# 图像处理中扩散方程的快速数值解法

王卫卫 冯象初
(西安电子科技大学理学院数学系 西安 710071)

**摘 要**：该文给出图像处理中常用的二阶非线性扩散方程的快速求解算法。首先提出一种线性差分离散格式，既包含了显格式，也包含了隐格式；其次给出了数值稳定性条件，最后讨论了 3 种快速解法：多重网格法(MG)，交替方向隐格式(ADI)，和加性算子分离格式(AOS)。对 3 种方法进行了比较和评价，结果表明：用 3 种方法得到的去噪效果基本相同；ADI 和 AOS 实现较简单；多重网格法得到的恢复图像在光滑区域视觉上优于两种直接法。

**关键词**：图像处理；非线性扩散；多重网格法；交替方向隐格式；加性算子分离法
**中图分类号**：TN911.73 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2009)07-1736-05

# Fast Numerical Solutions of Diffusion Equations in Image Processing

Wang Wei-wei Feng Xiang-chu
(*Dept. of Mathematics*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

**Abstract**: Fast algorithms for solving the 2 order nonlinear diffusion equations in image processing are presented. A linear finite difference scheme incorporating the explicit scheme and the implicit scheme is given. The stability condition of the scheme is also pgivend. Then three fast iteration algorithms including the MultiGrid (MG) method, the Alternative Direction Implicit (ADI) scheme, and the Additive Operators Splitting (AOS) schemes are discussed. Comparison of the three methods show that, the denoising performance is comparative. The MG method is a little better in denoising the smooth regions, while the ADI and the AOS schemes are simpler in realization.
**Key words**: Image processing; Nonlinear diffusion; MultiGrid (MG) method; Alternative Direction Implicit scheme (ADI); Additive Operators Splitting(AOS) scheme

## 1 引言

基于偏微分方程(PDE)的方法在图像处理和计算机视觉中已得到大量成功的应用[1−7]，例如图像去噪、恢复、分割、插值放大、光流计算、分类、纹理分解、 修补等，其中有大量模型是二阶非线性扩散方程(组)。目前大量工作集中在建立 PDE 模型上，对模型的有效数值算法讨论较少。对较大的图像，在有实时性要求的应用中，利用有效的数值方法快速地求解这些模型是一个关键。由于图像自然的采样网格是规则的矩形网格，用有限差分法离散求解比较方便[1,6]；Weickert[6]曾对文献[4]中的模型用 Petrov-Galerkin 型的小波方法、谱方法和有限差分法进行求解，得到的结果是类似的，因此本文主要讨论图像 PDE 的基于差分法的快速解法。

在用差分法求解这些方程时，常用显式差分格式逐层递推求解，但显格式的稳定性一般较差，要得到稳定的显格式，时间步长必须很小。隐格式的稳定性比显格式好，时间步长可以适当取大一些。隐格式在逐层递推过程中，主要计算代价是求解线性方程组。求解线性方程组的常用迭代法，如 Gauss-Seidel 迭代、超松弛迭代等，收敛速度较慢，多重网格法(MG)通过细网格迭代和粗网格校正相结合来加速收敛。对求解线性方程组的直接法而言，二维离散扩散算子对应的矩阵通常是分块三对角的，不便用追赶法求解。交替方向隐格式(ADI)将二维扩散算子分解成两个一维扩散算子的乘积，加性算子分离格式 (AOS)将二维扩散算子的逆分解成两个一维扩散算子逆的和，在每个坐标轴上分别是一维扩散，而一维扩散算子对应矩阵是对角占优的三对角矩阵，可以用追赶法快速求解。本文将分析这 3 种方法在图像 PDE 中的应用。

在图像处理中使用 MG，ADI 和 AOS 方法的主要工作有：针对 Perona-Malik 模型，Acton[8]讨论了显式递推的 MG 方法，Weickert[7]等给出线性隐格式的一个加性算子分离(AOS)算法。Kim[9]对一个反应-扩散方程给出了 ADI 格式。在光流计算中，Bruhn，Weickert[10]也引入 MG 方法。和上述工作不同，本文以 Perona-Malik[4]给出的二阶非线性扩散方程为例，给出一族线性半隐式差分离散格式，讨论其稳

2008-04-22 收到，2009-02-17 改回
国家自然科学基金(60872138)资助课题

定性条件，分析上述 3 种快速求解方法在相应半隐式差分离散格式中的应用，给出 3 种方法的比较和评价。所得结论对图像处理中非线性扩散方程的数值解法具有重要的指导意义。

## 2　模型方程

Perona 和 Malik[4]首先提出了能够保持边界的非线性各向异向扩散方程，简称 PM 模型：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}\left(c\left(|\nabla u|\right)\nabla u\right)\\&u(x,0)=u_0(x)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 $\nabla$ 是梯度算子，div 是散度算子，$u_0$ 是原始图像。扩散系数 $c(\cdot)>0$，是非增函数，Perona 和 Malik 给出了两个扩散系数：$c(s)=e^{-(s/K)^2}$ 和 $c(s)=\dfrac{1}{1+(s/K)^2}$，其中常数 $K$ (为阈值)和噪声的方差有关。PM 模型利用图像梯度刻画边缘，在边缘处，梯度较大，扩散较小；在光滑区域，梯度较小，扩散较大。能够保证在滤除光滑区域噪声的同时在一定程度上保持边界。虽然利用 PM 模型可以得到较好的去噪效果，但由于梯度算子对噪声敏感，因此模型利用梯度模检测边缘是不稳定的；另外，模型在数学上是病态的[5]，其解的存在唯一性得不到解决。Weickert 在文献[6]中对 PM 模型的各种正则化方法进行了详细综述，其中常用的是 Catte 等[5]提出的正则化模型：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}\left(c\left(|\nabla u_\sigma|\right)\nabla u\right)\\&u(x,0)=u_0(x)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中，$u_\sigma=G_\sigma * u$，$G_\sigma=\dfrac{1}{4\pi\sigma}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4\sigma}\right)$ 是 Gauss 函数，$\sigma$ 为滤波尺度，$*$ 表示卷积运算。Catte 采用 Gauss 导数检测图像边缘，降低了梯度模对噪声的敏感性，也证明了方程解的存在唯一性，克服了 PM 模型的病态问题。

本文就此类二阶非线性扩散方程的隐式差分求解展开讨论。

## 3　模型的差分格式及其稳定性

### 3.1 差分格式

PM 模型是非线性扩散方程，在离散求解时对扩散系数作线性处理，即用前一时刻的扩散系数近似当前时刻的扩散系数，得到如下离散化格式

$$(\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n)/\tau+\boldsymbol{A}^n\left(\theta\boldsymbol{u}^{n+1}+(1-\theta)\boldsymbol{u}^n\right)=0\tag{3}$$

显然，$\theta=0$ 对应于 Acton[8]讨论的显格式，$\theta=1$ 对应于 Weickert[7]等给出的线性隐格式，$\theta=1/2$ 则对应于 Crank-Nicolson 格式；$\tau$ 为时间步长；$\boldsymbol{u}^n$ 表示 $t^n=n\tau$ 时刻的解，空间坐标省略；$\boldsymbol{A}^n=\left(a_{rs}(\boldsymbol{u}^n)\right)$ 是扩散矩阵，其中元素是像素点和相邻像素点之间的联系系数，是扩散率函数 $c\left(|\nabla\boldsymbol{u}_\sigma|\right)$ 的离散表示，满足

$$\left.\begin{aligned}&a_{rs}\le 0, && r\ne s\\&a_{rr}=\sum_{r\ne s}|a_{rs}|>0, && \forall r\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

扩散矩阵可以分解成水平和垂直两个方向扩散矩阵的和

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}_1^n+\boldsymbol{A}_2^n\tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1^n,\boldsymbol{A}_2^n$ 分别由水平和垂直方向相邻像素间的联系系数构成，$\boldsymbol{A}_1^n$ 的每行仅有 3 个非 0 元素 $-a_{i,j,W}^n$，$a_{i,j,W}^n+a_{i,j,E}^n-a_{i,j,E}^n$，是像素点$(i, j)$和西、东相邻像素$(i-1, j)$，$(i+1, j)$之间的联系系数；$\boldsymbol{A}_2^n$ 的结构类似，每行仅有 3 个非 0 元素 $-a_{i,j,N}^n, a_{i,j,N}^n+a_{i,j,S}^n, -a_{i,j,S}^n$，是像素点$(i, j)$和北、南相邻像素$(i, j-1)$，$(i, j+1)$之间的联系系数。

### 3.2 稳定性

**定理 1**　当 $4\tau(1-\theta)\le 1$ 时，差分格式(7)对初始条件是稳定的。

**证明**　将差分格式(3)重新写为

$$\left(\boldsymbol{I}+\tau\theta\boldsymbol{A}^n\right)\boldsymbol{u}^{n+1}=\left[\boldsymbol{I}-\tau(1-\theta)\boldsymbol{A}^n\right]\boldsymbol{u}^n\tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位算子。分量形式为

$$\begin{aligned}&\left[1+\tau\theta\left(a_{i,j,W}^n+a_{i,j,E}^n+a_{i,j,N}^n+a_{i,j,S}^n\right)\right]u_{i,j}^{n+1}\\&=\tau\theta\left(a_{i,j,W}^n u_{i-1,j}^{n+1}+a_{i,j,E}^n u_{i+1,j}^{n+1}+a_{i,j,N}^n u_{i,j-1}^{n+1}+a_{i,j,S}^n u_{i,j+1}^{n+1}\right)\\&+\tau(1-\theta)\left(a_{i,j,W}^n u_{i-1,j}^n+a_{i,j,E}^n u_{i+1,j}^n+a_{i,j,N}^n u_{i,j-1}^n\right.\\&\left.+a_{i,j,S}^n u_{i,j+1}^n\right)+\left[1-\tau(1-\theta)\left(a_{i,j,W}^n+a_{i,j,E}^n+a_{i,j,N}^n\right.\right.\\&\left.\left.+a_{i,j,S}^n\right)\right]u_{i,j}^{n+1}\end{aligned}\tag{7}$$

由系数 $a_{i,j,W}^n, a_{i,j,E}^n, a_{i,j,N}^n, a_{i,j,S}^n$ 的定义知，

$$0<\gamma\le a_{i,j,W}^n, a_{i,j,E}^n, a_{i,j,N}^n, a_{i,j,S}^n\le 1$$

因此若 $4\tau(1-\theta)\le 1$，则式(7)中各项系数均非负。设 $u_{i,j}^{n+1}$ 是 $t^{n+1}=(n+1)\tau$ 时刻解的极大值，则有

$$\begin{aligned}&\left[1+\tau\theta\left(a_{i,j,W}^n+a_{i,j,E}^n+a_{i,j,N}^n+a_{i,j,S}^n\right)\right]u_{i,j}^{n+1}\\&\le\tau\theta\left(a_{i,j,W}^n+a_{i,j,E}^n+a_{i,j,N}^n+a_{i,j,S}^n\right)u_{i,j}^{n+1}+\max_{k,l}u_{k,l}^n\end{aligned}$$

从而 $u_{i,j}^{n+1}\le\max_{(k,l)}u_{k,l}^n$，再由 $u_{i,j}^{n+1}$ 的极大性，知 $u_{i,j}^{n+1}\le\max_{(k,l)}u_{k,l}^n, \forall i,j$，依此类推，有 $u_{i,j}^{n+1}\le\max_{(k,l)}u_{k,l}^0$，$\forall(i,j)$；再设 $u_{k,l}^{n+1}$ 是 $t^{n+1}=(n+1)\tau$ 时刻解的极小值，仿上可证 $u_{k,l}^{n+1}\ge\min_{(i,j)}u_{i,j}^0$。综上，有 $\min_{(k,l)}u_{k,l}^0\le u_{i,j}^n\le\max_{(k,l)}u_{k,l}^0,\quad\forall n,i,j$，即极值原理成立。因此差分格式(7)对初值条件是稳定的。　证毕

从稳定性条件可以看出，当 $\theta=1$ 时，隐格式(7)是无条件稳定的。

## 4 求解差分方程式(3)的3种快速数值解法

### 4.1 MG迭代法

当$\theta \neq 0$时，差分方程式(6)是半隐格式，每步需要解一个高维的线性方程组。设图像尺寸为$m\times n$，将图像逐行排列成一个$m\times n$维列向量，则有如下$m\times n$维线性方程组：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{f}^n \tag{8}$$

其中$\boldsymbol{f}^n=\left[\boldsymbol{I}-\tau(1-\theta)\boldsymbol{A}^n\right]\boldsymbol{u}^n$，而系数矩阵$\boldsymbol{B}$为由式(6)左边的算子生成的$mn\times mn$维矩阵。若记$1+\theta\tau(a_{i,j,W}^n+a_{i,j,W}^n+a_{i,j,W}^n+a_{i,j,W}^n)=k_{i,j}$，$-\theta\tau a_{i,j,D}^n=p_{i,j}^D$，$D=W,E,N,S$，则有

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{WE}_1 & \boldsymbol{S}_1 & & & & \\ \boldsymbol{N}_2 & \boldsymbol{WE}_2 & \boldsymbol{S}_2 & & & \\ & \boldsymbol{N}_3 & \boldsymbol{WE}_3 & \boldsymbol{S}_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{N}_{m-1} & \boldsymbol{WE}_{m-1} & \boldsymbol{S}_{m-1} \\ & & & & \boldsymbol{N}_m & \boldsymbol{WE}_m\end{bmatrix}$$

$$\text{其中}\ \boldsymbol{WE}_i=\begin{bmatrix}k_{i,1} & p_{i,1}^E & & & & \\ p_{i,2}^w & k_{i,2} & p_{i,2}^E & & & \\ & p_{i,3}^w & k_{i,3} & p_{i,3}^E & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & p_{i,n-1}^w & k_{i,n-1} & p_{i,n-1}^E \\ & & & & p_{i,n}^w & k_{i,n}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\boldsymbol{N}_i=\begin{bmatrix}p_{i,1}^N & & & \\ & p_{i,2}^N & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_{i,n}^N\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\boldsymbol{S}_i=\begin{bmatrix}p_{i,1}^S & & & \\ & p_{i,2}^S & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_{i,n}^S\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$\boldsymbol{u}^{n+1}=(u_{11}^{n+1},u_{12}^{n+1},\cdots,u_{1n}^{n+1},u_{21}^{n+1},u_{22}^{n+1},\cdots,u_{2n}^{n+1},\cdots,u_{mn}^{n+1})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}^n=(f_{11}^n,f_{12}^n,\cdots,f_{1n}^n,f_{21}^n,f_{22}^n,\cdots,f_{2n}^n,\cdots,f_{mn}^n)^{\mathrm{T}}$。这里假设边界上扩散系数为零。

对于较大尺寸图像，式(8)是一个块三对角方程组，随着时间步长$\tau$增大，系数矩阵的条件数会增加，通常的迭代法往往收敛速度较慢。MG方法[11]在细网格上消除误差的高频分量较快，消除误差的低频分量较慢；由于细网格上的低频分量限制在粗网格上表现为高频，所以在粗网格上可以更快地消除这些误差；不仅如此，粗网格上格点少，计算量小，这些因素促成了MG方法的快速收敛特性。在求解图像去噪的扩散方程时，利用多重网格法可以快速磨光光滑区域内的噪声，并且降低由于消除低频误差带来的失真。本文采用标准的V循环，算法基本步骤参见文献[11]。

### 4.2 ADI直接法

如前所述，式(3)中的二维扩散矩阵可以分解成水平和垂直的方向扩散矩阵，即式(5)，将其代入式(6)，有

$$\left[\boldsymbol{I}+\tau\theta\left(\boldsymbol{A}_1^n+\boldsymbol{A}_2^n\right)\right]\boldsymbol{u}^{n+1}=\left[\boldsymbol{I}-\tau(1-\theta)\left(\boldsymbol{A}_1^n+\boldsymbol{A}_2^n\right)\right]\boldsymbol{u}^n \tag{9}$$

将二维扩散算子$\boldsymbol{I}+\theta\tau\left(\boldsymbol{A}_1^n+\boldsymbol{A}_2^n\right)$凑成两个一维算子的乘法分解得到式(9)的如下近似

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\left[\boldsymbol{I}+\theta\tau\boldsymbol{A}_2^n\right]^{-1}\left[\boldsymbol{I}+\theta\tau\boldsymbol{A}_1^n\right]^{-1}\left[\boldsymbol{I}-(1-\theta)\tau\boldsymbol{A}^n+\theta^2\tau^2\boldsymbol{A}_1^n\boldsymbol{A}_2^n\right]\boldsymbol{u}^n \tag{10}$$

它与式(9)有一个$O(\tau^2)$误差，由式(10)本文给出如下ADI格式

$$\left.\begin{aligned}\left[\boldsymbol{I}+\theta\tau\boldsymbol{A}_1^n\right]\boldsymbol{u}^*&=\left[\boldsymbol{I}-\tau(1-\theta)\boldsymbol{A}_1^n-\tau\boldsymbol{A}_2^n\right]\boldsymbol{u}^n\\ \left[\boldsymbol{I}+\theta\tau\boldsymbol{A}_2^n\right]\boldsymbol{u}^{n+1}&=\boldsymbol{u}^*+\theta\tau\boldsymbol{A}_2^n\boldsymbol{u}^n\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中$\boldsymbol{u}^*$是中间结果。由于$\boldsymbol{A}_l^{n-1}\,(l=1,2)$是一维3节点模型，因此式(11)中每个方程是严格对角占优的三对角方程组，用追赶法可以快速求解。

### 4.3 AOS直接法

Weickert[7]对$m$维PM模型的完全隐格式

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\left(\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left[\boldsymbol{I}+m\tau\boldsymbol{A}_l^n\right]\right)^{-1}\boldsymbol{u}^n \tag{12}$$

进行形式上的加法分离，给出如下AOS格式：

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left[\boldsymbol{I}+m\tau\boldsymbol{A}_l^n\right]^{-1}\boldsymbol{u}^n \tag{13}$$

Weickert证明了AOS格式对任意时间步长$\tau$满足离散尺度空间性质；指出AOS格式是与连续方程相容的一种新的离散格式，其精度与完全隐格式相同，但并非对完全隐格式的近似。

对比ADI格式和AOS格式，可见两种格式的计算复杂度是相同的，都是将二维扩散算子分解成一维形式，从而用追赶法快速求解，且当$\theta=1$时都是绝对稳定的。但AOS格式对各个坐标轴的处理相同，且各个坐标轴上的扩散可以交换次序；而ADI格式对各个坐标轴的处理不同，且由于是乘法分解，各个坐标轴上的扩散一般不能交换次序。

对差分格式(9)，可以得到如下AOS格式

(a) 多重网格扩散结果　　(b) ADI 扩散结果　　(c) AOS 扩散结果

图 1 3 种算法对 lenna 图像的扩散结果

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{n+1} &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\left[\mathrm{I}+2\tau\theta \boldsymbol{A}_l^n\right]^{-1}\left[\boldsymbol{I}-\tau(1-\theta)\boldsymbol{A}^n\right]\boldsymbol{u}^n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\left[\boldsymbol{I}+2\tau\theta \boldsymbol{A}_l^n\right]^{-1}\bar{\boldsymbol{u}}^n \end{aligned} \tag{14}$$

AOS 格式(14)与式(13)相比，相当于对 $u^n$ 先做显式扩散得到 $\bar{\boldsymbol{u}}^n=\left[\boldsymbol{I}-\tau(1-\theta)\boldsymbol{A}^n\right]\boldsymbol{u}^n$，然后再隐式扩散得到 $\boldsymbol{u}^{n+1}$。当 $\theta=1$ 时，退化到 Weickert 的 AOS 格式。

## 5　数值实验与分析

本文通过大量数值实验对上述 3 种算法进行了比较，分析其在图像去噪方面的性能。结果表明，在各种参数一致和总的迭代次数相当的条件下，用 3 种方法得到的去噪效果基本相同。具体来讲，在逐层推进的每一步中，用两种直接法求解差分方程式(3)所需计算量相当。在时间步长相同的条件下，推进相同的步数，对同一幅图像得到的恢复图像质量基本相同。虽然理论上，ADI 格式对各个坐标的处理一般不能交换次序，但从本文的数值结果来看，交换次序对结果影响并不大，因此 ADI 格式与 AOS 格式同样可以使用。和两种直接法相比，多重网格法不断消除粗网格上的高频误差，这有利于去除光滑区域的噪声，因此得到的恢复图像在光滑区域从视觉上看优于两种直接法。从实现角度讲，多重网格法要比 ADI 和 AOS 麻烦一些。

由于大量实验得到的结论基本一致，本文仅给出一组实验结果供参考。针对常用的 512×512×8 测试图像“lenna”，加入均值为 0，标准差为 20 的 Gauss 白噪声，用 PM 模型的离散格式(3)进行扩散，这里取 $\theta$=0.9。用上述 3 种方法进行计算，时间步长 $\tau$ 均取为 1，扩散率函数取为 $c(s)=e^{-(s/K)^2}$，其中 $K$=10。对多重网格方法，仅递推两步，但每步内的 Gauss-Seidel 迭代进行 10 次，结果见图 1(a)，峰值信噪比 PSNR 为 30.6 dB。对 ADI 方法，迭代 10 次，结果见图 1(b)，PSNR 为 30.92 dB。对 AOS 方法，迭代 10 次，结果见图 1(c)，PSNR 为 30.96 dB。

## 6　结论

目前图像处理中常用二阶非线性扩散方程进行去噪等应用，其离散求解一般采用简单的显式差分方程，效率较低。本文以 PM 模型为例，给出了一种线性半隐式差分格式，分析了数值稳定性，讨论了求解相应半隐格式的 3 种高效算法：多重网格法、交替方向半隐格式、加性算子分离法。对其效果进行了分析，结果表明：在各种参数一致和总的迭代次数相当的条件下，用 3 种方法得到的去噪效果基本相同；和两种直接法相比，多重网格法不断消除粗网格上的高频误差，有利于去除光滑区域的噪声，得到的恢复图像在光滑区域从视觉上看优于两种直接法。从实现角度讲，多重网格法要比 ADI 和 AOS 麻烦一些。得到的结论对图像处理中非线性扩散方程的数值解法具有重要的指导意义。

## 参 考 文 献

[1] Aubert G and Kornprobst P. Mathematical Problem in Image Processing-Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. New York: Springer-Verlag, 2002, Chapter 3.

[2] Bai Jian and Feng Xiang-chu. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(10): 2492–2502.

[3] Wang Wei-wei and Feng Xiang-chu. Anisotropic diffusion with nonlinear structure tensor. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 2008, 7(2): 963–977.

[4] Perona P and Malik J. A scale space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on PAMI*, 1990, 12(7): 69–639.

[5] Catte F, *et al.*. Image selective smoothing and edge-detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*,

1992, 29(1): 182–193.

[6] Weickert J. Anisotropic Diffusion in Image Processing. Stuttgart, Teubner-Verlag, 1998, Chapter 3–5.

[7] Weickert J, *et al*.. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(3): 280–291.

[8] Acton S T. Multigrid anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(3): 280–291.

[9] Kim S. PDE-based image restoration: A hybrid model and color image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(5): 1163–1170.

[10] Bruhn A, Weickert J, and Schnörr C. Combining the advantages of local and global optic flow methods. Proc. Pattern Recognition, LCNS, 2002, 2449: 454–462.

[11] Iserles A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. New York: Cambridge University Press, 1996, Chapter 11.

王卫卫： 女，1970 年生，副教授，主要研究图像处理的变分偏微分方程方法.

冯象初： 男，1962 年生，教授，主要研究图像处理的变分偏微分方程方法和几何多尺度方法.