities[R]. USA: Department of Statistics, Standard University, 2002.
- [8] Starck J L, Candes E J, and Donoho D L. The Curvelet transform for image denoising[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2002, 11(6): 670-684.
- [9] Do M N. Directional multiresolution image representation[D]. [Ph.D. dissertation]. School Comput. Commun. Sci. Swiss Fed. Inst. Technol., Lausanne, Switzerland, 2001.
- [10] Do M N and Vetterli M. The Contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14(12): 2091-2106.
- [11] Starck J L, Donoho D L, and Candes E J. Very high quality image restoration by combining Wavelets and Curvelets[C]. 46th SPIE Annual Meeting, Conference on Signal and Image Processing, San Diego, USA, July 2001, 4478: 9-19.
- [12] 金海燕, 焦李成, 刘芳. 基于 Curvelet 域隐马尔科夫树模型的 SAR 图像去噪[J]. *计算机学报*, 2007, 30(3): 491-496.  
Jin Hai-yan, Jiao Li-cheng, and Liu Fang. SAR image de-noising based on Curvelet domain hidden Markov tree models[J]. *Chinese Journal of Computers*, 2007, 30(3): 491-496.
- [13] Cunha A L, Zhou Jian-ping, and Do M N. The nonsampled Contourlet transform: theory, design and application[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(10): 3089-3101.
- [14] Box G E P and Tiao C. Bayesian Inference in Statistical Analysis[M]. Reading, MA: Addison Wesley, 1992: 159-163.
- [15] Romberg J, Choi H, and Baraniuk P G. Bayesian wavelet domain image modeling using hidden Markov models[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, 10(7): 1056-1068.
- [16] Duncan D Y P and Do M N. Directional multiscale modeling of images using the Contourlet transform[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(6): 1610-1620.

周汉飞: 男, 1981年生, 硕士生, 研究方向为图像多尺度几何分析与建模。  
王孝通: 男, 1962年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为图像处理、电子海图等。  
徐晓刚: 男, 1967年生, 教授, 硕士生导师, 研究方向为图像处理、虚拟仿真等。