

DFT 相位估计算法及噪声敏感频率问题分析

李 炯 王岩飞

(中国科学院电子学研究所 北京 100190)

摘 要: 该文利用参数估计方差最小为优化准则, 计算出多频正弦信号分段 WDFT(Windowed-DFT)相位加权平均相位估计算法的最优加权系数, 并给出算法相位估计的方差公式。另外, 该文对 DFT “噪声敏感” 频率区域问题进行了详细的理论分析。计算机仿真证明了算法的有效性和理论分析的正确性。

关键词: 信号处理; 分段 DFT; 方差最小; 相位估计; 虚假谱峰

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)09-2099-05

DFT Phase Estimation Algorithm and Noise Sensitive Frequency Region

Li Jiong Wang Yan-fei

(Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: Using the principle of minimum variance, this paper computes the optimal weight coefficients for the phase estimation algorithm of the multi-frequencies signal, which is based on the phase weighted average of the partitions windowed-DFT. The variance formula of the estimator is derived. In addition, the issue of the DFT “noise sensitive frequency region” is precisely analyzed. Simulation results show the effectiveness of the algorithm and the rightness of the analysis.

Key words: Signal processing; Partitions DFT; Minimum variance; Phase estimation; False peak of the spectrum

1 引言

正弦波信号的相位估计是雷达、声纳等领域信号处理的一项关键技术。通常高精度相位测量, 采用基于相位跟踪原理的闭环的、硬件的方法^[1,2]。近年来随着 DSP 技术迅速发展, 基于 DFT 的参数估计算法由于精度高、实时性强(可采用 FFT 快速算法)、硬件电路简单等优点得到广泛应用。文献[3-5]采用频域插值的方法, 能有效弥补 DFT 栅栏效应的缺陷, 在 DFT 粗测的基础上获得了较高的参数估计精度。文献[6,7]采用分段 DFT、相位加权平均的方法来提高相位估计的精度, 仿真说明分段 DFT 相位平均法的估计方差小于频域插值方法。文献[6]将输入序列分为两段, 相位估计的方差没有达到最小。文献[7]利用线性回归对分段平均的加权系数进行了优化, 相位估计的方差达到最小。但相位回归算法^[7]不能直接估计输入信号的相位, 而是通过估计输入信号的精确频率间接进行相位估计, 并且最优加权系数的计算隐含在算法公式中, 算法比较复杂。经研究, 本文认为分段 WDFT 相位加权平均相位估计算法以“相位估计方差最小”为评价准则的最优加权系数是可以预先计算出来的。本文给出了分段

WDFT 相位加权平均算法的最优加权系数, 大大简化了算法的复杂性和计算量。仿真实验证明了算法的有效性。另外, 针对 DFT 幅频响应受噪声干扰产生虚假谱峰的问题^[7], 本文发现 DFT 频谱存在一些“噪声敏感”频率区域, 即在特定的频率区域, DFT 幅频响应容易产生虚假谱峰, 这会导致 DFT 粗测频谱峰值频率的错误, 从而给相位估计算法带来很大的误差。本文对这一问题进行了理论分析。

2 多频正弦信号相位估计方差最小的分段 DFT 相位加权平均算法

根据概率理论可知, 分段平均是改善 DFT 参数估计方差特性的一个有效方法^[8]。文献[6]将输入序列平均分为两段, 相位平均的权系数是惟一的, 然而当分段数大于 2 时, 加权平均的权系数并不惟一, 本文采用相位估计方差最小为准则来求解最优加权系数。

设输入多频正弦信号序列 $s(n)$ 可以表示为

$$s(n) = x(n) + e(n) \quad (1)$$

其中, $x(n) = A_m \cos(\omega_m n + \phi_m)$, $m = 1, \dots, M$, M 是多频正弦信号中正弦频率分量的个数; $e(n)$ 为零均值加性高斯白噪声(AWGN), 方差为 σ^2 。这里, 用 $\gamma = A_m^2 / (2\sigma^2)$ 来衡量多频率正弦信号的信噪比。

将 $s(n)$ 均分为长度为 N , 连续不重叠的 L 段子序列 $s^{(i)}(n)$ 。

$$s^{(i)}(n) = s(n + N \cdot i), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad i = 0, \dots, L-1 \quad (2)$$

时域加窗是抑制 DFT 频谱泄漏、减小多频信号各频率分量相互干扰的经典方法^[9,10]。本文采用长度为 N 的 Hanning 窗函数 $w(n)$ 对 L 段子序列 $s^{(i)}(n)$ 分别进行加窗处理(Hanning 窗幅、相频表达式比较简洁, 并且在工程中应用较广, 本章算法讨论均采用 Hanning 窗), 则 $s^{(i)}(n)$ 的 WDFFT 系数可表示为

$$S^{(i)}(k) = \text{DFT}[s(n + N \cdot i) \cdot w(n)], \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3)$$

当输入多频信号相邻频率分量的频率间隔大于窗谱主瓣宽度时, 可以忽略各频率分量间的相互干扰, 多频信号参数估计可简化为单频信号参数估计。为便于表述这里省略下标“ m ”, 设频率值为 ω 的正弦频率分量的相位估计为 $\hat{\phi}$, 根据文献^[6,7]的结论可知

$$\hat{\phi} = \arg[S^{(i)}(k_p)] + (2i+1) \cdot \varphi_w(\delta) \quad (4)$$

其中 $\arg[\cdot]$ 表示求复数的相角; $\varphi_w(\cdot)$ 为窗函数 $w(n)$ 的相频特性, Hanning 窗的相频特性为 $\varphi_w(k) = -\pi k$; k_p 为 WDFFT 幅频响应峰值点的仓号(BIN); δ 为频率偏差, $\delta = k_p - \omega N / (2\pi)$, $|\delta| \leq 0.5$ 。消去式(4)中的参数 δ 可得

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} (a_i \cdot \arg[S^{(i)}(k_p)])}{Z_a} \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} (2i+1)a_i = 0 \quad (6)$$

其中 a_i 为加权系数, $Z_a = \sum_{i=0}^{L-1} a_i$, $Z_a \neq 0$ 。对式(5)

进行方差运算得

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} a_i^2}{Z_a^2} \sigma_{\text{WDFFT}}^2 \quad (7)$$

其中 σ_{WDFFT}^2 为 WDFFT 相位估计的方差,

$$\sigma_{\text{WDFFT}}^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} |W(k)|^2}{\gamma N |W(\delta)|^2} \quad (8)$$

其中 $W(k) = \text{DFT}[w(n)]$ 。

a_i 的解不惟一, 本文以相位估计的方差 $\text{var}(\hat{\phi})$ 最小为准则来选择最优权系数 a_i 。令 $F(a_0, \dots, a_{L-1}) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i^2 / Z_a^2$, 求解偏微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(a_0, \dots, a_{L-1})}{\partial a_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F(a_0, \dots, a_{L-1})}{\partial a_{L-1}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

得到 a_i 的解即为使 $\text{var}(\hat{\phi})$ 最小的解。为便于描述, 式(5), 式(7)简写为

$$\hat{\phi} = \sum_{i=0}^{L-1} p_i \cdot \arg[S^{(i)}(k_p)] \quad (10)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = K_{\text{var}} \cdot \sigma_{\text{WDFFT}}^2 \quad (11)$$

其中 p_i 为分段 WDFFT 相位加权平均的权系数, $p_i = a_i / Z_a$; $K_{\text{var}} = \sum_{i=0}^{L-1} p_i^2$ 。

通过 Matlab 编程求出偏微分方程组(9)的解。表1为 L 从3到6的权系数 p_i 和 K_{var} 的值。表1同时也列出文献^[6]的权系数作为对比。

设频率偏差 δ 的符号为 s_δ , $s_\delta = \text{sgn}\{|S^{(0)}(k_p + 1)| - |S^{(0)}(k_p - 1)|\}$, 其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号运算符; $\Delta\phi^{(i)} = \arg[S^{(i)}(k_p)] - \arg[S^{(i-1)}(k_p)]$, $i = 1, \dots, L-1$ 。若 $\text{sgn}(\Delta\phi^{(i)}) \neq s_\alpha$, 则说明 $\arg[S^{(i)}(k_p)]$ 的值发生了相位卷绕。在 $\arg[S^{(i)}(k_p)]$ 的值上加 $2\pi \cdot s_\alpha$, 得到满足 $|\Delta\phi^{(i)}| < 2\pi$ 条件的 $\arg[S^{(i)}(k_p)]$ 值为无卷绕的真实相位值, 代入式(10)即可得到 $\hat{\phi}$ 。

另外, 当 DFT 幅频响应受噪声干扰产生虚假谱峰时, 会导致各段 DFT 的频谱峰值 k_p 值的不同, 可以通过侦测各段 DFT 频谱的峰值频率是否相同来发现这一情况, 从而剔除相位估计的“野值”。

表1 分段 WDFFT 相位加权平均权系数 p_i 和 K_{var} 的值

L	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	K_{var}
2	1.50 ^[6]	-0.50 ^[6]	/	/	/	/	2.500
3	1.0833	0.3333	-0.4167	/	/	/	1.458
4	0.8500	0.4500	0.0500	-0.3500	/	/	1.050
5	0.7000	0.4500	0.2000	-0.0500	-0.3000	/	0.825
6	0.5952	0.4238	0.2524	0.0810	-0.0905	-0.2619	0.681

3 DFT 变换的噪声敏感频率区域

首先, 不考虑噪声的影响的情况下, $|X(k)|$ 为式(1)中正弦信号 $x(n)$ 的 WDFT 幅频响应, 如图 1 所示, “ a' ” 为由于 DFT 的栅栏效应被遮挡的信号真实谱线, 其数字频率坐标为 $\Omega = \omega N / (2\pi)$, 频谱幅度为 $|X_A| = A \cdot N / 4$; “ a ” 是与信号真实谱线 “ a' ” 相对应的 WDFT 变换频谱的峰值点, 其幅度为 $|X(k_p)|$; “ b ” 是 WDFT 变换频谱的第 2 极大值点, 其幅度为 $|X(k_p - 1)|$ 。

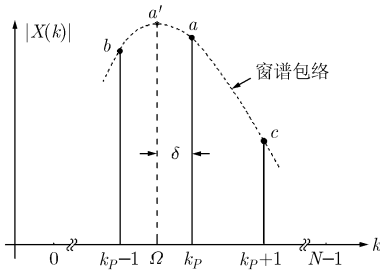


图 1 δ 接近 0.5 时信号的幅频响应

根据 WDFT 变换的性质

$$|X(k)| = 0.5A |W(k - \Omega)| \quad (12)$$

当 $k \ll N, N \gg 1$ 时, $\sin(\pi k / N) \approx \pi k / N$, Hanning 窗的幅频响应可近似为

$$|W(k)| \approx \frac{N \cdot \sin(\pi k)}{2\pi k(1 - k^2)} \quad (13)$$

从图 1 中可以看出, 当 δ 的值接近 0.5 时, $|X(k_p)|$ 与 $|X(k_p - 1)|$ 的值十分接近。为了衡量 WDFT 幅频响应极大值与次极大值幅度接近程度, 令

$$\rho_\delta = [|X(k_p)| - |X(k_p - 1)|] / |X_A| \quad (14)$$

将式(13), 式(12)代入(14)可得

$$\rho_\delta = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi\delta(1 - \delta^2)} - \frac{\sin[\pi(1 - \delta)]}{\pi(1 - \delta)[1 - (1 - \delta)^2]} \quad (15)$$

可见, ρ_δ 是一个只与频率偏差 δ 有关的量。

在噪声环境下, 输入正弦信号的频谱幅度会由于噪声的干扰发生变化。式(1)中输入信号 $s(n)$ 的 WDFT 幅频响应 $|S(k)|$ 的方差为

$$\sigma_{|s|}^2 = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \quad (16)$$

参照正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 的特性, 一次随机实验样本落在 $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ 范围内的概率约为 99.73%^[11]。因此可以认为受噪声干扰 $|S|$ 的变化幅度为 $6\sigma_{|s|}$, 从而得出避免 WDFT 幅频响应出现虚假谱峰的条件为

$$|X(k_p)| - |X(k_p - 1)| > 6\sigma_{|s|} \quad (17)$$

式(17)的 “ $>$ ” 号两边除以 $|X_A|$, 将式(15), 式(16)代入, 经平方、等式变换可以得出: 噪声不会引起 WDFT 幅频响应虚假谱峰的输入信噪比的条件为

$$\gamma > \frac{144 \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)}{(\rho_\delta N)^2} \quad (18)$$

根据式(18)作出 AWGN 引起 WDFT 虚假谱峰的输入信噪比阈值随 $|\delta|$ 变化的曲线, 如图 2 所示。 $|\delta|$ 越接近 0.5, 输入信噪比的阈值就越大, 噪声越容易引起 WDFT 幅频响应出现虚假谱峰; 并且信噪比阈值还是一个与 WDFT 变换点数 N 有关的量, 信噪比阈值随着 N 的增大而减小。

在工程应用中, 例如 DFT 运算的点数取 $N = 512$, 当输入信噪比为 $\gamma = 15$ dB 时, 由图 2 可知, 可能出现虚假谱峰的频率偏差 $|\delta|$ 的范围约为 (0.45, 0.5)。由于 WDFT 频谱峰值点的频率在这个频率范围内对噪声干扰十分敏感, 因此本文称之为 “噪声敏感” 频率区域。图 3 为 $N = 512, \gamma = 15$ dB 时 WDFT “噪声敏感” 频率区域的示意图。

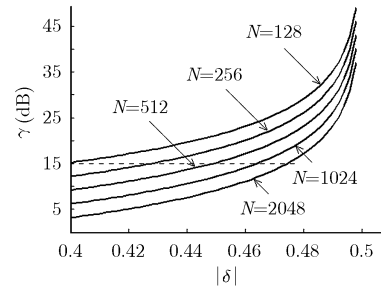


图 2 AWGN 引起 WDFT(Hanning 窗)虚假谱峰的信噪比阈值曲线

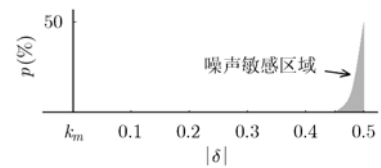


图 3 $\gamma = 15$ dB, $N = 512$ 时, WDFT (Hanning 窗) “噪声敏感” 频率区域示意图

4 计算机仿真

采用多频正弦信号迭加高斯白噪声对本文分段 WDFT 相位加权平均算法进行仿真验证。输入信号 $s(n)$ 由 3 个正弦频率分量构成, 其角频率分别为: $\omega_0 = 1.51, \omega_1 = 1.57 (\delta = 0.25), \omega_2 = 1.64$; $s(n)$ 分为连续不重叠 $L=4$ 段子序列, 每段长度 $N=512$, 窗函数采用 Hanning 窗, 输入信噪比为 $\gamma = 15$ dB。进行 1000 次独立仿真实验, 得到 ω_1 的相位估计的方差为 0.96×10^{-4} rad, 均方根误差为 $\sigma = 0.56^\circ$ 。仿

真结果与式(11)方差公式的计算值 1.0×10^{-4} rad 基本相符。

为了验证本文提出的相位估计算法的有效性,将本文算法与文献[6]的两段相位平均算法、文献[7]的相位回归算法和文献[5]的 WDFT 频域插值法进行实验对比。仿真条件为:输入信号长度为 2048,输入信噪比从 10 dB 变化到 20 dB(间隔 1 dB 抽样),每个信噪比抽样点进行 1000 次仿真。实验结果如图 4 所示,分段 WDFT 相位平均法与 WDFT 插值法对比,相位估计方差有非常明显的改善;图 4 中本文算法的方差曲线与文献[7]算法的曲线重合在一起,说明二者的相位估计精度完全相同;而文献[6]算法的相位估计方差略高于本文算法。此外在算法实现方面,文献[7]算法首先要估计频率偏差 δ ,然后利用 δ 的估计值再进行相位估计,并且其频率偏差估计和相位估计公式都比较复杂(其中都包含了指数 e^{jx} 运算)。本文算法相位估计式(10)中权系数已经给出,只需乘加运算即可,与文献[7]算法比较本算法计算量较小并且便于 DSP 程序实现。本文算法比文献[6]算法减少了 10% 的计算量(仿真实验中文献[6]算法包含 2 个 1024 点 FFT 运算,需要 10240 次复乘和 20480 次复加;本文算法包含 4 个 512 点 FFT 运算,需要 9216 次复乘和 18432 次复加)。

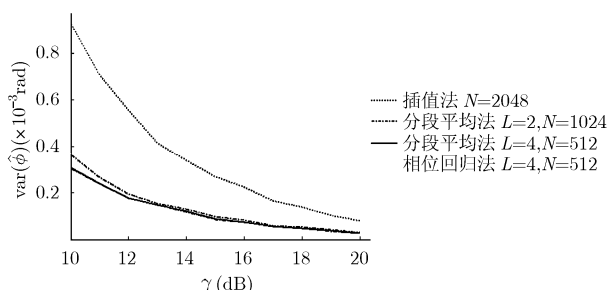


图 4 分段平均法与插值法相位估计方差的比较

将正弦信号与 AWGN 信号迭加,通过统计 WDFT 幅频响应虚假谱峰的出现概率 p 来衡量 DFT 对噪声干扰的敏感程度。实验观察频率偏差 $|\delta|$, 输入信噪比 γ , DFT 变换点数 N 与虚假谱峰出现概率 p 之间的关系。仿真条件为:输入信噪比 $\gamma = 15$ dB, 输入频率 $\omega = 0.25\pi + 2\pi\delta / N$, 其它条件如表 2 所示,每个条件组合分别进行 2000 次独立的实验,并统计噪声引起虚假谱峰的概率 p 。

从表 2 的仿真结果可以看出: $|\delta|$ 的值越接近 0.5, DFT 变换就越容易受噪声的干扰出现虚假谱峰;并且频率偏差不变的情况下,增加 DFT 变换点数 N 可以降低虚假谱峰的出现概率,这与“噪声敏

感”频率的理论分析完全符合。

表 2 输入信噪比为 15dB 时噪声引起虚假谱峰的概率 $p(\%)$

$ \delta $	N				
	128	256	512	1024	2048
0.46	1.6	0.2	0	0	0
0.47	6.8	1.9	0.2	0	0
0.48	15.5	6.9	2.1	0.3	0
0.49	33.3	22.8	13.5	8.3	2.1

5 结束语

本文通过计算得出了分段 WDFT 相位加权平均相位估计算法的最优权系数,从而简化了文献[7]相位回归算法的复杂计算公式,降低了算法的计算量。仿真证明本算法与相位回归算法具有同样的相位估计精度。另外,针对输入频率在某些频率范围取值时基于 DFT 的相位估计算法误差会突然增大的问题,本文通过详细的理论分析得出了 WDFT “噪声敏感”频率区域的范围,并通过仿真证明了分析的正确性。在选择信号频率、系统采样频率和 DFT 运算点数时,应当避免输入信号频率出现在 WDFT 的“噪声敏感”频率范围,以免人为造成系统测量精度的降低。

参考文献

- [1] 周建明, 赵征, 费元春. 雷达测距系统中高精度相位测试方法的研究[J]. 电讯技术-研究与开发, 2003, (1): 26-30.
Zhou Jian-ming, Zhao Zheng, and Fei Yuan-chun. High precision phase-measuring method for the radar distance-measuring system. *Telecommunication Engineering, Research & Development*, 2003, (1): 26-30.
- [2] Maskell D L and Woods G S. Adaptive subsample delay estimation using a modified quadrature phase detector. *IEEE Transactions on Circuits & Systems II: Express Briefs*, 2005, 52(10): 669-674.
- [3] Agrez D. Spectrum analysis of waveform digitizers by IDFT and leakage minimization[J]. *IEEE Transactions on IMTC*, 2005, 17(5):1717-1722.
- [4] Offelli C and Petri D. Interpolation techniques for real-time multi-frequency waveform analysis[J]. *IEEE Transactions on Instrum. Meas.*, 1990, 39(1): 106-112.
- [5] Agrez D. Improving phase estimation with leakage minimization[J]. *IEEE Transactions on Instrum Meas*, 2005, 54(4): 1347-1353.
- [6] 齐国清, 贾欣乐. 基于 DFT 相位的正弦波频率和初相的高精

- 度估计方法[J]. 电子学报, 2001, 29(9): 1164-1168.
- Qi Guo-qing and Jia Xin-le. High-accuracy frequency and phase estimation of single-tone phase of DFT. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(9): 1164-1168.
- [7] Zhu L and Ding H. Phase regression approach for estimating the parameters of a noisy multi-frequency signal[J]. *IEE Proc.-Vis. Image Signal Process*, 2004, 151(5): 411-420.
- [8] Kay S M. Modern Spectral Estimation Theory and Application[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988: 53-58.
- [9] Harris F J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform[J]. *Proc. IEEE*, 1978, 66(1): 51-83.
- [10] Offelli C and Petri D. The influence of windowing on the accuracy of multifrequency signal parameters estimation[J]. *IEEE Transactions on Instrum. Meas.*, 1992, 41(2): 256-261.
- [11] 万星火. 概率论与数理统计[M]. 北京: 科学出版社, 2007, 8: 45-46.
- Wan Xing-huo. Probability Theory and Mathematics Statistics[M]. Beijing: Science Press, 2007, 8: 45-46.
- 李 炯: 男, 1974年生, 博士生, 研究方向为MFCW雷达测距、测角技术.
- 王岩飞: 男, 1963年生, 研究员, 博士生导师, 研究方向为微波成像与数字信号处理技术.