

降低高条件数信道下的球形译码算法复杂度的方法

赵 慧 龙 航 王文博

(北京邮电大学泛网无线通信教育部重点实验室 北京 100876)

摘 要: MIMO 系统中, 球形译码可以在保证接近 ML 检测性能的前提下大大降低检测复杂度。但当信道矩阵条件数很高时, 球形译码的复杂度仍然会很高。在分析了这一现象的原因后, 本文提出了在高层对权值进行合并的一种球形译码算法, 因为其减小了译码搜索过程中对树的高层节点的访问的概率, 由此降低了搜索复杂度。仿真结果表明, 这种算法在低信噪比、高条件数时可以节约 20% 的浮点运算操作次数。

关键词: MIMO; 球形译码; 条件数; 算法复杂度

中图分类号: TN929.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)03-0636-04

A Method of Reducing the Complexity of Sphere Decoder in the High-Condition Number Channel

Zhao Hui Long Hang Wang Wen-bo

(Key Lab of Universal Wireless Communications. Ministry of Education, BUPT, Beijing 100876, China)

Abstract: For MIMO system, as an efficient algorithm to replace ML detection, Sphere Decoding (SD) can reduce the detection complexity greatly. Whereas the bad channel with large condition number still aggravates the computation complexity of SD. In this paper, the reason of this phenomenon is firstly analyzed. Secondly, an algorithm of combining weight at high layer is proposed for SD, aiming to reduce the probability of accessing into the high layer of the tree in the searching process of SD so as to decrease the complexity. The simulation results prove that the proposed algorithm can cut down the complexity distinctly, even to more than 20% at low SNR and high condition number.

Key words: MIMO; Sphere Decoder(SD); Condition number; Algorithm complexity

1 引言

在多输入多输出(MIMO)理论中, 多根发射和接收天线能够大幅度地提高系统的容量, 因而在 B3G/4G 无线通信系统的研究中成为一个热点。贝尔实验室分层空时结构(BLAST)就是最早提出的针对强散射、平坦衰落无线信道环境下进行复用传输的方案。对于这种发端同时传输多路不同信息的系统, 最大似然(ML)是最优的检测准则, 但其检测复杂度随着发送天线数和调制阶数以指数函数增长。次优的线性检测算法采用迫零(ZF)或最小均方误差(MMSE)准则, 复杂度比较低。但是这两种算法不能获得满接收分集增益, 性能大大劣于 ML。因此, 很多文章提出了低代价的检测算法。比如有基于搜索算法的球形译码(SD)^[1-3]和 QRM-MLD^[4], 前者是把搜索空间限制在一个球体内, 而后者是限制了每层所保留节点的个数。还有基于求解二次规划问题的半定松弛法^[5], 基于高斯近似和迭代计算概率统计的 PDA^[6]和 MCMC^[7]方法等等。在这些不同的思路和方法中, 球形译码仍是保证最优性能和低复杂度的最好的方法。它的复杂度是发送天线数的立方函数^[8], 但在某些信道条件下, 其复杂度仍然是比较高的。

在单天线系统中, 信噪比是描述信道条件的最主要的物理量。而在多天线系统中, 相同信噪比下, 不同的信道矩阵实现往往带来检测性能的很大差异, 也就是说除了信噪比外, 关于信道矩阵的某一属性也应该成为对信道进行衡量的物理量。文献[9]中作者通过对次优检测算法和 ML 检测算法的检测域的比较, 解释了次优算法性能差的原因在于信道条件数的影响。信道矩阵的条件数是其最大奇异值和最小奇异值的比值, 它描述了多维星座图被信道扭曲的程度。我们发现当信道的条件数接近于 1 的时候, 球形译码算法可以迅速地找到最优解; 而随着信道条件数的增大, 星座图的各维坐标轴被伸缩的程度不同导致球形译码算法中的搜索过程随之复杂。本文就是针对这种高条件数的信道环境, 提出了一种在高层进行权值合并的算法以降低球形译码的复杂度。

2 球形译码

这里先对球形译码算法进行介绍。假设 MIMO 系统的发射和接收天线数分别为 N_t 和 N_r , 经历的是平坦衰落信道, 则系统信号模型为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中 \mathbf{y} 是 $N_r \times 1$ 维的接收矢量, \mathbf{H} 是 $N_r \times N_t$ 的信道矩阵 ($N_r \leq N_t$), \mathbf{x} 是一个由 N_t 个符号组成的列矢量, 其中每个符号都是从大小为 2^{Mc} (Mc 为调制阶数) 的调制符号集中选出

的, \mathbf{n} 是零均值、协方差矩阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}_{N_r}$ 的复高斯白噪声矢量。

ML 检测的搜索空间包括 $2^{\text{Me}N_t}$ 个栅格点, 目标是要搜索满足如下条件的点: $\hat{\mathbf{x}} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$ 。为了减少搜索空间, 球形译码选出一个合适的值来作为球型搜索域的半径(定义半径的平方为 C), 目标就是要找出球中具有最小权值 ($E = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2$) 的栅格点。 \mathbf{H} 可以被分解成酉矩阵 \mathbf{Q} 和上三角阵 \mathbf{R} 的乘积。

由于 \mathbf{R} 是一个上三角阵, 则落于球内的栅格点的权值可以用递归方法表示:

$$E = \|\mathbf{Q}^H \mathbf{y} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{x}}\|^2 = \|\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\rho}\|^2 = \sum_{i=1}^{N_t} \left| r_{ii} \hat{x}_i - \left(\rho_i - \sum_{j=i+1}^{N_t} r_{ij} \hat{x}_j \right) \right|^2 + \sum_{i=N_t+1}^{N_t} \rho_i^2 < C \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{Q}^H \mathbf{y} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)^T$, r_{ij} 表示矩阵 \mathbf{R} 第 i 行第 j 列的元素。由于权值中的第 2 项 $\sum_{i=N_t+1}^{N_t} \rho_i^2$ 是一个常数, 所以实际上可以省略掉。

定义 $S_k = \left(\rho_k - \sum_{j=k+1}^{N_t} r_{kj} \hat{x}_j \right) / r_{kk}$ 和 $E_{k+1} =$

$$\sum_{j=k+1}^{N_t} \left| r_{ij} \hat{x}_i - \left(\rho_i - \sum_{j=i+1}^{N_t} r_{ij} \hat{x}_j \right) \right|^2 = \sum_{i=k+1}^{N_t} e_i, \text{ 则式(2)可以改写为}$$

$$\left| r_{kk} \hat{x}_k - \left(\rho_k - \sum_{j=k+1}^{N_t} r_{kj} \hat{x}_j \right) \right|^2 < C - \sum_{i=k+1}^{N_t} \left| r_{ii} \hat{x}_i - \left(\rho_i - \sum_{j=i+1}^{N_t} r_{ij} \hat{x}_j \right) \right|^2 \quad (3)$$

$$|\hat{x}_k - S_k|^2 < (C - E_{k+1}) / |r_{kk}|^2 = C_k \quad (4)$$

这里 C_k 的意义是每一层上圆形搜索阈的半径的平方。通过将一个对复数的操作转化成对两个实数的操作, 可以节省很大的计算量。所以我们把边界条件式(4)替换为(注意式(5)和式(4)并不等价, 式(5)所示的边界是式(4)的外接圆):

$$\begin{cases} |\text{real}(\hat{x}_k) - \text{real}(S_k)| < \sqrt{(C - E_{k+1}) / |r_{kk}|^2} \\ |\text{imag}(\hat{x}_k) - \text{imag}(S_k)| < \sqrt{(C - E_{k+1}) / |r_{kk}|^2} \end{cases} \quad (5)$$

球形译码递归算法的过程可以看成是对一个倒置的树的搜索过程, 树的高度为发射天线数 N_t 。只有满足边界条件式(5)的栅格点才能被保留下来作为树的节点。 E_k 的物理意义就是第 k 层节点的权值, 它是从根节点到该层节点所经历的路径(图 1 中灰色的粗线)的权值 e_i 的累加和。搜索的目标就是要从根节点 0 找到位于最下面一层的带有最小权值 E_1 的节点。

可以看出, 如果图 1 中树的高层上的圆形搜索阈的半径越小, 所保留的上层节点就会越少, 意味着这棵树的树枝就少, 这样有利于快速找到解。所以在实际操作中都需要对 \mathbf{H} 右乘一个排序矩阵 \mathbf{A} , 而对 \mathbf{x} 左乘一个逆排序矩阵 \mathbf{A}^{-1} , 使得 k 值越大的 $|r_{kk}|^2$ 尽量大。根据式(5)式确定了树上每层的节点后, 搜索策略可以采用分支定界^[2]的思想, 这是一种深

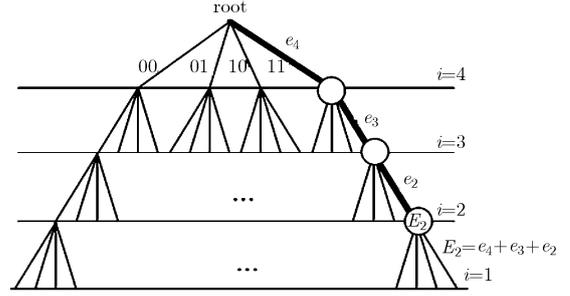


图 1 球形译码的树型结构($N_t=4$, QPSK)

度优先搜索算法。在每一层中, 如果节点的权值 E_k 小于现有的半径平方, 则将半径更新为节点权值的开方。这个操作可以看成是对树上权值比较大的枝杈的修剪, 有助于更迅速地找到解。如果由于球形搜索所定义的半径太小, 在没有达到树的最下一层时就已经找不到满足边界条件式(5)的节点, 搜索就会返回上层的相邻节点, 同时扩大搜索半径。持续这样的搜索过程直到找到位于最下一层的带有最小权值的节点。

3 高条件数对复杂度的影响

现在, 来分析信道矩阵的条件数对搜索复杂度的影响。

在乘以酉矩阵 \mathbf{Q}^H 后, 接收矢量 \mathbf{y} 中噪声的特性保持不变。那么可知星座点的扭曲是由 \mathbf{R} 带来的。换言之, \mathbf{R} 的对角元素决定了信号空间中每一维坐标轴的放大和缩小。观察不等式(5)的右边部分。 r_{kk} 是第 k 层圆形搜索阈半径的分母部分。其大小和 \mathbf{H} 的条件数有很紧密的联系。高条件数信道下, 信道矩阵的奇异值差异比较大, 使得 k 值较大时的 $|r_{kk}|$ 值相比于低条件数信道时小很多, 则 C_k 就会很大, 即高层的节点数很多, 因而导致复杂度的增加。

另外, 根据节点权值的表达式, 如果 $|r_{kk}|$ 较小, 高层节点的权值 E_k 在其下层节点的权值中就只占很小的比重。这样, 经过节点排序的树上, 在第 k 层具有较小权值的节点 E_{k1} 的子节点权值未必在同层节点中也排序较小。 E 和 e 的第 1 个下角标表示处于第 k 层, 第 2 个下角标是区分每个节点的索引值。如图 2 中所示, 这里树高为 2, 每层的节点根据权值的大小进行了排序。搜索从 0 号节点开始, 先经过节点 1, 然后向下到节点 4, 由于节点 4 处于最后一层, 这时搜索半径可以根据节点 4 的权值进行缩小。由于有层内排序, 同父母处于右边的子节点肯定权值要比左边大, 所以这时节点 5 就可以被跳过不需要访问。搜索回到上一层的节点 2, 然后向下到节点 6, 这时节点 6 也已经是最后一层了, 节点 6 的权值要比节点 4 小, 所以半径再次缩小。搜索再回到上层节点 3, 由于节点 3 没有子节点, 所以搜索终止。节点 6 就是权值最小的解。这里虽然节点 1 的权值小于节点 2, 但节点 1 的子节点 4 的权值却大于节点 2 的子节点 6。所以条件数过高会造成频繁地访问高层节点, 导致复杂度增大。

图 3 中示出对于 4×4 的系统, 采用 QPSK 调制方式时,

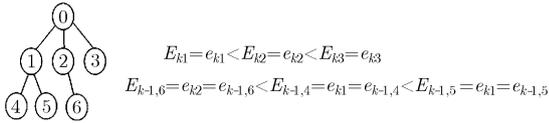


图 2 树上层内排序的解释

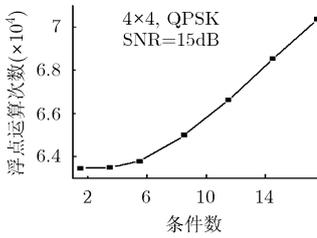


图 3 SD 复杂度受条件数的影响

球形译码的复杂度随着条件数的增加明显提高。这里使用浮点运算操作次数来衡量算法的复杂度，即统计了检测过程中针对浮点数的加减乘除的操作次数。

4 基于权值合并的球形译码

本文提出一种在高层进行权值合并的方法。这种方法的思路在于：对于较大的 k ，仅当在 k 层进行排序的时候，节点的权值暂时地换成 $(k-1)$ 层的第 1 个子节点权值。但是它们所标记的权值保持实际值不变。

如图 4 所示，这里第 1 层的权值仅是排序时临时改变的权值，由于权值的增大，节点 1 移到了节点 2 的左边。图 2 中原始的访问顺序为 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3$ ，搜索会从底层节点跳回高层节点两次。在改变第 1 次排序时所用的权值后，因为 $E_{k-1,4} > E_{k-1,6}$ ，图 4 中的访问顺序为 $0 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 4$ ，只需要返回高层一次即可完成搜索。最终的解为节点 6。简言之，在高层进行权值合并的目标就是减少访问高层节点的概率。

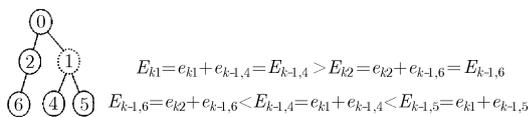


图 4 基于权值合并的球形译码

5 仿真结果

5.1 完全全权值合并的球形译码

在这一节中，我们首先测试了权值合并的效果。由于仿真中天线数不是很大，仅把第 1 层进行节点排序时所用的权值换为其第 1 个子节点的权值。无论信道的条件数是大是小，权值合并的方法总是用于检测算法中。本文称这种方法为完全权值合并的球形译码。

仿真参数：帧长为 100 个符号，天线配置为 4×4 , 16QAM 调制

图 5 中，低信噪比时，SD 的复杂度都会比较高，原因在于低信噪比下为了保证性能 C 值取的都很大因此在高层满足边界条件的节点就会比较多。另一方面，条件数越大意味着高层半径越大，这同样使得高层节点数会很大。而通过在高层进行权值合并再排序的方法使得权值较小的子节点的父节点尽量排在前面，优先被访问，加快了搜索收敛的速度。这一效果在高层节点数很多时会很突出。所以从图 5 中可以看出，在低信噪比和高条件数的情况下，和原始的 SD 相比，完全权值合并的 SD 都可以很大程度上降低复杂度。但当条件数比较小的时候，权值合并的操作没有效果，反而因为不必要的操作略微增加了复杂度。因此在低条件数的情况下，完全权值合并算法的曲线要稍高于 SD。两条曲线的交点就是合并权值方法开始生效的起点。从图 5 中可看出，随着信噪比的增大，交点右移，这也说明了信噪比降低与条件数增加所带来的高层节点数增加的后果是一样的。表 1 给出了不同信噪比条件下这种算法有效的门限值以及在各种条件数(CN)下这种方法节省的浮点运算操作次数的比例。

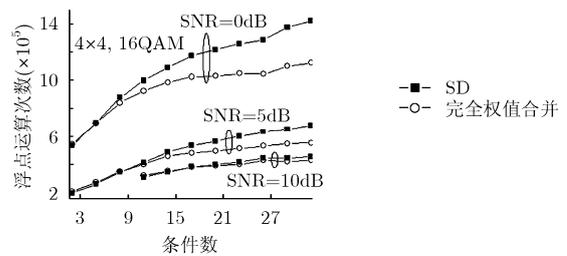


图 5 不同信噪比下原始 SD 和完全权值合并的 SD 的复杂度比较

表 1 权值合并方法的门限以及增益

SNR	0dB	5dB	10dB
门限	CN > 3.5	CN > 8.5	CN > 16
节约的浮点运算操作数比例			
CN = 18	13.4%	10%	0.9%
CN = 22	16%	13.6%	3.5%
CN = 30	20%	17%	6%

如果信噪比为 10dB，当 CN 大于 16 时，这种算法开始生效。可以从表 1 中的结果生成一个适当的拟合公式，它可以表征门限值和信噪比之间的关系。

$$CN_{\text{threshold}} = 1.25 \times \text{SNR}(\text{dB}) + 3 \quad (\text{SNR} < 10\text{dB}) \quad (6)$$

这个公式不是非常准确，但是在门限值附近，改善算法和原始算法的区别比较小，可以认为门限值容忍一定的偏差，因此这个公式既简单又有效。

5.2 部分权值合并的球形译码

既然当条件数太小的时候这种基于权值合并的方法没有增益，我们可以在接收端增加一个判断以决定是否在程序中使用权值合并策略，也就是说，仅当 CN 大于门限的时候，才采用这种方法，这种方法被称为部分权值合并的球形译码。

如图 6 所示,当条件数较小的时候,这种部分的权值合并方法可以避免完全权值合并所带来的不必要的复杂度增加。

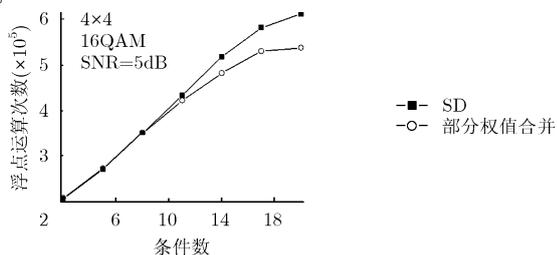


图 6 原始 SD 和部分权值合并的 SD 的复杂度比较

6 结束语

本文首先分析了信道条件数对球形译码算法复杂度的影响。为了降低高条件数信道条件下的检测复杂度,文中提出了一种在高层节点排序时进行权值合并的球形译码算法。根据不同的应用条件的界定,给出了两种权值合并方法和原始球形译码在各种信噪比和条件数下的复杂度对比。仿真结果表明,这种基于权值合并的方法可以有效地降低算法复杂度,在低信噪比高条件数时,甚至可以节约 20% 的运算量。

参 考 文 献

- [1] Chan A M and Lee Inkyu. A new reduced-complexity sphere decoder for multiple antenna systems. *IEEE ICC*, New York, 2002, 1: 460-464.
- [2] Pham D, Pattipati K R, and Willett P K, *et al.* An improved complex sphere decoder for V-BLAST systems. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(9): 748-751.
- [3] Fukatani T, Matsumoto R, and Uyematsu T. Two methods for decreasing the computational complexity of the MIMO ML decoder. *IEICE Trans. on Fundamental*, 2004, 87(10): 2571-2576.
- [4] Kawai H *et al.* Adaptive control of surviving symbol replica candidates in QRM-MLD for OFDM MIMO multiplexing. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2006, 24: 1130-1140.
- [5] Mobasher A and Taherzadeh M, *et al.* A near-maximum-likelihood decoding algorithm for MIMO systems based on semi-definite programming. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2007, 53(11): 3869-3886.
- [6] Pham D, Pattipati K R, Willett P K, and Luo J. A generalized probabilistic data association detector for multiple antenna systems. *IEEE Communications Letters*, 2004, 8(4): 205-207.
- [7] Behrouz F B, Zhu Haidong, and Shi Zhenning. Markov chain Monte Carlo algorithms for CDMA and MIMO communication systems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2006, 54(5): 1896-1906.
- [8] Hassibi B and Vikalo H. On the sphere-decoding algorithm I. Expected complexity. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(8): 2806-2818.
- [9] Artés H, Seethaler D, and Hlawatsch F. Efficient detection algorithms for MIMO channels: A geometrical approach to approximate ML detection. *IEEE Signal Processing Letters*, 2003, 51(11): 2808-2820.

赵 慧: 女, 1980 年生, 讲师, 研究方向为 MIMO 的检测算法、空时编码、MIMO 系统中的自适应信号处理。

龙 航: 男, 1984 年生, 博士生, 研究方向为 MIMO 的检测算法、预编码技术。

王文博: 男, 1965 年生, 教授, 主要研究方向为移动通信系统中的信号处理与网络研究。