

## 基于对偶树复数小波变换的邻域自适应的图像降噪

周登文 刘克勤

(华北电力大学计算机科学与技术系 北京 102206)

**摘要:** 该文提出一种新的基于对偶树复数小波变换的邻域自适应的图像降噪方法,它是现存的 NeighShrink 降噪方法的改进。该文运用 Stein 的无偏风险估计,在小波域每一个子带为 NeighShrink 方法确定一个最优的阈值和邻域窗口,并将 NeighShrink 方法从正交的小波变换推广到对偶树复数小波变换。实验结果证实,该文方法比当前基于小波的最具竞争力的图像降噪方法取得了更好的降噪效果。

**关键词:** 图像降噪; 对偶树; 复数小波变换; 邻域; 自适应

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)05-1197-04

## Neighborhood Adaptive Image Denoising Using Dual-Tree Complex Wavelet Transform

Zhou Deng-wen Liu Ke-qin

(Department of Computer Science and Technology, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

**Abstract:** In this paper, a new neighborhood adaptive image denoising method is proposed using dual-tree complex wavelet transforms. It is an improvement of the existing denoising method NeighShrink. The optimal thresholds and neighboring window sizes are determined for every subband in the wavelet domain using Stein's unbiased risk estimate, and NeighShrink is also extended from orthogonal wavelet transforms to dual-tree complex wavelet transforms in this paper. Experimental results show that the proposed method performs better than some of the existing methods.

**Key words:** Image denoising; Dual-tree; Complex wavelet transform; Neighborhood; Adaptive method

### 1 引言

近十多年来, Donoho 和 Johnstone<sup>[1]</sup>提出的基于小波变换的取阈值或收缩的降噪方法取得了极大的成功。在他们开创性的工作之后,出现了大量的改进的方法。所有的改进主要表现在两个方面:第一是优化阈值的选择;第二是导出新的收缩函数。本文无意在这里综述这些方法,而是特别引用 Cai 和 Silverman 提出的一维信号的降噪方法 NeighCoeff<sup>[2]</sup>。在对小波系数取阈值的过程中, NeighCoeff 融合了邻域的小波系数。Chen 等将 Cai 和 Silverman 的方法用于二维图像降噪,称之为 NeighShrink<sup>[3]</sup>。

抽样的离散的小波变换(DWT)不具有平移不变的性质,导致基于DWT的降噪方法产生的降噪图像存在一些缺陷。Coifman和Donoho指出:基于DWT的收缩降噪存在着视觉伪像<sup>[4]</sup>,它们是由信号断点处Gibbs振动引起的。他们建议使用循环移动平均的方法来抑制这种缺陷,它等价于平移不变或非抽样的小波变换(UWT)。平移不变的性质也可以通过利用对偶树复数小波变换(CWT)<sup>[5]</sup>来获得。

当前最好的图像降噪算法均利用了小波变换平移不变的性质,它们或使用了UWT,例如文献[6-8],或使用了

CWT,例如文献[9]。本文中提出了一种新的降噪方法:将 NeighShrink 推广到CWT,并利用Stein的无偏风险估计(SURE)<sup>[10]</sup>,在每一个小波子带计算最优的阈值和邻域窗口。较之当前最好的降噪算法,本文方法取得了更好的降噪结果。

### 2 对偶树复数小波变换

为了方便问题的讨论,先简单介绍一下对偶树复数小波变换理论<sup>[5]</sup>。一维 CWT 按照平移和伸缩的复数小波分解信号  $f(t)$ :

$$f(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} u_{j_0, \ell} \phi_{j_0, \ell}(t) + \sum_{j \geq j_0} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{j, \ell} \psi_{j, \ell}(t) \quad (1)$$

其中  $\phi_{j_0, \ell}$  和  $\psi_{j, \ell}$  是复函数:  $\phi_{j_0, \ell} = \phi_{j_0, \ell}^r + \sqrt{-1}\phi_{j_0, \ell}^i$ ,  $\psi_{j, \ell} = \psi_{j, \ell}^r + \sqrt{-1}\psi_{j, \ell}^i$ 。  $\psi_{j, \ell}^r$  和  $\psi_{j, \ell}^i$  本身是实数小波,复数小波变换是两个实数小波变换的组合。一维  $\{\phi_{j_0, \ell}^r, \phi_{j_0, \ell}^i, \psi_{j, \ell}^r, \psi_{j, \ell}^i\}$  形成一个2倍冗余的紧标架。CWT的实部和虚部使用可分的滤波器组结构进行计算。小波滤波器  $H_0^r$  和  $H_1^r$  用于实部,  $H_0^i$  和  $H_1^i$  用于虚部。

对于二维的情形, CWT使用复数尺度函数和6个复数小波函数的平移、伸缩分解一个图像  $x(s)$ ,  $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ :

$$x(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} u_{j_0, k} \phi_{j_0, k}(s) + \sum_{b \in \mathbb{B}} \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} c_{j, k}^b \psi_{j, k}^b(s) \quad (2)$$

6个小波函数分别指向6个方向  $\mathcal{B} = \{+15^\circ, +45^\circ, +75^\circ, -15^\circ, -45^\circ, -75^\circ\}$ ，二维CWT 6个子带分别朝向6个小波函数的方向。基于一维复数函数  $\phi$ ， $\psi$  的可分的二维CWT，我们有  $\psi^{+15^\circ}(s) = \phi(s_1)\psi(s_2)$ ， $\psi^{+45^\circ}(s) = \psi(s_1)\psi(s_2)$ ， $\psi^{+75^\circ}(s) = \psi(s_1)\phi(s_2)$ ， $\psi^{-15^\circ}(s) = \phi(s_1)\psi^*(s_2)$ ， $\psi^{-45^\circ}(s) = \phi(s_1)\psi^*(s_2)$  及  $\psi^{-75^\circ}(s) = \psi(s_1)\phi^*(s_2)$ 。其中  $\phi^*$  和  $\psi^*$  是  $\phi$  和  $\psi$  的共轭。二维CWT展开表示  $x(s)$  是4倍冗余的紧标架。

隐藏在CWT背后的思想是很简单的：使用两个实数DWT，一个DWT给出变换的实部，另一个DWT给出虚部。 $\psi_{j,\ell}^r$  和  $\psi_{j,\ell}^i$  构成一个Hilbert变换对，使得CWT具有几乎平移不变的性质，这是CWT较之于DWT的一个极有价值的增强。对于二维情形，它具有  $\pm 15^\circ$ ， $\pm 45^\circ$  和  $\pm 75^\circ$  六个方向，而DWT只有  $0^\circ$ ， $45^\circ$  和  $90^\circ$  3个方向。二维CWT较之DWT也提供了更多的方向选择性。

### 3 NeighShrink 收缩降噪

图像降噪问题可以描述为给定观察数据  $Y_{ij}$  作为信号  $X_{ij}$  的有噪实现：

$$Y_{ij} = X_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad (3)$$

其中  $\{\varepsilon_{ij}\}$  独立于信号，且是独立恒等分布(iid)的高斯随机变量，即  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ ， $\sigma^2$  是噪声的方差。我们的目标是要基于  $Y_{ij}$  找到  $X_{ij}$  的最优估计，测度最优估计的客观准则通常是较小的均方误差(MSE)或较大的峰值信噪比(PSNR)。MSE 和 PSNR 计算公式如下：

$$\text{MSE} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (X(i, j) - \hat{X}(i, j))^2 \quad (4)$$

$$\text{PSNR} = 10 \lg_{10} \frac{255^2}{\text{MSE}} \text{ (dB)} \quad (5)$$

其中  $\hat{X}$  是  $X$  的估计。

DWT 具有能量集中和系数簇聚的特点。也就是说，一个较小的小波系数的邻域系数也较大的概率很高。利用DWT的这个性质，针对一维信号，Cai 和 Silverman<sup>[2]</sup>提出了邻域系数收缩估计方法 NeighCoeff。假定  $w_{jk}$  是一维有噪信号的小波系数， $S_{jk}^2 = w_{j,k-1}^2 + w_{jk}^2 + w_{j,k+1}^2$ ，小波系数的收缩估计式为

$$\hat{w}_{jk} = (1 - \lambda^2 / S_{jk}^2)_+ w_{jk} \quad (6)$$

其中  $\lambda$  是 universal 阈值。计算  $S_{jk}^2$  时，如果  $w_{jk}$  超出了小波系数范围，简单地忽略该项系数的计算。

Chen 等<sup>[3]</sup>将 NeighCoeff 的估计方法用于图像降噪，并称之为 NeighShrink。对每一个子带的每一个系数  $w_{jk}$ ，考虑一个邻域窗口  $B_{jk}$ ，窗口尺寸可以是  $3 \times 3$ ， $5 \times 5$ ， $7 \times 7$  等。图1给出了一个邻域窗口实例，窗口中心是待取阈值的小波系数。对于二维图像，每个子带系数的估计仍然使用式(6)，但是， $S_{jk}^2$  的计算公式修改为  $S_{jk}^2 = \sum_{i,l \in B_{jk}} w_{il}^2$ 。

NeighShrink 方法可以推广到对偶树复数小波变换。由于CWT系数是复数，所以，将收缩估计式(6)修改为

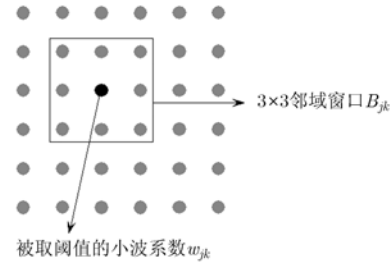


图1 邻域窗口实例，窗口中心是被取阈值的小波系数

$$\hat{w}_{jk} = \left[ 1 - \frac{\lambda^2}{\text{abs}(S_{jk}^2)_+} \right] w_{jk} \quad (7)$$

abs 表示取复数的模。下面，以  $512 \times 512$  的 Lena 图像为例，比较 NeighShrink 分别应用于 DWT (NeighShrink DWT) 和 CWT (NeighShrink CWT) 及 FeatShrink<sup>[6]</sup> 的降噪效果，Lena 原图像参见图2。对原图像添加的高斯随机噪声的标准差分别为 10，20，30 和 60，NeighShrink DWT 和 NeighShrink CWT 邻域窗口分别取为  $3 \times 3$  和  $5 \times 5$ ，universal 阈值  $\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(n)} \approx 3.53\sigma$ 。3种方法降噪得到的 PSNR 如表1所示。



图2 Lena 和 Barbara 原图像

表1 3种方法 PSNR(dB)比较

$\sigma$	FeatShrink (UWT)	NeighShrink DWT ( $3 \times 3$ 邻域窗口)	NeighShrink CWT ( $5 \times 5$ 邻域窗口)
10	34.45	34.38	<b>34.97</b>
20	31.52	30.91	<b>31.61</b>
30	<b>29.69</b>	28.76	29.52
60	<b>26.71</b>	24.86	25.82

从表1看到的结果是令人鼓舞的。NeighShrink CWT 不仅一致优于 NeighShrink DWT，也在较低噪声级下，优于 FeatShrink 方法。它们共同的问题是不如 FeatShrink 健壮，随着噪声级的增高，降噪结果变坏。

### 4 邻域自适应的收缩降噪

NeighShrink CWT 较之 NeighShrink DWT，降噪效果已有很大的改进。但是，不够健壮，即噪声级增高时，降噪结果变坏。这个问题源于 NeighShrink 在每个小波子带上使用了固定的阈值和邻域窗口尺寸，使用自适应的阈值和邻域

窗口就可以克服这个缺陷。方法如下: 对每一个子带系数实部, 通过最小化 Stein 的无偏风险估计<sup>[10]</sup>, 计算各个子带系数实部最优的阈值和邻域窗口尺寸, 然后用这些参数对各子带系数的实部和虚部用式(6)进行收缩。下面给出给定子带上最优阈值和邻域窗口尺寸的推导过程。为了简化记号, 子带  $s$  上  $N_s$  个小波系数的实部  $\mathbf{w}_s = \{w_{ij}, i, j \in \text{位于子带 } s\}$  被重组为一个一维向量  $\mathbf{w}_s = \{w_n : n = 1, \dots, N_s\}$ 。同样, 与  $\mathbf{w}_s$  对应的无噪小波系数的实部  $\boldsymbol{\theta}_s = \{\theta_{ij}, i, j \in \text{位于子带 } s\}$  也被重组成一维向量  $\boldsymbol{\theta}_s = \{\theta_n : n = 1, \dots, N_s\}$ 。Stein 已证明: 基于数据  $\mathbf{w}_s$ , 对  $\boldsymbol{\theta}_s$  的估计为  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_s$ , 期望损失或风险 (亦即 MSE)  $E\{\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_s - \boldsymbol{\theta}_s\|_2^2\}$  可被无偏估计。通常情况下, 假定噪声标准差  $\sigma = 1$ , 则

$$E\{\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_s - \boldsymbol{\theta}_s\|_2^2\} = N_s + E\{\|g(\mathbf{w}_s)\|_2^2 + 2\nabla g(\mathbf{w}_s)\} \quad (8)$$

其中  $g(\mathbf{w}_s) = \{g_n\}_{n=1}^{N_s} = \boldsymbol{\theta}_s - \mathbf{w}_s$ ,  $\nabla g \equiv \sum_n \frac{\partial g_n}{\partial w_n}$ 。

根据式(6), 可以得到:

$$g_n(w_n) = \hat{\theta}_n - w_n = \begin{cases} -\frac{\lambda^2}{S_n^2} w_n, & \lambda^2 < S_n^2 \\ -w_n, & \text{其它} \end{cases} \quad (9)$$

$$\|g_n(w_n)\|_2^2 = \begin{cases} \frac{\lambda^4}{S_n^4} w_n^2, & \lambda^2 < S_n^2 \\ w_n^2, & \text{其它} \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial w_n} = \begin{cases} -\lambda^2 \frac{S_n^2 - 2w_n^2}{S_n^4}, & \lambda^2 < S_n^2 \\ -1, & \text{其它} \end{cases} \quad (11)$$

假定邻域窗口的尺寸为  $L$  ( $L$  限定为大于 1 的奇数, 如 3, 5, 7 等), 令

$$\text{SURE}(\mathbf{w}_s, \lambda, L) = N_s + \sum_n \|g_n(w_n)\|_2^2 + 2 \sum_n \frac{\partial g_n}{\partial w_n} \quad (12)$$

则  $E\{\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_s - \boldsymbol{\theta}_s\|_2^2\} = E\{\text{SURE}(\mathbf{w}_s, \lambda, L)\}$  是期望风险的无偏估计。选择给定子带的邻域尺寸  $L^s$  和阈值  $\lambda^s$ , 使  $\text{SURE}(\mathbf{w}_s, \lambda, L)$  最小化, 即

$$(\lambda^s, L^s) = \arg \min_{\lambda, L} \text{SURE}(\mathbf{w}_s, \lambda, L) \quad (13)$$

上面的阈值和邻域尺寸是假定  $\sigma = 1$  时导出的, 对于非单位方差的数据, 在使用式(13)计算阈值和邻域窗口尺寸之前, 应先估计噪声标准差  $\hat{\sigma}$ , 并将小波系数的噪声方差标准化为 1。一个好的噪声方差估计方法是用最精细分解层对角子带系数绝对值的中值来估计<sup>[1]</sup>:

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median}(|\mathbf{w}_s|)}{0.6745}, \text{ 其中 } \mathbf{w}_s \in \text{最精细分解层对角子带} \quad (14)$$

## 5 实验结果

下面将本文方法与当前最好的一些降噪算法 FeatShrink<sup>[6]</sup>, ProbShrink<sup>[7]</sup>, BiShrink<sup>[9]</sup>, 以及基于 SURE 的最新的降噪方法 SURE-LET<sup>[8]</sup> 进行比较。选择两个  $512 \times 512$  的标准测试图像 Lena 和 Barbara, 它们被污染的

高斯噪声的标准差有一个较宽的范围, 分别为 10, 20, 30, 50 和 100。两个原测试图像如图 2 所示。

FeatShrink, ProbShrink 和 SURE-LET 使用 4 个分解层的 UWT, 且前两者使用 Daubechies symmlet 8 个零矩小波, 后者使用 Haar 小波, 考虑到 Blu 等使用 Haar 小波获得了最好的结果。BiShrink 和本文方法采用 6 个分解层的 CWT。两个测试图像和 5 种方法在不同噪声级下计算出的 PSNR 如表 2 所示。

表 2 各种降噪方法 PSNR(dB)比较

	FeatShrink (UWT)	ProbShrink (UWT)	BiShrink (CWT)	SURE- LET (UWT)	本文 方法 (CWT)
$\sigma$	Lena				
10	34.45	35.01	35.30	34.78	<b>35.33</b>
20	31.52	31.92	32.33	32.01	<b>32.39</b>
30	29.69	30.04	30.55	30.30	<b>30.60</b>
50	27.50	27.68	28.27	28.18	<b>28.31</b>
100	24.65	24.70	25.20	<b>25.40</b>	25.39
$\sigma$	Barbara				
10	32.44	33.27	33.30	31.03	<b>33.42</b>
20	28.34	29.32	29.66	27.94	<b>29.82</b>
30	25.90	27.14	27.61	26.01	<b>27.78</b>
50	23.41	24.44	25.21	24.07	<b>25.45</b>
100	21.78	21.94	22.48	22.24	<b>22.69</b>

从表 2 可以看出: 本文方法明显优于其它 4 种方法。下面, 我们以污染噪声标准差为 30 的 Barbara 为例, 观察上述 5 种方法降噪图像的视觉质量。由于完整图像的降噪细节很难分辨, 我们截取一个局部来观察, 5 种方法的 PSNR 分别为 25.90dB, 27.14dB, 27.61dB, 26.01dB 和 27.78dB, 如图 3 所示。BiShrink 和本文方法降噪图像的视觉效果明显优于其它三种方法。FeatShrink 生成的图像被过度光滑, 丢失了较多的纹理细节; ProbShrink 生成的图像虽较好地保留了纹理细节, 但是残存一些伪像; SURE-LET 生成的图像比较模糊; BiShrink 和本文方法生成的图像不仅较好地保留了纹理细节, 也更为清晰, 几乎没有伪像, 这两种方法生成的图像在视觉上就很难分辨优劣, 它们的 PSNR 也是相当接近的。

5 种方法对 Barbara 图像降噪的 PSNR 曲线如图 4 所示。从图 4 可以更直观地看出: ProbShrink 方法的 PSNR 一致高于 FeatShrink 方法; BiShrink 方法的 PSNR 一致高于 ProbShrink 方法; 在低噪声级时, SURE-LET 方法的 PSNR 是最低的, 但在大噪声级时, 其 PSNR 超过了 FeatShrink 和 ProbShrink 方法; 本文方法的 PSNR 一致高于其它四种降噪方法, 但与 BiShrink 方法的结果很接近, PSNR 的增益



图3  $\sigma = 30$  时 Barbara 有噪图像的降噪。从左到右、从上到下分别为: 有噪的图像, PSNR = 18.59dB; FeatShrink, PSNR = 25.90dB; ProbShrink, PSNR = 27.14dB; BiShrink, PSNR = 27.61dB; SURE-LET, PSNR = 26.01dB; 本文方法, PSNR = 27.78dB。

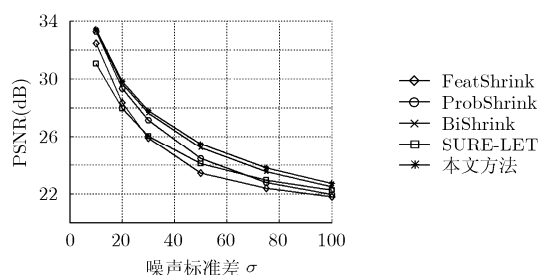


图4 5种降噪方法对 Barbara 图像降噪的 PSNR 曲线

在 0.12 ~ 0.26dB 之间。

## 6 结论

本文提出了一种新的自适应的图像降噪方法。它是基于对偶树复数小波变换, 利用 Stein 的无偏风险估计<sup>[10]</sup>, 针对 CWT 变换系数的实部, 计算 NeighShrink CWT 在各个子带实部最优的阈值和邻域窗口尺寸。然后, 用这些参数对各个子带系数的实部和虚部分别进行收缩。实验结果证实: 该方法比当前最好的图像降噪算法 FeatShrink<sup>[6]</sup>, ProbShrink<sup>[7]</sup>, SURE-LET<sup>[8]</sup>和 BiShrink<sup>[9]</sup>方法的降噪效果更好。

## 参考文献

- [1] Donoho D L and Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage [J]. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425-455.
- [2] Cai T T and Silverman B W. Incorporating information on neighbouring coefficients into wavelet estimation[J]. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 2001, 63(2): 127-148.
- [3] Chen G Y, Bui T D, and Krzyżak A. Image denoising with neighbour dependency and customized wavelet and threshold [J]. *Pattern Recognition*, 2005, 38(1): 115-124.
- [4] Coifman R R and Donoho D L. Translation invariant denoising [C]. In *Wavelets and Statistics*, Springer Lecture Notes in Statistics 103, San Diego, CA, USA, 1995: 125-150.
- [5] Selesnick I W, Baraniuk R G, and Kingsbury N G. The dual-tree complex wavelet transform [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2005, 22(6): 123-151.
- [6] Balster E J, Zheng Y F, and Ewing R L. Feature-based wavelet shrinkage algorithm for image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2005, 14(12): 2024-2039.
- [7] Pizurica A and Philips W. Estimating probability of presence of a signal of interest in multiresolution single- and multiband image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006, 15(3): 654-665.
- [8] Blu T and Luisier F. The SURE-LET approach to image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2007, 16(11): 2778-2786.
- [9] Sendur L and Selesnick I W. Bivariate shrinkage with local variance estimation [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, 9(12): 438-441.
- [10] Stein C. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution [J]. *Annals of Statistics*, 1981, 9(6): 1135-1151.

周登文: 男, 1965年生, 副教授, 从事图像降噪、图像压缩和几何造型的研究工作。

刘克勤: 男, 1946年生, 教授, 从事图像处理和电子商务的研究工作。